Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Ressources transversales

Mathématiques, Monde Économique et Professionnel et parcours Avenir

Une ressource produite dans le cadre de la stratégie mathématiques en partenariat avec le réseau des IREM

irem

SOMMAIRE

Introduction 3

Contribuer au parcours Avenir des élèves en cours de mathématiques 3

Contribuer à la construction du parcours Avenir des élèves 4

- Exemple de modalités d'utilisation des ressources ONISEP 5
- Utiliser les ressources pédagogiques de Pro2science, lors des Enseignements Pratiques Interdisciplinaires au collège ou en Accompagnement Personnalisé au Lycée 9
- Utiliser les ressources pédagogiques produites pour le lycée professionnel 11
- Aller plus loin 12

Rendre mes élèves autonomes dans la construction de leur parcours Avenir 13

- Aider les élèves à créer des fiches métiers dans le cadre des cours de mathématiques 13
- Impulser et fédérer l'interdisciplinarité 14

Assurer une continuité et une progressivité dans la construction du parcours Avenir de chaque élève 16

Tirer profit du numérique, de l'application FOLIOS 16

- Inscrire ma discipline dans le parcours Avenir, mutualiser avec mes collègues 16

Mettre l'évaluation au service des apprentissages de mes élèves 17

- Intégrer les besoins collectifs et individuels 17
- Intégrer l'évaluation formative 17

Retrouvez Éduscol sur

Mémento 18

- Regards croisés sur les besoins des élèves 18
- Amorce d'un scénario pédagogique 18
- Tenue d'un carnet de bord élève 18
- Bilan sur l'efficacité du scénario, propositions éventuelles de régulation et mutualisation des travaux 19

Ressources complémentaires 19

Introduction

Les portraits des adolescents en 2016, la maison connectée de 2030, les économies d'énergie, la gestion de mini-entreprises, l'obtention de prêts bancaires, la dimension de la vie quotidienne et de l'économie familiale, la maintenance nautique, les piratages des comptes Facebook, le séchage de bois en Croatie, ... sont autant de sujets qui permettent de découvrir le monde économique et professionnel. De plus, ils motivent les élèves fragiles voire décrocheurs, tout autant que les élèves scolaires, aimant la résolution de tâches complexes. Les mathématiques ont toute leur place dans ces thèmes ou problématiques, en symbiose avec toutes les autres disciplines.

Quatre parcours (le parcours éducation artistique et culturelle, le parcours citoyen, le parcours Avenir, le parcours éducatif de santé) sont entrés en vigueur. Ils se caractérisent par leurs ancrages disciplinaires, définis en lien avec le socle commun de connaissances, de compétences et de culture, avec les programmes de l'école élémentaire, ceux du collège et des lycées. Ils se construisent par des rencontres, des avancées et cheminements personnels d'un élève en classe ou en dehors de la classe. En particulier, faire vivre le parcours Avenir permet aux différents acteurs d'aider chaque élève à acquérir les compétences et connaissances suffisantes pour se projeter dans l'avenir et faire des choix d'orientation raisonnés et éclairés.

L'objet de ce document ressource est de montrer que le parcours Avenir peut nourrir le cours de mathématiques. À cet égard, sont recensées des pratiques transférables ou adaptables aux pratiques de chaque enseignant ou au contexte de chaque établissement. Les exemples présentés doivent aider les lecteurs à :

- appréhender la notion de parcours et à s'interroger sur son évaluation ;
- intégrer l'apport de connaissances et de compétences disciplinaires pour contribuer à la construction d'un parcours ;
- laisser aux élèves une forme d'autonomie afin qu'ils développent leur sens de l'engagement et de l'initiative ;
- mettre en œuvre une véritable démarche de projet dans un cadre pluridisciplinaire.

Les contenus proposés reposent sur des fondements épistémologiques solides : ils s'adossent à des connaissances vérifiées et à des pratiques reconnues. Ils s'appuient, en outre, **sur des apports récents de la recherche, issus notamment des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM).**

Contribuer au parcours Avenir des élèves en cours de mathématiques

Les programmes, du collège comme ceux des lycées, amènent à **développer des compétences**, à **opérationnaliser le socle**, à **traverser les parcours**, à favoriser **l'interdisciplinarité**, ainsi qu'à faire évoluer les pratiques vers la **différenciation et la pédagogie active**. Ces points sont soulignés dans les objectifs du référentiel du Parcours Avenir. C'est une réelle plus-value pour les enseignants et pour les élèves d'intégrer l'orientation dans des séquences pédagogiques, de s'ouvrir à la réalité des métiers et donner du sens aux disciplines enseignées au travers de situations en lien avec les activités d'un professionnel.

Les élèves deviennent acteurs de leur parcours. Ils découvrent le monde économique et professionnel. Ils en gardent une mémoire grâce à l'usage de l'application FOLIOS. Ils créent naturellement des liens entre les disciplines et développent des compétences dans chaque

domaine du socle, tout particulièrement la démarche de projet, la communication, et le travail en équipe.

Les professeurs travaillent en équipe au sein d'un collectif établissement, entre autres sur le parcours Avenir. Ils enrichissent leur réflexion sur la progressivité et la temporalité des apprentissages, sur les compétences, sur les cycles et sur les parcours. Ils se forment entre pairs en partageant leurs connaissances et compétences. Ils répondent ainsi au référentiel de compétences des métiers du professorat et de l'éducation, en particulier sur les points suivants :

- accompagner les élèves dans leur parcours de formation ;
- coopérer au sein d'une équipe ;
- s'engager dans une démarche individuelle et collective de développement professionnel.

Contribuer à la construction du parcours Avenir des élèves

Des ressources pédagogiques se trouvent sur le site de l'Onisep :

- Le dossier Sciences et métiers
- Les métiers au cœur de la classe
- Pro2science

Elles s'ancrent dans plusieurs disciplines et ceci à tous les niveaux, de la sixième aux classes de BTS, voire à l'université.

Ces outils sont des supports pertinents pour :

- les enseignements disciplinaires ;
- les enseignements pratiques interdisciplinaires au collège ;
- l'enseignement général lié aux spécialités en lycée professionnel ;
- les enseignements d'exploration ou l'accompagnement personnalisé en lycée général et technologique.

Il existe d'autres ressources pédagogiques, produites dans le cadre du lycée professionnel, qui ont une dimension « Métier » plus marquée. Elles peuvent être aisément adaptées et utilisées au cycle 4.

Pour aller plus loin, en fonction du contexte économique local, professeurs comme élèves peuvent être amenés à produire leurs propres fiches métiers pour accroître leur motivation et leur curiosité. Ils pourront s'appuyer sur des manifestations ou de l'évènementiel (Semaine des Mathématiques, forum des Sciences).

Dans tous les cas, la démarche scientifique est à privilégier dans la mise en œuvre de ces ressources. Elle est au cœur des apprentissages. Elle permet aux élèves de chercher, de modéliser, de représenter, de raisonner, de calculer, de communiquer, autant de compétences attendues dans les programmes de mathématiques du collège aux lycées (LP, LGT). Une formation régulière des élèves à la démarche d'investigation est nécessaire. Des réflexions d'équipes peuvent être menées sur la continuité et la progressivité de ce type de formation de la sixième à la terminale. Construire et/ou choisir ensemble des tâches plus ou moins ambitieuses qui traversent la discipline et les parcours est fédérateur et source d'enrichissement collectif.

Exemple de modalités d'utilisation des ressources ONISEP

Le professeur choisit une ressource issue de la banque Onisep. Il identifie les connaissances à construire ou à réinvestir et les compétences à mobiliser par les élèves. Il adapte éventuellement la situation ou la problématique au contexte de sa classe.

Le jeu de rôle est une démarche pédagogique qui invite l'élève à « entrer dans la peau » d'un(e) professionnel(le) et à anticiper ses prises de décisions. L'enseignant s'assure que l'élève a bien les prérequis (connaissances, compétences) nécessaires à la réalisation du jeu de rôle.

Il délimite le cadre de mise en œuvre (cours disciplinaires, enseignements pratiques interdisciplinaires, accompagnement personnalisé, enseignement général lié aux spécialités, enseignements d'exploration).

Lors de la mise en œuvre, l'enseignant doit adopter une posture d'accompagnant, suivre le cheminement de chaque élève, valoriser les brouillons, les avancées partielles, prévoir les aides tout en laissant de l'autonomie à l'élève, prévoir les questions « pour aller plus loin ».

Utiliser « Le dossier Sciences et métiers » et « Les métiers au cœur de la classe » en cours de mathématiques

Des fiches « élèves », des fiches « professeurs », des cartes mentales dynamiques assurent une diversité d'entrées pour les usagers (élèves, professeurs, psychologues de l'éducation nationale, parents). Les activités proposées incluent des questions sur le métier (compétences, contextes et formations) et des jeux de rôles sur ce même métier sollicitant des connaissances, des savoir-faire et des compétences du socle.

Pistes d'utilisation des fiches métiers

La présentation tabulaire (ci-dessous) marque formellement le lien entre les mathématiques et les métiers. Les élèves découvrent les métiers tout en acquérant de nouvelles connaissances et compétences mathématiques.

FICHE MÉTIER	CONTENUS COMPÉTENCES MATHÉMATIQUES DOMAINES DU SOCLE D1, D2, D3, D4, D5	COMMENTAIRES
CYCLE 4		
Infographiste	Programme de construction Symétrie, translation, rotation et homothétie **Chercher, Modéliser, Représenter, Communiquer** **D1 et D4**	Demander aux élèves de créer un logo pour le collège permet d'opérationnaliser les symétries, les rotations et de conforter l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, tout en développant l'esprit créatif et en découvrant le métier d'infographiste.

FICHE MÉTIER	CONTENUS COMPÉTENCES MATHÉMATIQUES DOMAINES DU SOCLE D1, D2, D3, D4, D5	COMMENTAIRES
Agent de maintenance nautique	Surfaces, aires. Proportionnalité Pourcentage Chercher, Représenter, Calculer, Communiquer D1, D4 et D5	Faire un devis pour la rénovation d'un bateau, comme l'agent de maintenance nautique, permet de mobiliser des connaissances sur les surfaces, les aires, la proportionnalité et permet de travailler les compétences « chercher, calculer, communiquer ». C'est l'occasion de découvrir le vocabulaire des devis (Prix HT, prix TTC, TVA, escompte). Lorsque, de plus, le propriétaire du bateau est anglais, cela permet aux élèves de percevoir l'action réciproque des disciplines et de fédérer les apprentissages.
Logisticien/ne	Dénombrement. Utilisation du tableur Algorithmique **Chercher, Raisonner, Calculer** **D1 et D4**	Proposer à un élève de se glisser dans la peau d'un(e) logisticien(ne), c'est dans un premier temps l'amener à pratiquer la logique. C'est aussi dans un deuxième temps, l'amener à structurer sa pensée grâce au dénombrement, au tableur, voire à l'algorithmique.
Commercial(e)	Calculs : durées, pourcentage Statistique Tableur **Chercher, Raisonner, Calculer, Communiquer** **D1, D3 et D4**	Demander aux élèves d'organiser la journée d'un(e) commercial(e), c'est réinvestir des connaissances mathématiques (calculs de durées, pourcentages, gestion de données) tout en pratiquant une démarche scientifique ancrée dans le réel puisque l'étude de marché (demande, budget, rentabilité, concurrence) et la consultation de véritables sites internet est nécessaire à la prise de décision.
Pompier/ère	Pourcentage Repérage dans le plan Grandeurs et mesures Usage d'un logiciel **Chercher, Raisonner, Calculer, Communiquer** **D1, D2, D3, D4 et D5**	La fiche « Pompier/ère » qui peut être traitée avec des disciplines connexes, permet, à partir d'une tâche complexe, d'extraire l'information utile, de planifier un itinéraire, d'effectuer des conversions, des calculs simples, de valider ou d'invalider des réponses. Pour certains élèves, le métier de pompier attire. Aussi, leur montrer que la maîtrise de connaissances et de compétences mathématiques est nécessaire pour réussir cette formation peut être un atout pour remotiver certains élèves « décrocheurs » et préparer les autres à l'évolution des sujets de brevets.
Responsable de communication	Statistique **Chercher, Modéliser, Représenter, Communiquer** **D1, D2, D3, D4 et D5**	Se mettre dans la peau d'un « Responsable communication » permet à l'élève de modéliser un problème, de pratiquer une démarche scientifique sollicitant des outils numériques, puis de communiquer et de convaincre. S'imaginer communiquer par la presse, les réseaux sociaux, des plaquettes dans plusieurs langues pour s'adapter à une clientèle étrangère peut être très motivant pour les élèves.

FICHE MÉTIER	CONTENUS COMPÉTENCES MATHÉMATIQUES DOMAINES DU SOCLE D1, D2, D3, D4, D5	COMMENTAIRES
Conseiller/ère Espace Info-Energie	Trigonométrie, aires et volumes Egalité Pythagore Grandeurs quotients Pourcentages, proportionnalité **Chercher, Modéliser, Communiquer** **D1, D2, D3, D4 et D5**	Conseiller des particuliers souhaitant faire des économies d'énergie permet, grâce au nombre de situations rencontrées et aux aides prévues, de proposer des révisions personnalisées à chaque élève, en abordant divers points du programme (trigonométrie, aires et volumes, grandeurs quotients, pourcentage, proportionnalité…). Ceci tout en fixant à tous des objectifs communs tel que pratiquer une démarche scientifique, se sensibiliser au développement durable et à la dimension financière du projet, communiquer.
Ingénieur/e environnement	Pourcentage Proportionnalité Cylindre, aire et volume Grandeurs, unités Solides, aires **Chercher, Raisonner, Calculer, Communiquer** **D1, D2, D3 et D4**	Jouer le rôle d'Ingénieur environnement, permettra à l'élève d'aborder plusieurs notions : les pourcentages, la proportionnalité, les différentes unités, les solides, les aires. Ce travail peut être proposé dans sa globalité aux élèves, avec un support papier ou sur tableur, mais il peut aussi être investi de manière différenciée et coopérative. En fonction des besoins repérés, les élèves pourront être dirigés vers une partie de la question et ensemble, ils construiront un point de vue global tout en insistant sur les notions de développement durable.
Professeur/e de mathématiques	**Niveau cycle 4 ou Seconde** Contenus mathématiques au choix **Chercher, Calculer, Communiquer** **D1 et D2**	Construire des apprentissages chez les élèves, voir chaque enfant ou adolescent heureux de réussir à résoudre un problème, émerveille à chaque fois le professeur de mathématiques. La fiche métier propose de corriger des copies, de préparer des exercices avant les séances, de créer une évaluation. Trois activités autour des notions d'aire et de périmètre sont proposées. C'est l'occasion pour les élèves de réinvestir ces grandeurs en prenant des initiatives, en utilisant un logiciel de géométrie dynamique. Ce travail offre aux élèves de troisième ou de seconde un réinvestissement pertinent. Il est à noter que cette fiche peut facilement être réadaptée par les enseignants. Il suffit simplement de changer de notions, de trouver une copie à corriger significative et un exercice à préparer.
LYCÉE		
Ingénieur/e en aéronautique	**Niveau Seconde** Gestion de données, conversion **Chercher, Calculer, Communiquer**	Préparer un diaporama, présenter à des interlocuteurs français des données techniques en anglais d'un avion nécessitent de savoir effectuer des conversions, de lire des données liées à des fiches techniques. A l'oral, il faut pouvoir persuader, convaincre. Communication, rigueur, esprit critique sont des points forts à maitriser en tant qu'ingénieur/e.

FICHE MÉTIER	CONTENUS COMPÉTENCES MATHÉMATIQUES DOMAINES DU SOCLE D1, D2, D3, D4, D5	COMMENTAIRES
Chargé/e de clientèle banque	**Niveau Seconde, Première** Gestion de données Pourcentages **Chercher, Modéliser, Représenter, Calculer, Raisonner, Communiquer**	Assurer le rôle de « chargé/e de clientèle banque » permet à l'élève de se familiariser avec le monde de la banque, de découvrir quelques notions économiques (taux d'endettement, capacité de remboursement) en faisant appel à des connaissances mathématiques simples comme les pourcentages. L'élève est encore amené à jouer un rôle plus commercial en développant des arguments, en structurant ses propos pour vanter les avantages d'un prêt étudiant.
Statisticien/ne	**Niveau Seconde** Caractéristiques de position et de dispersion, représentations graphiques, échantillonnage, intervalle de fluctuation **Chercher, Modéliser, Raisonner, Communiquer**	Demander aux élèves de mener une enquête statistique, d'analyser et de traduire les résultats en séries et graphiques statistiques adaptés permet de travailler naturellement et de préparer les leçons de statistiques du programme de seconde (caractéristiques de position et de dispersion, représentations graphiques, échantillonnage et intervalle de fluctuation). Ceci, dans une démarche scientifique développant l'autonomie et permettant une synthèse (sous forme d'article de magazine) permettant de développer la communication à l'écrit.
Architecte	**Niveau Première** Fonctions, équations polynomiales, dérivées et variations **Chercher, Modéliser, Raisonner, Communiquer**	Se mettre dans la peau d'un architecte en réalisant progressivement le bilan thermique d'une maison individuelle, selon l'avancée du programme (fonctions de référence et représentations graphiques, équations polynômiales, dérivées et variations), permet à l'élève de mettre en œuvre une démarche scientifique, de développer son autonomie, la communication écrite et orale tout en développant l'utilisation des outils informatiques (tableur/grapheur, calcul formel).
Médecin légiste	**Niveau Terminale** Fonctions. Probabilités **Chercher, Représenter, Raisonner, Communiquer**	Se glisser dans la peau d'un médecin-légiste, métier porteur, c'est d'abord savoir exploiter des données sur un graphique très particulier (nomogramme), avec logique et discernement. Ce travail d'investigation peut se prolonger dans le cadre de prises de décisions en lien la notion d'échantillonnage. On développe ainsi la démarche scientifique (investigation), en autonomie, avec synthèse (communications écrites et orales).

Un retour d'expérience sur l'utilisation de deux fiches (en 5e et 3e)

Infographiste et agent de maintenance nautique, mise en œuvre par un professeur formateur.

« Souvent en formation, lorsqu'un professeur stagiaire demande par quelle fiche il faut commencer, la réponse est « celle qui vous correspond le plus » ou « celle qui correspond le plus à votre classe ». Parmi toutes les fiches disponibles, certaines peuvent être ressenties par l'enseignant comme trop complexes car éloignées des connaissances et compétences de ses élèves. Paradoxalement, ces mêmes fiches peuvent être plébiscitées par certains élèves car elles répondent à leurs attentes.

La fiche Infographiste a été donnée plusieurs fois en classe de 5ème. Elle fait partie des premières fiches métiers créées par une équipe de professeurs de Dunkerque dont je faisais partie (Académie de Lille). Pour bon nombre de mes élèves, ce fut souvent leur première fiche métier. Cette fiche est tout d'abord démarrée en classe : on échange et on essaie de comprendre ce qui est attendu. Sa présentation, sa proximité avec le quotidien des élèves facilitent leur implication... Le travail se poursuit en hors classe par la recherche d'axes et de centres de symétrie de logos. On découvre, via Internet, les ambigrammes et on réalise un logo pour le collège. En lien avec le cours de géométrie, cette fiche permet de voir autrement les transformations (il ne s'agit pas ici de la géométrie de la démonstration mais de celle de la création). La dernière partie « Création du logo du collège » permet de faire particulièrement travailler la créativité chez les élèves.

Voici ci-contre le logo d'une élève, choisie une certaine année scolaire, pour la présentation des énoncés des devoirs communs de 3ème.

J'ai souvent remarqué, lors du travail sur cette fiche, le plaisir et l'émulation entre les élèves. Bien rares sont les devoirs non rendus et bien rares sont ceux qui n'ont pas été faits avec soin. Pour l'enseignant, la fiche ne présente aucune difficulté, elle propose juste une approche différente et complémentaire du cours.

La seconde fiche « Agent de maintenance nautique » a été donnée en classe de 3ème. Elle nécessite là aussi un travail préliminaire en classe, si possible en salle pupitre. Cette fiche est particulièrement intéressante car elle répond assez bien aux attentes que l'on a pu repérer dans l'évolution du DNB. Elle peut être donnée n'importe quand puisqu'elle permet de revenir sur les notions d'aires, de proportionnalité et de travailler les compétences « chercher », « calculer », « communiquer »... Lors de la séance, le rôle d'enseignant évolue. Plus qu'un transmetteur de savoirs, il est là pour faire des liens, épauler, encourager... Les élèves s'engagent en autonomie dans différentes démarches et y prennent plaisir. Le devoir s'effectuant avec le collègue d'anglais, permet aux élèves de prendre conscience que pour de nombreux métiers, la maitrise d'une langue étrangère et de compétences mathématiques sont nécessaires.

Les deux fiches peuvent être adaptées, découpées, utilisées telles quelles... Elles ne demandent pas de travailler plus mais autrement. En proposant deux ou trois travaux de ce type par trimestre, on peut espérer ainsi aider les élèves à mieux cerner les enjeux de l'orientation. En plaçant les documents, productions, recherches dans l'espace FOLIOS, cela permet de garder une trace de la réflexion qui pourra être utile pour l'élève et pour les enseignants. »

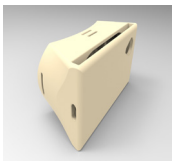
Utiliser les ressources pédagogiques de Pro2science, lors des Enseignements Pratiques Interdisciplinaires au collège ou en Accompagnement Personnalisé au Lycée

Les élèves sont amenés à réfléchir sur des objets de la vie quotidienne, porteurs d'innovation sociale (maison connectée, tablette tactile, robot suiveur de ligne, montre et bracelet connectés, leds, imprimante 3D, casque de réalité virtuelle...), pour établir, comme le propose le parcours Avenir, des liens naturels entre les disciplines enseignées et la découverte du monde économique et professionnel. Les approches interdisciplinaires et la démarche

expérimentale sont valorisées, répondant en particulier pour le collège, aux principes des enseignements pratiques interdisciplinaires (EPI). Quatre EPI sont proposés, sur les thèmes Corps, santé, sécurité, Monde économique et professionnel et Sciences, technologie et société. De fait, les élèves découvrent et repèrent comment se croisent les savoirs disciplinaires et les compétences scolaires, mobilisés au quotidien dans l'entreprise.

Quelques retours d'expériences

OBJET	CONTENUS COMPÉTENCES MATHÉMATIQUES DOMAINES DU SOCLE D1, D2, D3, D4, D5	COMMENTAIRES ET RETOURS D'EXPÉRIENCES
	CYCLE 4	
Maison connectée	Statistique Aires et Volumes **Chercher, Modéliser, Représenter, Raisonner, Calculer, Communiquer** **D1, D2 et D4**	Mené dans trois classes lors d'une expérimentation des EPI, ce projet a permis de rassembler quatre disciplines autour d'une même problématique : « Comment imaginez-vous votre maison en 2035 ? ». En français, les élèves ont laissé libre cours à leur imagination et ont écrit un texte numérique qui a pu être exploité en mathématiques. L'objectif a été de trouver des objets du futur et de créer un questionnaire statistique autour du sujet. Les professeurs ont choisi quelques moments de co-animation en mathématiques et technologie. Dans ce cadre, les élèves ont croisé les disciplines en calculant la compacité selon la forme de leur maison et en recherchant les avantages de divers matériaux de construction, l'objectif étant de sélectionner parmi quatre types de maisons proposées, une maison à économie d'énergie et respectueuse de l'environnement. En relation avec la découverte des métiers, les élèves ont visité deux lycées dont les filières technologiques et professionnelles étaient en lien avec la construction, les matériaux et objets de demain. Ils ont également travaillé sur la fiche métier Architecte.
Tablette tactile	Acquérir et approfondir des connaissances disciplinaires **D2, D3 et D4**	Le projet « tablette » s'est concrétisé lors d'une expérimentation des EPI rassemblant toutes les disciplines, autour des objectifs de formation suivants : « J'apprends à connaître cet objet de mon quotidien, sa technologie, ainsi que son impact sociétal et environnemental. J'apprends à l'utiliser pour approfondir mes connaissances disciplinaires. J'apprends à utiliser de nombreuses applications que je partage avec mes camarades. Je rencontre des professionnels et je m'intéresse aux métiers du futur. »

OBJET	CONTENUS COMPÉTENCES MATHÉMATIQUES DOMAINES DU SOCLE D1, D2, D3, D4, D5	COMMENTAIRES ET RETOURS D'EXPÉRIENCES
Impression 3D d'une coque de clé USB	Réalisations et modélisation de patrons Volumes **Chercher, Modéliser, Calculer** **D4**	Le travail effectué en mathématiques dans ce projet est basé sur la réalisation d'une coque de clé USB par le choix d'une forme géométrique adaptée, la réalisation d'esquisses et la production d'un objet. Les pratiques pédagogiques favorisent le travail en groupe et la co-animation.
	LYCÉE	
Casque de réalité virtuelle	Niveau première STI2D Statistiques Informations chiffrés pour une étude de marché **Chercher, Modéliser, Calculer, Raisonner, Communiquer**	A partir du modèle carton commercialisé, il s'agit d'imprimer un casque de réalité virtuelle  Les activités proposées relèvent de la « pédagogie de projet », avec l'avantage de permettre aux élèves d'apprendre de leurs erreurs. Pour accompagner la progression des élèves, dans les objectifs transversaux et disciplinaires du projet, différents outils ont été conçus : - un carnet de bord, un cahier de compte-rendu d'activités pour les élèves - un vade-mecum qui intègre le parcours Avenir et un tableau de suivi pour le professeur. L'application « Plickers », pour smartphones (Androïd et IOS) a offert aux enseignants un relevé pratique, rapide et efficace des progrès des élèves, en temps réel lors des points d'étape.

Utiliser les ressources pédagogiques produites pour le lycée professionnel

Les situations choisies sont en lien avec des spécialités de baccalauréats professionnels. Pour chaque situation identifiée, une problématique est définie, permettant la pratique d'une démarche scientifique tout en restant pertinente avec la réalité technologique et professionnelle. Les exemples présentés, éventuellement adaptés ou accompagnés de quelques « coups de pouce », sont transférables au collège. La commande de colis, la vérification de verticalité, l'arrosage automatique d'un jardin ou l'implantation d'une maison mobilisent toutes les compétences mathématiques, tout en ne sollicitant que des connaissances de base sur les grandeurs et mesures, et sur la géométrie.

Construire une fiche « parcours Avenir »

Pour ce faire, plusieurs démarches sont possibles.

1. Consulter les sujets des épreuves d'examens des matières technologiques.
   Des exemples de tels sujets où les mathématiques sont présentes, sont trouvables en cherchant dans la base nationale des sujets d'examens de l'enseignement professionnel.

   Deux exemples issus de la base nationale des sujets d'examens de l'enseignement professionnel :
   - Epreuve EP1 : BEP. Techniques du froid.
   - Epreuve EP1 : BEP Electrotechnique.

   L'épreuve EG2 de mathématiques et sciences physiques peut aussi être consultée.
   Les sujets étant ici très guidés, il faut les réécrire avec une vraie situation-problème.
2. Profiter éventuellement de visites de stage ou d'entreprises pour récupérer de la documentation technique utilisée par les professionnels. Beaucoup de documents sont directement exploitables (factures, données statistiques, courbes, abaques, schémas).

3. Exploiter les documents techniques mis à disposition par les professeurs d'enseignement professionnel lors de visite dans les LP voisins. Les exemples ci-après sont issus des métiers de la mode et du vêtement et des métiers du bâtiment.

   - Modéliste
   - Coffreur Brancheur
   - Technicienne en installation de systèmes énergétiques et climatiques
   - Entrepreneur en maçonnerie

Aller plus loin

Produire ses propres fiches métiers

C'est l'occasion pour le professeur de satisfaire sa propre curiosité, de s'ouvrir à la réalité des métiers, d'assouvir son envie de créer des liens entre sa discipline et le monde économique et professionnel. Les rencontres et échanges avec des professionnels permettent à l'enseignant de construire des situations d'enseignement et d'apprentissage dans un cadre pédagogique lié au métier visé, en travaillant à partir de situations professionnelles réelles ou construites, ou de projets professionnels, culturels ou artistiques. Cela permet de diversifier la formation des élèves. Ces rencontres peuvent s'installer lors de forums, ou lors d'impulsions locales en partenariat avec les directeurs de centre d'information et d'orientation (CIO).

Amener les élèves à produire (des articles, un journal, une vidéo) à partir d'une fiche métier

Les métiers au cœur de la classe : journaliste

Des travaux de ce type peuvent s'inscrire dans le cadre d'enseignements pratiques interdisciplinaires Lettres-mathématiques comme le décrit la fiche professeur téléchargeable en bas de page correspondant au métier de « Journaliste ». Des travaux d'élèves, articles et vidéo, provenant d'un projet mené au collège Lucie Aubrac de Dunkerque sont également visibles en bas de page sur le site de l'ONISEP.

- Les élèves ont créé un article pour le journal des sciences. Ils devaient faire une synthèse des données statistiques obtenues par l'organisme IPSOS. Ils ont ainsi découvert la collecte de données, le calcul de fréquences et de moyenne. ils ont exercé un regard critique sur les informations récoltées. Ajouter le métier d'infographiste pour la création d'un article de journal permet par ailleurs d'augmenter la palette des représentations.

- Des échanges avec un journaliste ont également suscité l'envie chez les élèves de vivre ce métier, en tournant une émission télévisée du style « Apostrophes ». Deux professeurs (Lettres, Mathématiques) en ont fait un levier pour améliorer la réussite de leur public et ainsi contribuer à la progression des axes du contrat d'objectifs de leur établissement (maîtriser la langue orale et écrite ; acquérir une démarche scientifique ; aller à la rencontre de l'autre et du monde).

Les métiers au cœur de la classe : Créateur/trice, grossiste et négociant/e en meubles

Il s'agit d'un projet mené par un professeur de maths-sciences dans un lycée professionnel.

Après échanges avec un professionnel « menuisier-ébéniste, créateur et négociant en meubles », un professeur a développé une fiche métier initiale en associant d'autres disciplines pour créer une activité complète de l'enseignement général lié aux spécialités, adaptable au cycle 4. Le professionnel lui a relaté des problèmes de fabrication de meubles avec un sous-traitant croate, suite à un séchage particulier du bois. La problématique proposée aux élèves est d'élaborer une stratégie commune avec ce partenaire croate afin de livrer des meubles sans défaut dans les temps impartis.

Voir le détail de la démarche proposée.

Rendre mes élèves autonomes dans la construction de leur parcours Avenir

Pour favoriser l'autonomie des élèves et leur prise d'initiative, l'enseignant va contribuer à faire en sorte qu'ils deviennent non seulement acteurs mais aussi auteurs de leur parcours.

Pour ce faire, dans une démarche de projet, le professeur propose aux élèves :

- de créer des fiches métiers à l'interne des cours de mathématiques ;
- de s'inscrire dans un projet existant dans l'établissement ;
- d'exploiter l'actualité, une rencontre…

Aider les élèves à créer des fiches métiers dans le cadre des cours de mathématiques

Les élèves étudient un événement, observent des professionnels pour aboutir à une production : une capsule vidéo, un descriptif métier ou une fiche métier. Cette démarche permet de les rendre enquêteurs, acteurs, auteurs et de développer la prise d'initiatives.

Ci-après sont présentés trois projets menés en classe.

Réaliser une capsule vidéo pour aider aux apprentissages, à la mémorisation, en quatrième

Dans un premier temps, les élèves ont été habitués à travailler en classe ou à la maison sur des exercices Maths et Métiers. Puis ils ont créé, par petits groupes, des capsules vidéo mettant en lien un métier et une situation mathématique. Ils les présentent ensuite à l'ensemble de la classe. Ce travail est mené dans le cadre de l'accompagnement personnalisé.

L'élève développe des outils de communication, d'expression et de travail collaboratif. Il se constitue par ailleurs des outils personnels (traces écrites, numériques,) dont il peut se servir pour s'entraîner, réviser, mémoriser. Cela répond à des attentes des domaines 1 et 2 du socle.

Exemples de capsules vidéo créées par les élèves

- Vidéo : Calculer le volume d'une boîte de conserve
- Vidéo « problème » : trouver le prix d'un vêtement en soldes
- Vidéo « problème » : retrouver le prix d'un vêtement avant réduction.

Représenter un métier en réalisant des pavés droits, en sixième

Il a été demandé aux élèves de construire un « Monsieur » ou une « Madame » à l'aide de pavés droits exerçant le métier qui les intéressait. Une activité de ce type, dans l'esprit des « Paper Toys », permet d'une part de travailler les compétences « Chercher, Modéliser, Représenter, Communiquer » et d'autre part d'aborder l'élément « Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, représenter, construire quelques solides » du programme, pour préparer l'attendu de fin de cycle associé. La description du métier choisi est demandée aux élèves, développant la maîtrise de la langue française.

Voir le diaporama de présentation du projet.

Création d'une fiche « styliste » pour apprendre autrement les grandeurs et mesures, la géométrie dans l'espace, en troisième

Voir la fiche métier styliste et la fiche synoptique du projet.

Au cours de ce projet, les élèves ont découvert des métiers en interviewant des professionnels (commercial, couturier, styliste, directeur). Puis un concours pour la création d'une robe de mariée a été organisé en classe. Il a fait appel à la prise de mesure sur un mannequin choisi dans la classe, la modélisation d'une robe par des solides, les représentations en perspective puis la création de patrons. Les élèves ont ainsi découvrent par eux-mêmes une partie du travail de styliste. La recherche a été suivie d'une interview du professionnel afin de vérifier si leurs démarches collaient à la réalité du métier et pour d'en apprendre plus en ce qui concerne la formation, les évolutions… Dans le cadre d'un EPI, des liens pourraient être faits avec d'autres disciplines et un projet similaire pourrait aboutir à la réalisation d'une fiche métier, de la robe et à l'organisation d'un défilé.

Impulser et fédérer l'interdisciplinarité

Un fait d'actualité, un événement, un lieu peuvent permettre d'amorcer une production et une réflexion sur le parcours Avenir. Il s'agit de plonger les élèves dans un fait du quotidien. Cette entrée motivante permet d'enseigner autrement des contenus de programmes et de développer des compétences mathématiques. Pour construire les apprentissages sélectionnés, le professeur privilégie la démarche de projet aboutissant à des productions individuelles ou collectives. Il exploite avec ses collègues disciplinaires ou avec des collègues d'autres disciplines des actions réciproques (actions de formation, d'évaluation ou d'auto-évaluation). Cette démarche développe ainsi des liens autour du projet et favorise la continuité des apprentissages.

Ci-après sont présentés trois projets menés en classe.

Construire des apprentissages à travers le prisme de l'entreprise
Niveau fin de cycle 4

Ouvrir une porte sur le monde économique et professionnel et créer une mini-entreprise au collège peut constituer une expérience particulièrement enrichissante. Avec un partenariat associatif, il est possible de permettre aux élèves de mettre en place leur propre mini-entreprise. Chaque étape de la création d'une mini-entreprise permet aux élèves de développer des compétences et de consolider leurs différents parcours. Chercher un nom pour l'entreprise, créer son logo, permettent à l'élève de développer la créativité et de nourrir son parcours d'éducation artistique et culturel. Définir les valeurs et la politique de l'entreprise, débattre entre pairs pour arriver à des décisions collégiales, exprimer et défendre son point de vue, sont des démarches qui alimentent son parcours citoyen. De même, définir les métiers et les compétences nécessaires au bon fonctionnement de l'entreprise, élaborer des fiches métiers, écrire des lettres de motivation et postuler sur les postes de la mini-entreprise sont quelques activités qui renforcent le parcours Avenir. En géométrie, par exemple, on peut travailler avec les formes du plan et de l'espace pour créer le logo, dessiner et représenter l'objet à produire. Il est facile d'établir un cahier des charges, d'étudier les coûts, de faire des appels de fond, de commercialiser un objet en utilisant les nombres, en traitant des données, et en résolvant des problèmes de proportionnalité.

Un exemple de méthodologie de travail : de la mini entreprise à l'EPI.

Enseigner à travers le prisme d'un projet interdisciplinaire « Ma ville en 2030 »
Niveau Première STI2D

Ce travail a été mené dans le cadre de l'Accompagnement Personnalisé, en interdisciplinarité au lycée, en première STI2D, spécialité Architecture et Construction (AC). Dans la mise en œuvre du programme de mathématiques de cette section, il est opportun de construire une progression annuelle intégrant des activités en lien avec le projet (architecture et trigonométrie, développement durable et échantillonnage…).

Voir la vidéo de présentation du projet.

Construire des apprentissages dans le cadre d'un projet sur le triathlon
Niveau cycle 4

Au collège, dans le cadre d'un Projet sur le triathlon mené au collège en lien avec les JO de Londres et le triathlon de Dunkerque, les élèves se sont mis dans la peau d'un athlète de haut niveau et d'un journaliste sportif en interviewant en anglais un triathlète célèbre. Compétences mathématiques, proportionnalité, grandeurs-quotients ont été travaillées, de manière différenciée en intégrant la temporalité des apprentissages et des attendus de fin de cycle « Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées », « Interpréter, représenter et traiter des données » et « Résoudre des problèmes de proportionnalité ».

Voir le diaporama de présentation du projet.

Niveau lycée

Au lycée, le même thème a été abordé par des élèves de première dans le cadre d'un TPE. Leur problématique était : Pourrions-nous devenir des « Ironmen » parfaits ? Les réflexions sur l'entraînement, les notions de résistance à l'effort, de nutrition et l'interview d'un triathlète dunkerquois reconnu les ont mis dans la peau de journalistes et de sportifs de haut niveau. Par cet intermédiaire, les notions de suites, de fonctions ont été travaillées.

Des algorithmes ont été élaborés et un site internet a été développé. Ce travail s'est intégré, dans une action académique, reliant les métiers aux mathématiques lors de la semaine des Maths 2016, dont le thème était « Maths et sports ». Les élèves qui ont élaboré ce TPE avaient pour objectif futur de travailler dans les métiers du sport (Médecin sportif, kinésithérapeute, professeur de sport)

La construction d'un parcours peut ainsi générer des pistes, des problématiques pour les Travaux Personnels Encadrés et l'écriture de mémoires.

Assurer une continuité et une progressivité dans la construction du parcours Avenir de chaque élève

Tirer profit du numérique, de l'application FOLIOS

L'application FOLIOS permet une mise en cohérence du parcours de l'élève, elle l'aide à articuler les étapes de projets et à devenir acteur de ses choix. Elle accompagne l'élève tout au long de sa scolarité et cette continuité contribue à la personnalisation des parcours. Elle valorise les expériences et compétences scolaires et extrascolaires des élèves.

L'enseignant accompagne et se porte garant de la démarche, l'élève restant maître des contenus.

Un carnet de bord mérite d'être proposé à l'élève. C'est une sorte de mémoire écrite des travaux réalisés, permettant à l'élève de visualiser sa propre évolution en liaison avec les différents parcours, à épingler sur FOLIOS. Ce carnet permet :

- à l'élève et aux encadrants de prendre connaissance de ce qui a été réalisé ;
- d'y faire figurer toutes sortes de conseils, commentaires, croquis, d'exemples de réussites et de «ratés», et de manière générale de toute trace de progression ;
- à l'élève de clarifier ce qu'il fait, dans un esprit de synthèse, de montrer qu'il comprend la teneur et l'intérêt des travaux effectués et qu'il perçoit les problèmes inhérents à leur réalisation.

Inscrire ma discipline dans le parcours Avenir, mutualiser avec mes collègues

Les équipes pédagogiques doivent réfléchir à une intégration des scénarii contribuant à la construction du parcours Avenir, par niveau (de la sixième à la terminale, voire au post Bac). Ils doivent en délimiter les cadres de mise en œuvre (cours disciplinaires, AP, EPI, EGLS, EE), les objectifs à atteindre et les modalités de suivi, d'évaluation. Les visites d'entreprises, forums, stages, concours, salons, initiatives personnelles, ressources pédagogiques... sont autant d'objets d'études qui peuvent s'y inscrire, de manière obligatoire pour tous les élèves ou selon des choix personnels. Afin de mettre de la cohérence entre les disciplines, les dispositifs et

l'évaluation, des outils de suivi peuvent être créés dans les établissements et discutés en conseil pédagogique afin d'assurer une réelle progressivité dans la formation des élèves à leur orientation.

Les échanges entre les équipes éducatives, pédagogiques, les psychologues de l'éducation nationale (PsyEN) et les partenaires peuvent ainsi être facilités. Le support suivant, complété par l'élève et déposé sur l'application FOLIOS, peut être l'amorce d'une réflexion collective. Il peut permettre d'observer les ruptures et les continuités. Une phase de régulation avec un regard interdisciplinaire doit permettre de poursuivre la construction des parcours Avenir, qui pourront s'étoffer en laissant ainsi une marge d'initiative aux élèves.

NOM, PRÉNOM DE L'ÉLÈVE MON PARCOURS AVENIR							
Niveaux		6ème		....		terminale	
Disciplines							
Objectifs du parcours Avenir travaillés							
Projets, visites, forums, stages, concours, salons, initiatives personnelles, ressources pédagogiques...	Cadre de mise en œuvre (cours, EPI, AP, temps forts...)						

Mettre l'évaluation au service des apprentissages de mes élèves

Intégrer les besoins collectifs et individuels

Contribuer à la construction du parcours Avenir permet souvent de répondre aux axes des contrats d'objectifs des établissements, dans lesquels l'orientation, la découverte du monde économique et professionnel, la rencontre avec des professionnels sont généralement mentionnés. Ainsi, les équipes peuvent travailler à faire progresser leurs élèves sur des besoins repérés, fléchés à la fois sur des indicateurs « établissement » et sur des acquis plus disciplinaires.

Intégrer l'évaluation formative

Il est important de s'appuyer sur les évaluations formatives pour aider les élèves à devenir acteurs et co-auteurs de leurs apprentissages, à développer leur autonomie en identifiant leurs points forts et leurs points faibles. In fine, il s'agit de favoriser l'équité, de lutter contre le décrochage scolaire et d'amener chaque élève à construire les compétences nécessaires pour se former et s'insérer dans la société.

Ces évaluations, facilitent pour les élèves l'analyse de leurs productions, levier en effet motivant de remise au travail des plus fragiles, puisqu'elle permet de donner du sens à leurs apprentissages et de renouer ainsi avec l'école.

Deux outils partagés :

- la grille d'auto-évaluation à partager avec le professeur, intégrée dans les fiches métiers « élèves » de l'Onisep.
- FOLIOS : l'application permet à l'élève de valoriser des savoirs informels et formels, et d'en percevoir l'utilité, ce qui constitue un levier déterminant de réussite et de prévention du décrochage scolaire. L'évaluation des traces écrites qui y sont consignées permet d'être attentif aux différentes composantes de la dynamique de chaque élève.

Mémento

Pour conclure, une démarche professionnelle intéressante, à mettre en place en équipes pédagogiques ou disciplinaires, peut se décliner en plusieurs phases.

Regards croisés sur les besoins des élèves

- qui peuvent être disciplinaires ou interdisciplinaires ;
- qui s'outillent d'observables (FOLIOS élève, Projet d'établissement/Axes du contrat d'objectifs, socle et compétences disciplinaires et interdisciplinaires, évaluations diagnostiques, ...) ;
- qui se déclinent en objectifs.

Amorce d'un scénario pédagogique

- qui intègre les outils de l'Onisep, d'autres outils ou méthodes d'apprentissage ;
- qui décline les grandes lignes de la formation des élèves (supports susceptibles d'être utilisés, progressivité dans la construction du parcours, intégration dans les apprentissages disciplinaires ou interdisciplinaires, usages pertinents du numérique, modalités, cadre de mise en œuvre, calendrier, concertations éventuelles, mesure des effets, ...) ;
- qui articule et met en cohérence les différents enseignements (disciplinaires, EPI, AP, EGLS, EE) avec le Parcours Avenir ;
- qui évolue en fonction des apprentissages des élèves ;
- qui accompagne chaque élève (gestion des difficultés, des erreurs) ;
- qui intègre une évaluation au service des apprentissages et des différenciations pédagogiques.

Tenue d'un carnet de bord élève

- qui s'intègre dans le FOLIOS de chaque élève ;
- qui explicite les objectifs à atteindre de manière personnalisée, et des auto-évaluations (connaissances, compétences) ;
- qui contient des traces écrites, et des accompagnements personnalisés (travail prévu,

travail réalisé, difficultés rencontrées, solutions envisagées ou apportées, prévision des tâches effectuées) ;
- qui permet une évaluation formative de chaque élève.

Bilan sur l'efficacité du scénario, propositions éventuelles de régulation et mutualisation des travaux

Ressources complémentaires

- Pour aller plus loin : Genèse et développement du kit pédagogique "Sciences et métiers" (conférence enregistrée lors du 1er Salon virtuel de l'Onisep en octobre 2014).
- Zoom sur les métiers des mathématiques, une brochure produite par l'ONISEP en partenariat avec les sociétés savantes de mathématiques : la Société mathématique de France (SMF), la Société de mathématiques appliquées et industrielles (SMAI), la Société française de statistique (SFdS), la Société informatique de France (SIF), l'association Femmes & Mathématiques.
- Mathématiques première, compétences et évolution des pratiques, Marie Christine Obert, Florian Odor, Olivier Wantiez, Réseau CANOPE Octobre 2015.
- Mathématiques, compétences et évolution des pratiques, Classe de terminale, Marie Christine Obert, Micheline Bilas, Olivier Wantiez; Réseau CANOPE Mai 2014 2015.
- La base nationale des sujets d'examens de l'enseignement professionnel, CRDP Montpellier.
- Le référentiel du parcours Avenir
- Parcours Avenir - Guide pratique à destination des chefs d'établissements

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Ressources transversales

Une ressource produite dans le cadre de la stratégie mathématiques en partenariat avec le réseau des IREM.

irem

Mathématiques et quotidien

Introduction

Cette ressource, fruit d'un partenariat DGESCO – IGEN – IREM de Caen – IREM de Rouen, a été réalisée de concert par des professeurs du secondaire, des enseignants-chercheurs et des inspecteurs. Elle s'inscrit dans le cadre de la « Stratégie mathématiques ». Un des trois défis à relever par ce dispositif consiste à proposer une image rénovée des mathématiques au profit d'une attractivité renforcée de la discipline. Pour répondre à cette ambition, ce document propose de partir de situations actuelles sortant du cadre strict de la classe car ancrées dans l'incroyable variété du quotidien des élèves ou de leur famille. Le caractère authentique et concret de ces situations favorise l'installation d'une véritable dynamique en permettant aux élèves :

- de s'approprier plus facilement un contexte, ferment d'activité mathématique ;
- de donner davantage de sens à l'enseignement des mathématiques ;
- de faire percevoir aux élèves le rôle indispensable des mathématiques, aussi bien pour la compréhension de certains phénomènes que pour la résolution de problèmes.

Les situations présentées sont ouvertes afin de favoriser la construction des compétences mathématiques (chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner, communiquer) et transversales. Les deux premières sont détaillées : énoncé, scénario, analyse didactique, productions d'élèves. Il s'agit de proposer une exploitation envisageable à visée pratique et opérationnelle qui, en aucun cas, ne doit être considérée comme un modèle à reproduire tel quel. La liberté pédagogique de chaque enseignant l'autorise à faire vivre les situations, à sa convenance, au sein de sa classe. Les dernières situations sont exposées de façon beaucoup plus succincte : libre à l'enseignant d'y transposer à sa guise les réflexions plus détaillées fournies pour les deux premières.

Les annexes fournissent des compléments allant de variantes pour les activités à des prolongements pour les enseignants. Les supports numériques sont exploités sous différents registres. Cette ressource propose de nombreux prolongements par des liens vers une page spécialement dévolue aux ressources complémentaires sur le site de l'IREM de Rouen. Des vidéos tournées par leurs membres sont également proposées et certaines d'entre elles présentent un retour sur des expérimentations de ces activités menées en classe afin de mieux éclairer le propos de ce document qui se veut avant tout être un outil de réflexion.

Télécharger le fichier source au format Word

SOMMAIRE

Introduction 2
Crêpes Party 2
Le compteur d'eau 6
Le radar tronçon 8
Ticket de grattage 9
Essence ou diesel 11
Conclusion 14
Annexe 15
Bibliographie – sitographie 26

Crêpes Party

Énoncé

Pour son anniversaire, Fred veut inviter des amis à un goûter et décide de faire des crêpes.
Voici tous les ingrédients qu'il lui reste pour réaliser la recette suivante.
Combien Fred peut-il inviter d'amis ? Dans ce cas, combien de crêpes fera-t-il ?

Retrouvez Éduscol sur

RECETTE DE LA PÂTE A CRÈPES

Pour 4 personnes (12 à 14 crêpes)

- 250 g de farine
- 3 œufs
- 1/3 L de lait
- une pincée de sel
- 75 g de sucre
- 50 g de beurre fondu

Temps total : 25 min

Préparation : 10 min

Cuisson : 15 min

Repos : 0 min

Objectifs et lien avec les programmes

Cette activité vise à développer les six compétences majeures des mathématiques : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer. En effet, il s'agit d'une question ouverte, ce n'est pas une tâche simple et isolée. Plus particulièrement, elle permet de travailler les points suivants du programme de mathématiques :

AU CYCLE 3

Comprendre et utiliser la notion de fractions simples.
Élaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit.
Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.
Résoudre des problèmes mettant en jeu les quatre opérations. Sens des opérations.
Prélever des données numériques à partir de supports variés.
Reconnaître et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée.
Résoudre des problèmes dont la résolution mobilise simultanément des unités différentes de me¬sure et/ou des conversions.

AU CYCLE 4

Utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire).
Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté.
Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.
Recueillir des données, les organiser.
Reconnaître une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité.
Résoudre des problèmes de recherche de quatrième proportionnelle.

Pistes pédagogiques

Après une phase de travail individuel (15 min) pendant laquelle les élèves mettent au brouillon leurs idées, ils peuvent être regroupés par trois ou quatre pour produire une synthèse de leurs idées ; cette dernière sera projetée en classe entière lors de la séance suivante. L'objectif de cette activité est double :

- susciter le débat au sein du groupe puis avec la classe toute entière,
- étudier des stratégies déployées au cours de la rédaction de la synthèse.

Deux expérimentations sont proposées sur le site de l'IREM de Rouen, une première en cycle 4 et une deuxième en fin de cycle 3. Des productions de groupes, des analyses de déroulements effectifs, ainsi que des pistes d'institutionnalisation sur la proportionnalité y sont consultables. Notons que l'utilisation ou non de la calculatrice dans cette activité aura une incidence sur la procédure engagée par les élèves. Si celle-ci n'est pas autorisée, les élèves vont avoir recours à des méthodes de calcul mental. Si elle l'est, la division devient alors une procédure plus

accessible. Libre à l'enseignant, suivant ses attentes, de l'autoriser ou non.

Analyse a priori

Deux entrées semblent possibles :
- partir des images (en faisant une entrée dans la tâche par les « œufs ») ;
- partir du texte en langage naturel (ingrédients traités par ordre d'apparition).

Ces deux entrées ont un point commun : le beurre est en dernier.

Deux procédures sont attendues :
- pour chaque ingrédient, dire combien de fois il est possible de réaliser la recette ;
- une fois le coefficient 6 obtenu pour les œufs, appliquer à tous les autres ingrédients 6 fois la recette.

Cas du beurre
Sur l'énoncé, aucune indication de masse n'est donnée. Celle-ci sera apportée oralement par l'enseignant et nous proposons de la fixer à 250 g afin qu'il soit l'élément déterminant. L'enseignant pourra interroger le quotidien et les masses possibles de conditionnement de cet ingrédient (125 g, 250 g, 500 g). Il pourra aussi choisir de proposer, dans son énoncé, une photo où l'indication de masse est déjà apportée.

Première procédure possible : trouver par ingrédient combien de fois on peut réaliser la recette.

Œufs : cadre des entiers
- *Procédure additive* : 3 + 3 + 3 + ... = 18 ou 18 - 3 - 3- ... = 0.

On peut s'attendre à des interventions éventuelles sur la photo de type « barrer des œufs »
- *Procédure multiplicative* : 3 × 6 = 18 ou 18 ÷ 3 = 6.

La division est une notion déjà abordée au cycle 4. Elle peut être en cours d'acquisition au cycle 3. Elle n'est pas indiquée, mais peut être de « fonctionnement disponible » ici. Elle sera favorisée par l'accès libre à la calculatrice.

Lait : cadre des écritures fractionnaires
Action possible de partage en tiers sur la bouteille : $1\text{ L} = \frac{3}{3}\text{ L} = \frac{3\times1}{3}\text{ L}$ puis $2\text{ L} = \frac{2\times3}{3}\text{ L} = \frac{6\times1}{3}\text{ L} = \frac{6}{3}\text{ L}$
L'écriture fractionnaire avec notion de fraction-partage est une connaissance ancienne.
On peut aussi imaginer une procédure employant $\frac{1}{3} = 1 \div 3 \approx 0{,}33333$ (fraction-quotient).
Celle-ci sera favorisée par l'accès libre à la calculatrice.

Farine : changement de cadre d'écriture du nombre
L'étape de la conversion des unités est à l'initiative des élèves, contrairement aux ingrédients précédents. L'élève a un choix à faire entre les unités : des grammes ou des kilogrammes.

En choisissant les grammes : l'élève doit alors reconnaître une modalité d'application d'une conversion avec comme intermédiaire 1 kg = 1000 g. La conversion de kg en g est une connaissance ancienne, de fonctionnement disponible.

Le travail se poursuit alors à l'aide de nombres entiers, avec le même choix de procédure (additive ou multiplicative 250 g × 8 = 2000 g, avec une division 2000 g ÷ 250 g = 8[1]).

1. Cette dernière égalité est un peu plus difficile à bien poser parce que le quotient 8 est « sans unité ».

En choisissant les kilogrammes : une fois la conversion 250 g = 0,25 kg effectuée, l'élève peut mettre en œuvre les mêmes procédures que précédemment (0,25 kg × 8 = 2 kg ; 2 kg ÷ 0,25 kg = 8) mais cette fois en utilisant des nombres décimaux.

Enfin, un changement de registre est aussi possible avec comme connaissance ancienne 0,25 = 1/4. Ainsi, $250\ \text{g} = 0{,}25\ \text{kg} = \frac{1}{4}\ \text{kg}$.

Cette représentation en écriture fractionnaire du nombre permet de conclure rapidement par calcul mental $\frac{1}{4}\ \text{kg} \times 4 = 1\ \text{kg}$ puis $\frac{1}{4}\ \text{kg} \times 8 = 2\ \text{kg}$.

Sel
Dans la recette écrite, la quantité de sel n'est quantifiée que par une expression en langage naturel, « une pincée ». Sur la photo, la boîte verseuse ne comporte aucune indication de masse. Il est alors nécessaire de faire un retour au réel, de sortir de la mathématisation du problème, l'élève doit alors faire un changement de point de vue sur cet ingrédient par rapport aux autres. Le vocabulaire « pincée » peut poser problème si l'élève n'a aucun vécu de pratique de recette.

Sucre
Là encore, la correspondance 1000 g = 1 kg est nécessaire. Il est compliqué avec les procédures additives ou multiplicatives (75 × ... = 1000) d'obtenir rapidement le nombre des recettes possibles avec cet ingrédient. De plus, c'est la première fois (hormis avec le sel) qu'un reste d'ingrédient apparaît alors qu'on cherche à maximiser la quantité de pâte à crêpe. Une procédure attendue est celle de la division de 1000 par 75 (ou encore 1 par 0,0075 sans doute plus rare). Cette fois, le sens du quotient est posé au niveau de la division (1000 ÷ 75 ≈ 13,3). Une autre stratégie attendue consiste à utiliser les propriétés de linéarité de la proportionnalité, connaissance qui peut être ancienne (cycle 4) ou en cours d'acquisition (cycle 3).

Deuxième procédure possible : une fois le coefficient 6 obtenu pour les œufs, appliquer à tous les autres ingrédients 6 fois la recette.
Dans cette procédure, deux démarches sont possibles : multiplier pour chaque ingrédient la quantité donnée dans la recette par 6 ou diviser par 6 pour chaque ingrédient la quantité disponible d'après les photos.

Lait

$\frac{1}{3}\text{L} \times 6 = 2\ \text{L}$.

« Prendre une fraction d'une quantité » est une connaissance qui peut être ancienne (cycle 4) ou en cours d'acquisition (cycle 3).

Farine
250 g × 6 = 1 500 g. Reste ici à effectuer la conversion 2kg = 2000 g ou 1500 g = 1,5 kg, puis la comparaison 1 500 g < 2 000 g ou 1,5 kg < 2 kg et conclure « quantité de farine suffisante ». Effectuer 2 kg ÷ 6 environ égal à 0,33 kg. Comparer 0,33 kg et 0,25 kg. Conclure : la quantité de farine est suffisante pour réaliser 6 fois la recette.

Sucre
La démarche est similaire à celle mise en œuvre pour la farine.

Beurre
Calculer et comparer 6 × 50 g = 300 g et 250 g < 300 g ou calculer et comparer 250 g ÷ 6 < 50 g. Conclure : « la quantité de beurre est insuffisante pour faire 6 recettes.

Par contre, 5 × 50 g = 250 g. Donc, avec le beurre, on peut effectuer 5 fois la recette ».
Notons que certains élèves identifieront peut-être le beurre comme ingrédient bloquant. Ils chercheront alors, en premier, le nombre de recettes obtenues avec le beurre avant de vérifier si ce nombre de recettes est compatible avec tous les autres ingrédients.

Plusieurs relations de proportionnalité sont présentes dans cette activité : nombre de personnes et nombre de recettes, nombre de recettes et quantité d'un ingrédient, nombre de recettes et nombre de crêpes. Cette activité présente aussi en exemple de situation de non proportionnalité, comme nombre de recettes et temps de préparation.

Prolongements

Deux ressources possibles sont disponibles en lien sur le thème des crêpes, comme Des crêpes au collège en début de cycle 4, ou Les crêpes du boulanger en 2ème année de cycle 4.

Le compteur d'eau

Énoncé et pistes pédagogiques

• Demande préalable : « Envoyer une photo via ENT du compteur d'eau de chez vous ».

Une sélection de quatre photos est présentée de manière statique à la classe.

Un compteur d'eau est un appareil, présent dans tous les foyers, permettant de mesurer la consommation d'eau. Il fonctionne comme un moulin, l'eau fait tourner une turbine qui transmet le mouvement à un sys¬tème de comptage.

Après observation des photos projetées et d'un diaporama (site de l'IREM de Rouen), les questions qui pourront être posées au fur et à mesure sont :
• Qu'est ce qui est commun aux photos ? Qui peut lire ce qui est affiché ? Pourquoi y-a-t-il des chiffres noirs et des chiffres rouges ?
On peut s'attendre à ce que cette dernière question émerge.
• **Visionnage de la** vidéo 1
Quelle quantité d'eau a été utilisée en tirant la chasse d'eau ?
• **Visionnage de la** vidéo 2
Quelle quantité d'eau a été utilisée en tirant cette nouvelle chasse d'eau ?

Cette activité permet de montrer à l'élève « futur citoyen » comment fonctionne et se lit un compteur d'eau. Nous commençons par un questionnement autour de photos prises dans la sphère familiale, nous poursuivons avec le visionnage de vidéos montrant le fonctionnement du compteur lors du déclenchement d'une grande chasse puis d'une petite chasse d'eau.
Énoncés et vidéos sont également disponibles sur le site de l'IREM de Rouen.

Objectif et lien avec les programmes

AU CYCLE 3
Relier les unités de volume et de contenance.
Estimer la mesure d'un volume par différentes procédures.
• Unités usuelles de contenance (multiples et sous multiples du litre).
• Unités usuelles de volume (cm^3, dm^3, m^3), relations entre les unités.
Comprendre et utiliser la notion de nombre décimal. Spécificités des nombres décimaux.
Vérifier la vraisemblance d'un résultat.

AU CYCLE 4
Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités.
Vérifier la cohérence des résultats du point de vue des unités.
Notion de grandeur produit et de grandeur quotient.

Analyse a priori

Les photos : observation des photos de compteurs prises par les élèves.
Nous faisons émerger le fait qu'il y a deux couleurs de chiffres et parfois des unités indiquées. L'inter-prétation du code couleurs permet de décrypter l'affichage du compteur et les différentes unités mises en jeu. Cet intermédiaire est incontournable pour la suite du scénario. Est-ce un nombre entier ou un nombre décimal de mètres cubes ?

Quelques réponses possibles d'élèves : 27975438 m^3 ou 2797,5438 m^3 ou encore m^3 et 5438 L ou encore des réponses identiques sans unité de grandeur. Si l'unité m^3 n'est mentionnée par aucun élève, il est nécessaire de fournir un énoncé papier après visionnage de la vidéo 1 afin de donner un accès lisible à celle-ci. (Annexe 1). Cette situation présente un manque de connaissance adapté et rien n'est dévoilé à la classe, les diverses réponses étant recueillies avant de visionner une première vidéo de chasse d'eau tirée.

Vidéo 1 : Observation de l'écoulement d'une grande chasse d'eau.
Soit les élèves ont à disposition par groupe une tablette sur laquelle ils peuvent visionner à souhait la vidéo, soit celle-ci est vidéo projetée par l'enseignant. Dans ce cas, le nombre de visionnages sera contraint, ce qui semble moins adéquat pour la gestion de l'hétérogénéité des élèves. Au moins deux visionnages seront nécessaires, ainsi que des pauses à des moments clefs (états initial et final du compteur).

Cette vidéo amène en classe différentes réponses à deux niveaux : écriture du nombre et choix de l'unité comme 51 m^3, 0,0051 m^3, 51 L ou 51 mL...). Il est judicieux de mettre en groupe les élèves afin d'écarter certaines propositions.

Pour éliminer des réponses du type « 51 m^3 » il est aussi possible de projeter une image d'un récupéra-teur d'eau. Ceci pourrait permettre à certains élèves de construire mentalement et visualiser 1 m^3. On invalide ainsi la réponse 51 m^3 en revenant à une situation réelle.

De même pour la proposition de 51 L, on peut utiliser une photo d'un pack de 6 bouteilles d'eau à côté d'un réservoir de WC. L'idée est de comparer et/ou rechercher un ordre de grandeur.

Si la réponse 0,0051 m^3 est exacte, l'écriture du nombre invite à un changement d'unité pour la rendre plus lisible. La nécessité de convertir des m^3 en L sera sans doute insufflée par certains élèves. Cette conversion soulève deux difficultés : tout d'abord, la conversion 1 m^3 = 1 000 dm^3, puis la correspondance 1 L = 1 dm^3, connaissances à construire ou en cours d'acquisition. Cette dernière égalité peut s'illustrer par une vidéo : une bouteille d'un litre remplie d'un fluide (eau, sucre ou sable)[2] qui sera versé dans un cube d'un décimètre de côté. On parvient ainsi à la suite d'égalités : 0,0051 m^3 = 0,0051 × 1 m^3 = 0,0051×1000 dm^3 = 5,1 L. On lève ainsi le doute laissé lors du visionnage des photos : comment lire un compteur (Annexe 2).

2. Attention cependant : le sucre et le sable ne sont pas tout à fait incompressibles, ils peuvent se « tasser ».

Vidéo 2
Travail similaire avec une petite chasse d'eau qui pourra s'effectuer en devoir à la maison (via un ENT) ou en autonomie en classe.

2 797,54382 m^3 - 2 797,5415 m^3 = 0,00232 m^3. Donc la quantité d'eau consommée est de 2,32 L. Ceci peut être l'occasion de faire un parallèle entre une petite chasse d'eau et la consommation quotidienne d'une personne en lien avec l'économie réalisée sur sa facture d'eau (voir 3ème prolongement ci-dessous).

Expérimentations avec influence des choix des artefacts :
Des déroulements effectifs dans des classes de cinquième, des extraits vidéo, des analyses de productions se trouvent sur le site de l'IREM de Rouen.

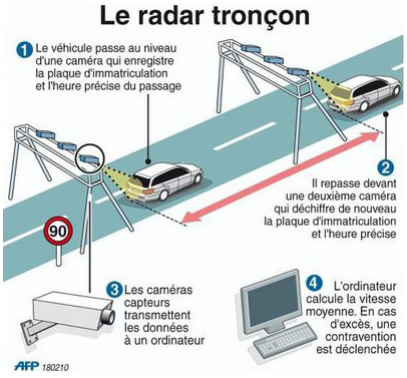
Prolongements

Trois prolongements envisageables sont présentés en Annexes 3 - 4 - 5.

Le radar tronçon

Énoncé

Sur une zone de contrôle de 9 km, la vitesse est limitée à 90 km/h.



Pour contrôler la vitesse des véhicules, il existe un nouveau type de radar : **les radars tronçons**. Ce type de radar permet de mesurer la vitesse moyenne d'un automobiliste sur un tronçon de plusieurs kilomètres.

Un automobiliste a parcouru les cinq premiers kilomètres à la vitesse moyenne de 110 km/h. S'apercevant soudain qu'il est dans une zone contrôlée par un « radar tronçon », il décide d'abaisser sa vitesse à 60 km/h sur les quatre derniers kilomètres. On peut se poser au moins deux questions.

1. Sera-t-il verbalisé ?
2. À quelle vitesse moyenne maximale aurait-il pu rouler sur les quatre derniers kilomètres pour ne pas être verbalisé ?

Un extrait vidéo du journal télévisé (France 2) permet d'illustrer le principe de fonctionnement[3] et d'introduire l'activité en classe.

Objectif et lien avec les programmes

Au cycle 4, « Le radar tronçon » est une ressource permettant d'aborder la notion de vitesse moyenne et d'en préciser le sens, le contrôle de l'automobiliste n'étant pas effectué sur une vitesse instantanée. À l'évidence, un automobiliste roulant à la vitesse de 110 km/h sur une route limitée à 90 km/h est en infraction mais qu'en est-il sur une distance donnée en un temps donné ?

3. Il faut remarquer que l'appellation « radar » n'est pas ici complètement justifiée ; en effet, à la différence des radars permettant de mesurer la vitesse instantanée (par mesure de l'effet Doppler), dans le cas présent il s'agit de caméras qui permettent d'identifier le véhicule et une horloge qui mesure le temps de parcours.

Analyse, éléments complémentaires

Une analyse précise se trouve en Annexe 6 et des documents liés à une expérimentation en classe de troisième sont en lien sur le site de l'IREM de Rouen.

Ticket de grattage

POUR INFORMATION

Les jeux d'argent comme les jeux de loterie commerciale (tirage, grattage, etc, ...) sont interdits aux mineurs. Cette interdiction s'applique aux jeux dans les endroits physiques comme aux jeux sur internet.

Enoncé et pistes pédagogiques

Niveau proposé : Cycle 4

Voici le recto d'un ticket de jeu qui a été gratté :

Au verso du ticket se trouvent les informations suivantes :

Émission de 3876519 tickets gagnants, pour un bloc de 15 000 000 tickets.

Tableau des lots :

- 1 500 000 lots de 5 €
- 1 772 496 lots de 10 €
- 375 002 lots de 20 €
- 112 500 lots de 100 €
- 3 000 lots de 500 €
- 1000 lots de 1000 €
- 10 lots de 5000 €
- 5 lots de 10 000 €
- 3 lots de 100 000 €
- 3 lots de 500 000 €

1. Le ticket ci-dessus est-il gagnant ?

2. À votre avis, les nombres figurant dans les zones de jeu « VOS NUMEROS » et les « N° GAGNANTS » sont-ils choisis au hasard ?

Quatre vidéos (disponibles sur le site de l'IREM de Rouen), montrant le principe du jeu, une phase de grattage, puis les résultats obtenus sur un ticket perdant et un ticket gagnant, peuvent constituer une entrée en matière pour la classe.

Deux entrées semblent pertinentes sur ce jeu, celle liée au hasard et celle questionnant le gain.

La question 1 permet aux élèves de rentrer dans l'activité et de se saisir du principe du jeu. Pour la sui-vante, les élèves peuvent initialement réfléchir seuls ou en groupes. Ensuite, suivant leurs recherches, l'enseignant pourra les orienter vers différentes questions parmi les suivantes :

3. Sur ce ticket, on peut lire « PLUS D'1 CHANCE SUR 4 DE GAGNER ». Est-ce vrai ?

S'interroger sur le slogan « Plus d'1 chance sur 4 de gagner » inscrit sur le ticket, permet de travailler la notion de « chance » et de « hasard » avec les élèves et de préciser où est le côté aléatoire ici. Après un temps de recherche, les élèves peuvent être amenés à se demander quel est le numéro le plus grand possible ? Ici, d'après le règlement le plus grand est 40. Si les probabilités ont déjà été abordées, elles vont pouvoir être réinvesties. Une règle du jeu se trouve sur le site de la FdJ en suivant ce lien.

Sur le ticket gratté, il apparaît 5 « N° GAGNANTS » et 20 numéros appelés « VOS NUMEROS ».

Certains élèves penseront sans doute que 1/4 vient de 5/20 soit $\frac{\text{N° GAGNANTS}}{\text{VOS NUMEROS}}$.

D'autres auront vu la petite étoile et se réfèreront au dos du ticket.

Dans un second temps, un outil de simulation (disponible sur le site de l'IREM de Rouen) peut permettre de contrer l'idée selon laquelle la probabilité d'environ 1/4 viendrait de la face du ticket où le joueur gratte. Cet outil manipulé par l'enseignant devant les élèves permettra de faire observer que la fréquence de billets gagnants se stabilise autour d'environ 98 % si les nombres « N° GAGNANTS » et « VOS NUMEROS » sont choisis de façon (pseudo) aléatoire. On en déduit que le choix des nombres au recto n'est pas aléatoire.

4. D'après les indications portées au verso du ticket, combien y-a-t-il de lots gagnants ?

5. En tirant un ticket au hasard parmi les 15 millions émis, combien a-t-on de chances de gagner un lot ou au moins de récupérer sa mise ?

6. En tirant un ticket au hasard parmi les 15 millions émis, combien a-t-on de chances de gagner un lot d'un montant de 500 000 € ?

7. Combien en moyenne peut-on espérer gagner en grattant un ticket ?

Les élèves trouvent en général rapidement les calculs à effectuer. On obtient $\frac{3876519}{15000000} \approx \frac{1}{4}$

Il faut insister sur le fait que le gain moyen 3,60 € est en fait une perte moyenne de 1,40 € puisque le ticket vaut 5 €. Un gain négatif n'est pas usuel chez nos élèves.

On peut ensuite discuter des éléments constituants un ticket : un recto où l'apparence semble induire l'idée d'un gain facile ; un verso dévoilant la prévision des gains. Après ces recherches sur le recto et le verso du ticket, les élèves arrivent à en déduire la réponse au problème.

Objectif et lien avec les programmes

Cette ressource permet d'évoquer la citoyenneté en aiguisant la curiosité des élèves, leur esprit critique face à des informations chiffrées. Sans en faire un objectif en soi, il est formateur d'aborder la notion d'espérance de gain dans les jeux de grattage.

Nous retrouvons ici l'approche fréquentiste qui permet d'estimer la probabilité dans ce cas. L'idée est de pointer que « plus d'une chance sur 4 » ne provient pas des écrits au verso du billet. La simulation viendra invalider un modèle peut-être empirique chez nos élèves.

Plusieurs variantes

Deux d'entre elles sont disponibles en Annexe 7, d'autres énoncés possibles, des éléments d'analyse, et deux expérimentations effectives en classe sont disponibles et présentés sur le site de l'IREM de Rouen.

Essence ou diesel

La situation réelle : article de presse[4]

Les ventes des voitures essence dépassent celles des voitures diesel

13 COMMENTAIRES — Publié le 03/07/2015 à 16h32 , modifié le 03/07/2015 à 17h11 par P.-Y.C.

En France, alors que les immatriculations de voitures neuves sont en nette hausse, le diesel tend à passer de mode. Faut-il s'en réjouir ?

Voici l'un des 13 commentaires postés :

Il vaut mieux acheter un diesel qu'une essence, ça coûte moins cher !

- En êtes vous sûr ?

Objectif et lien avec les programmes

Cet article peut constituer l'accroche initiale d'une situation permettant de travailler la modélisation ainsi que la proportionnalité, les fonctions affines et les « grandeurs quotients ». Nous nous situons donc en cycle 4, ce qui n'empêche pas d'envisager partiellement cette ressource au cycle 3 (vérification des résultats du comparateur).

Quels paramètres, pour quelle connaissance visée ?

Le rôle de l'enseignant consiste à :
- faire cheminer les élèves, les amenant d'une situation réelle à construire par eux-mêmes une si-tuation modèle ;
- trier, élaguer, conserver certaines données au service des notions mathématiques qu'il ambitionne de travailler.

Pour chacun de ces paramètres, il sera possible de reconsidérer la pertinence de ce choix de modèle par rapport à la situation réelle (voir le cycle de modélisation expliqué sur le site de l'IREM de Rouen).

4. La reproduction est tirée du site web du journal Sud-Ouest

Un premier exemple de paramètre : le prix des carburants

Considérer les prix actuels pour faire une prévision de coût, c'est déjà faire un choix de modélisation et de fait une simplification de la situation réelle. Le site prix-carburants.gouv.fr offre la possibilité de choisir entre une valeur moyenne, ou une fourchette de prix. Il pointe la non-uniformité territoriale dans ce domaine et la fluctuation des prix.

Autre exemple de paramètre : le choix de voitures

Comment comparer deux voitures ? Modèle de base ? Puissance du moteur égale ? Mêmes options ?

Il nous paraît indispensable de restreindre les études à un type de voiture précis.

Ultérieurement, l'enseignant pourra faire réinvestir à ses élèves le modèle pour observer si les mesures restent valables pour d'autres types de voitures (devoir maison, EPI, exposé collectif, ...).

Autre exemple de paramètre : le kilométrage

Cette question est cruciale dans ce qu'elle engendre comme procédures élèves.

Sur quel empan calcule-t-on un amortissement et avec quel type d'unité : kilométrage total ? Kilométrage moyen par an ? Prise en compte du nombre d'années successives ?

Contrairement aux adultes qui ont comme référence un kilométrage par an, les élèves peuvent préférer envisager un nombre total de kilomètres parcourus. Il est envisageable de solliciter les parents via un questionnaire construit par la classe. Les élèves seront acteurs des recherches des données pertinentes.

Autres paramètres

- type de consommation (urbaine, mixte, extra-urbaine) ;
- bonus écologique ;
- le prix de la revente ;
- coût de l'entretien ;
- prix des assurances...

Pour répondre au problème, on se restreindra au choix de paramètres qui différencient le coût d'une voiture essence et d'une voiture diesel (donc par exemple, pas le prix des assurances).

Des outils de simulations à explorer

Une fois un modèle stabilisé, les élèves auront à en faire le traitement mathématique, ils pourront :

- utiliser un comparateur existant, en rechercher le fonctionnement en élaborant un fichier tableur équivalent.
- exploiter un logiciel de géométrie dynamique dans le cadre d'un modèle fonctionnel avec étude de représentations graphiques.

Quelques pistes (sans exhaustivité) sont proposées en Annexe 8.

Avec un tableur

Au cycle 4, l'objectif est de (re)construire un comparateur avec un tableur. Différentes démarches de construction d'une feuille de calcul peuvent apparaître, parmi lesquelles :

- une comparaison du coût des carburants sur 1 an (unité de temps fixée) ;
- les calculs des coûts des deux voitures sur un certain nombre d'années.

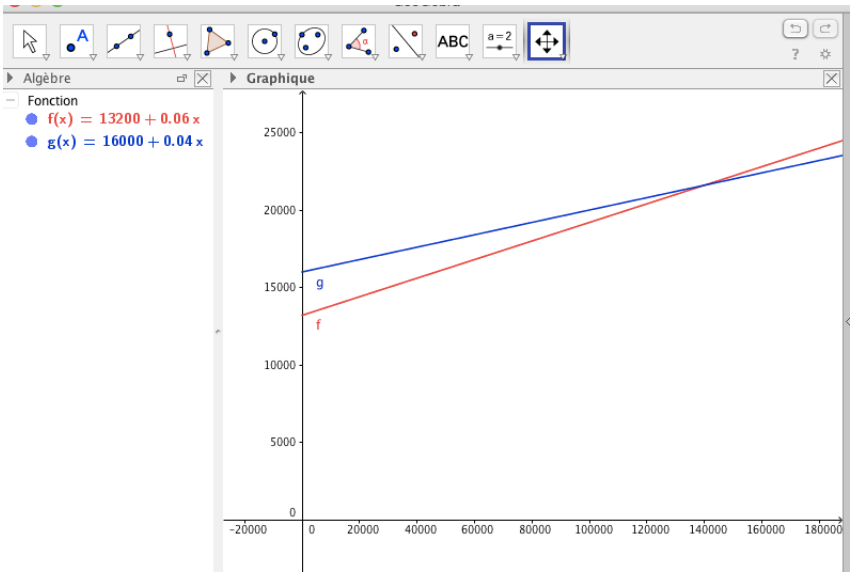
Nous verrons apparaître alors une étude par tranches de km (choix à laisser à la charge des élèves, sans doute lié à la question posée aux parents). Ce fichier tableur pourra être basé sur un calcul de coût pour 100 km ou encore une recherche du coût carburant pour 1 km.

Un exemple de fichier tableur se trouve sur le site de l'IREM de Rouen, mais dans l'hypothèse où les élèves construiraient sans guide préalable cette feuille de calcul, l'enseignant doit s'attendre à diverses stratégies et organisations de calculs.

Avec des représentations graphiques

Voici une idée de ce que pourraient être les représentations graphiques du coût de chaque voiture (de même type), en fonction du kilométrage, avec les paramètres choisis antérieurement.

Dans la figure ci-dessous, f, (respectivement g), est la fonction représentant le coût d'une voiture essence, (respectivement diesel) en fonction du nombre de kilomètres.



Parmi les ressources proposées par l'IREM de Rouen sont proposées quatre vidéos à destination des enseignants (et non pas des élèves) pour renseigner sur quelques unes des problématiques liées à l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique. Un film s'appuyant sur des fichiers GeoGebra peut servir à soutenir l'émergence d'un modèle fonctionnel.

Utiliser des données de prix de revient d'1 km parcouru constitue une alternative pour un autre scénario.

Une alternative possible et ses impacts

Un autre choix d'énoncé est proposé sur le site de l'IREM de Rouen. Il impose le prix des carburants, et ne laisse pas l'initiative aux élèves quant aux démarches possibles.
En effet, la situation initiale peut se penser de deux façons :

- ou bien rechercher la distance à parcourir pour que le diesel devienne moins cher que l'essence à voitures équivalentes,
- ou bien en fixant la distance parcourue par an (par exemple 15 000 km) et en comparant le sur-coût d'années en années.

Cet énoncé fixe un type de voitures, un prolongement serait d'en étudier de différents types (citadines, berlines, 4 x 4...), peut être en privilégiant un type de voiture par groupe d'élèves.

Enfin, il sous-entend un grand nombre de choix déjà imposés, passant sous silence la variabilité qu'offre la ressource initiale quant à l'élaboration du modèle.

Productions d'élèves et extraits vidéo de classe

Une expérimentation est détaillée sur le site de l'IREM de Rouen. Elle est composée d'une analyse a priori, d'une analyse de déroulement avec des productions d'élèves, et d'extraits vidéo éclairant le cycle de modélisation.

Conclusion

Les situations développées dans ce document sont ancrées tant dans le quotidien de l'élève que dans celui de l'adulte qu'il est amené à devenir. Les thématiques de travail ne se veulent en aucun cas prescriptives et le professeur sera amené à moduler certaines d'entre elles selon l'environnement social et géographique de ses élèves. Dans tous les cas, qu'il s'agisse d'économie de consommation d'eau, de jeux de hasard, ou de sécurité routière, toutes contribuent à développer le sens critique des informations et à adopter une démarche fondée sur un raisonnement. En cultivant ces compétences, les mathématiques ainsi adossées au quotidien révèlent leur nette contribution à la formation du citoyen tout au long de sa vie dans une société en évolution permanente.

Annexe 1 : Compteur d'eau - Support papier distribué après vidéo 1

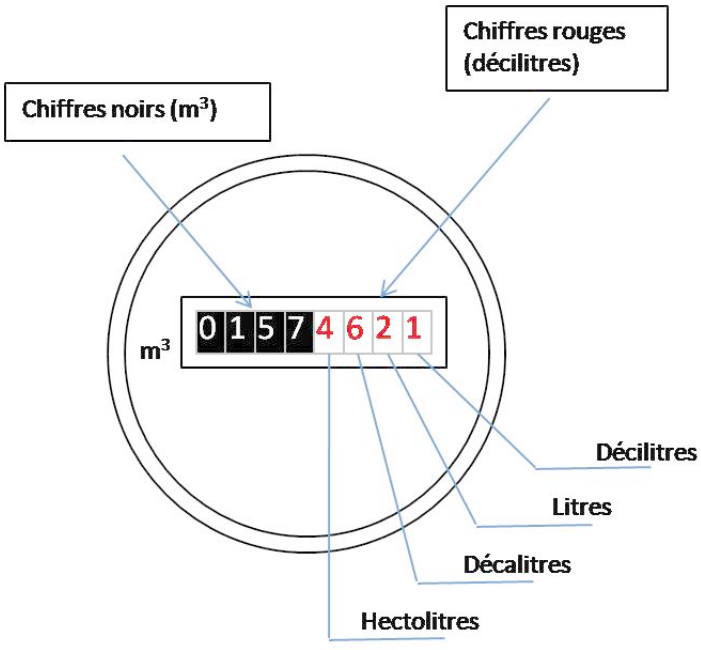
Le compteur d'eau

Avant d'actionner la chasse - d'eau :

Après avoir actionné la chasse - d'eau :

Quelle quantité d'eau s'est écoulée ?

Annexe 2 : Compteur d'eau - Un schéma de compteur



Source du schéma

Annexe 3 : Compteur d'eau – un prolongement

Le bouton est-il fidèle à la réalité ?

Un prolongement : Questionnement sur le double bouton de la chasse d'eau.

La question posée permet un travail sur la notion de proportion, les aires et les écritures fractionnaires.

Elle permet de donner du sens à la notion de proportion. Les termes de petite et grande chasse d'eau peuvent amener à l'idée de « demi » comme fraction entre les deux volumes de chasse. Les élèves sont amenés à confronter la proportion supposée avec la proportion obtenue à l'aide des questions précédentes et celle obtenue à l'aide des mesures des boutons (le petit et le grand) effectuées sur la photo.

Annexe 4 : Compteur d'eau – un 2e prolongement

Première tâche possible en amont de la vidéo :

L'enseignant peut indiquer les caractéristiques de la piscine, directement.

PISCINE
168 x 46 cm

Alternative à cette première tâche :

L'enseignant peut laisser ses élèves estimer les dimensions de la piscine sachant que, par exemple pour notre choix ci-contre, la balustrade a une hauteur de l'ordre de 120 à 140 cm, et ce modèle de piscine est constitué de trois boudins superposés dont l'épaisseur peut être estimée d'après la photo !

Une deuxième tâche pourrait s'appuyer sur un film (qui reste à réaliser). L'idée serait de proposer une vidéo en filmant un compteur en parallèle avec un jet d'eau pendant 30 secondes pour calculer un débit. Elle pourrait avoir comme consigne :

> **QUESTION**
> Observe la vidéo. Combien de temps faudrait-il pour remplir la piscine ci-dessus ?

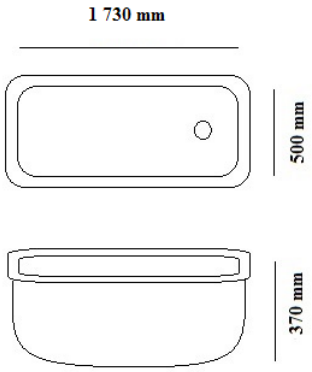
Ici, est visé un travail sur la notion de grandeur quotient, le débit. On retrouvera la difficulté de compréhension des unités du compteur. Le calcul du volume de la piscine avec encore de la conversion d'unité cm^3 en m^3 ou en litres doit être mis en œuvre. Les élèves devront se poser la question de savoir s'il faut la remplir en entier et sinon jusqu'à quelle hauteur faut-il le faire ? Ensuite les élèves peuvent s'engager dans le calcul du débit ou la recherche d'un coefficient de proportionnalité entre la quantité d'eau écoulée sur la vidéo et la quantité d'eau nécessaire pour la piscine. Cette situation fait appel à des conversions d'unités de temps, connaissance ancienne.

Annexe 5 : Compteur d'eau – Un 3e prolongement : la consommation d'eau

Les situations en lien avec la consommation d'eau et le coût occasionné contribuent à la formation du ci-toyen, à l'instar de celle présentée ci-dessous.

QUESTION
A l'aide des informations ci-après, répondre au problème suivant : combien de temps doit-on rester sous la douche pour que le volume d'eau utilisé soit équivalent à celui d'un bain ?

Le débit moyen d'une pomme de douche est de 12 L par minute[5].



Pistes pédagogiques

Cette activité sera préférentiellement traitée au cycle 4.

Il s'agit de partir d'une situation liée au débit de l'eau pour arriver à la compréhension de factures d'eau, tout en interrogeant sur les habitudes quotidiennes des élèves à travers un questionnaire en ligne et un recueil de données.

La situation initiale de la baignoire permet de travailler le volume d'un pavé droit, les conversions des mm^3 en litre et du nombre décimal d'heures en heures-minutes. Une explication est peut être nécessaire pour le débit moyen, ainsi que pour la pomme de douche économique. On explique alors que l'on peut verser 12 L d'eau dans un seau avec une pomme de douche en laissant couler l'eau durant une minute.

Une alternative à la problématique : combien de douches sont-elles équivalentes à un bain ? Celle-ci permet d'utiliser la compétence au cycle 3 : résoudre des problèmes de comparaison avec et sans recours à la mesure.

5. On pourrait aussi considérer une douche « économique » avec un débit d'environ 6 L par min

Des questions du type : « À votre avis, en termes d'économie d'eau, combien de douches peuvent-elles remplacer un bain ? » aident les élèves à donner du sens à la notion de rapport de volume d'eau.

Certains élèves vont commencer par calculer le volume de la baignoire et naturellement le comparer à un pavé droit. Le passage du volume évalué à la contenance en litre nécessite un passage unité de volume à unité de contenance. Certains élèves pourront calculer en premier la contenance entière de la baignoire, après calcul du volume d'un pavé. Les unités choisies pourront être l'occasion de correspondances entre les cm^3 et les mm^3 : v = 173 cm × 50 cm × 37 cm ou v = 1 730 mm × 500 mm × 370 mm ou v = 320050 cm^3 ou v = 320 050 000 mm^3.

Le passage du volume à la contenance maximale 320,05 L peut présenter une difficulté (même problématique qu'avec le compteur d'eau). Une vidéo (site de l'IREM de Rouen) pour faciliter la conversion de L en dm^3 peut être un support : elle présente un cube d'1 dm d'arête rempli d'eau avec un verre gradué.

Une aide constructive est d'apporter une brique en carton d'un litre, et de laisser les élèves calculer son volume afin qu'ils établissent une correspondance entre les L et les cm^3 par exemple.

La division d'une contenance de 320,05 L par un débit de12 L / min donne environ 26,67 min, ce calcul faisant intervenir le débit. L'élève est alors amené à transformer ce temps en minute et seconde. La proportionnalité pourra être réinvestie pour cette conversion.

Ensuite, par réflexion sur la contenance choisie de la baignoire et une relance du type : « si la baignoire est pleine d'eau, il y a peut-être un problème ? ».

Le retour au quotidien permet de remettre en cause le choix du modèle. Le travail de groupe doit per-mettre une réflexion sur la hauteur maximale de l'eau (différente selon les groupes). Il y a ici deux solutions: soit les élèves reprennent leurs calculs avec une certaine hauteur, soit ils décident de remplir la moitié du bain par exemple (on retrouve le volume du bain de 160 L) et travaillent uniquement sur leur résultat.

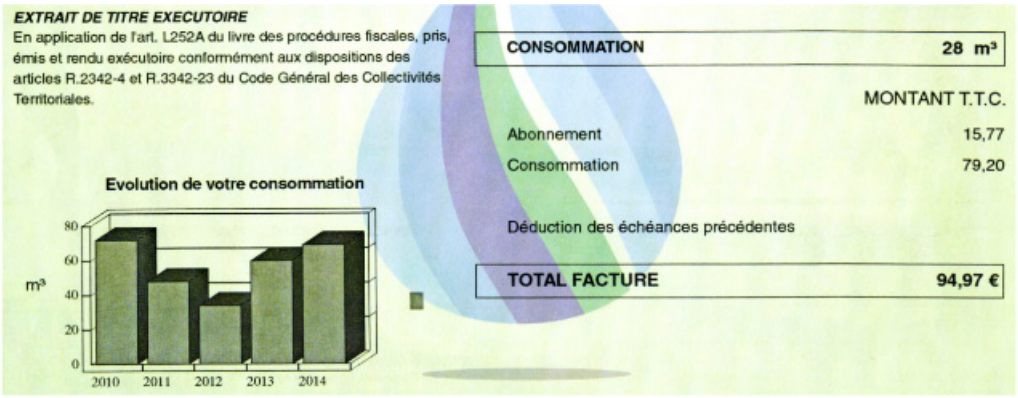
Complément menant à l'étude de factures d'eau[6]

Un site propose une comparaison des contenances de baignoire. Nous y trouvons par exemple que le volume va de 120 L (pour une longueur de 120 cm) à 260 L. Ce peut être l'occasion de travailler sur le recueil de données et son traitement.

Un autre document permet de structu¬rer une ressource reliant l'énoncé précédent, des factures d'eau et un questionnaire de consommation proposés ensuite. La page 4 de ce document nous semble particulièrement intéressante, entre autres pour sa comparaison des consommations d'eau entre différentes types de familles de 4 personnes (« gaspi », « Eco » ou « Super Eco »).

Dans un deuxième temps, les élèves complètent avec leurs parents un questionnaire (IREM de Rouen) sur leur consommation d'eau via l'ENT. Dans le but de calculer leur consommation semestrielle, on étudie le fonctionnement d'une facture d'eau.

6. Le programme de cycle 4 propose ce type d'activité (en colonne de droite) dans le thème « grandeurs et me¬sures ».



EXTRAIT DE TITRE EXECUTOIRE

En application de l'art. L252A du livre des procédures fiscales, pris, émis et rendu exécutoire conformément aux dispositions des articles R.2342-4 et R.3342-23 du Code Général des Collectivités Territoriales.

CONSOMMATION	28 m³
	MONTANT T.T.C.
Abonnement	15,77
Consommation	79,20
Déduction des échéances précédentes	
TOTAL FACTURE	94,97 €

Evolution de votre consommation

DÉTAIL DE VOTRE FACTURE RÉF. 2014 2152 217118 V

Réf. à rappeler : 540007408001 / 43978

Compteur	Nouveau Relevé		Ancien Relevé		Consommation	Commentaire
Numéro	Date	Index	Date	Index	m³	
95329154	15/07/2014	2643	15/01/2014	2615	28	Index evalué - Facture estimée

LIBELLÉ	Base	Prix Unit. € H.T.	Montant € H.T.	Taux T.V.A	Montant € T.V.A	Montant € T.T.C
Distribution de l'eau						**42,85**
Abonnement : redevance communautaire période du 16/01/2014 au 15/07/2014	181 J	30,15	14,95	5,50	0,82	15,77
Consommation : redevance communautaire tranche 1 période du 16/01/2014 au 15/07/2014	28 m3	0,5822	16,30	5,50	0,90	17,20
Consommation : redevance investissement eau tranche 1 période du 16/01/2014 au 15/07/2014	28 m3	0,2345	6,57	5,50	0,36	6,93
Préservation des ressources en eau (Ag. de l'Eau) période du 16/01/2014 au 15/07/2014	28 m3	0,1000	2,80	5,50	0,15	2,95
Collecte et Traitement des eaux usées						**31,06**
Consommation : redevance communautaire tranche 1 période du 16/01/2014 au 15/07/2014	28 m3	1,0086	28,24	10,00	2,82	31,06
Organismes Publics						**21,06**
Lutte contre la pollution (Ag. de l'Eau)	28 m3	0,4000	11,20	5,50	0,62	11,82
Modernisation des réseaux (Ag. de l'Eau)	28 m3	0,3000	8,40	10,00	0,84	9,24
TOTAL A PAYER			88,46		6,51	94,97

Pour mieux comprendre votre facture

Distribution de l'Eau :
L'alimentation en eau potable comprend le pompage de l'eau, son traitement aux normes de potabilité, son stockage et sa distribution aux usagers.

Collecte et traitement des eaux usées :
Ce service correspond à la collecte des eaux usées, à leur dépollution en station d'épuration avant rejet dans le milieu naturel.

Abonnement :
Montant forfaitaire destiné à couvrir les charges fixes du service, comprenant la location-entretien du compteur.

Consommation :
Part du prix de l'eau proportionnelle au volume consommé en m3.
Les redevances communautaires sont votées chaque année par le Conseil Communautaire. Ces recettes permettent à la Régie Publique de l'Eau et de l'Assainissement de faire fonctionner les services, d'entretenir les installations et de réaliser les investissements.

Organismes publics :
L'Agence de l'Eau Seine-Normandie est un établissement public qui veille à la préservation de la ressource en eau, tant au plan de sa qualité que de sa quantité. Les redevances perçues sont reversées à l'Agence par la Communauté.

Réclamations et recours :
Toute réclamation doit être adressée à LA CREA - 14bis Avenue Pasteur - CS50585 Norwich House - 76006 ROUEN CEDEX
Dans les deux mois suivant sa notification, recours sur le bien fondé de la créance auprès du tribunal compétent.

Règlement de service :
Vous pouvez l'obtenir sur simple demande par écrit ou en le téléchargeant sur notre site : http://www.la-crea.fr

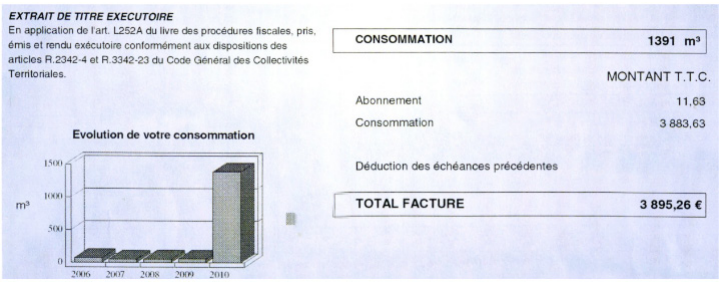
QUESTION

Quelle est la signification de chacune de ces colonnes et comment peut-on les calculer ?[7]

On peut présenter aux élèves une facture (site de l'IREM de Rouen) et essayer de comprendre avec eux les différentes lignes et colonnes. Il est important de distinguer la partie fixe (abonnement) de la partie variable suivant la consommation. Pour détailler les différentes lignes, on peut s'appuyer sur les explications en bas de la facture. Par contre, pour les colonnes, les élèves peuvent chercher par le calcul les valeurs des colonnes montant H.T., montant T.V.A. et montant total afin qu'ils s'imprègnent du document. Le principe de la T.V.A. (et ses différents taux) peut aussi faire l'objet d'une recherche en classe ou à la maison.

7. Facture lisible disponible sous ce lien.

QUESTION
Que feriez-vous, si vous receviez cette facture ?



EXTRAIT DE TITRE EXECUTOIRE
En application de l'art. L252A du livre des procédures fiscales, pris, émis et rendu exécutoire conformément aux dispositions des articles R.2342-4 et R.3342-23 du Code Général des Collectivités Territoriales.

CONSOMMATION	1391 m³
	MONTANT T.T.C.
Abonnement	11,63
Consommation	3 883,63
Déduction des échéances précédentes	
TOTAL FACTURE	3 895,26 €

Evolution de votre consommation

Cette facture est due à une fuite sur une canalisation côté client entre son compteur d'eau et sa maison.

Le montant de la facture peut amorcer le débat, et le diagramme peut aider les élèves à percevoir l'anomalie. La question d'une éventuelle erreur peut se poser. Si le sujet sur le compteur d'eau a été abordé, les élèves peuvent proposer une vérification de la consommation au niveau du compteur. Vont-ils rapprocher cette facture de la consommation de leur foyer ? Le débat est relancé en indiquant que la consommation est bien de 1391m^3 pour une période donnée et un foyer composé d'une seule personne.

Si certains élèves soumettent l'idée d'une fuite, sa détection peut être l'objet d'un questionnement sur comment la détecter. À cette occasion l'enseignant pourra proposer une situation autour du compteur.

Il est également possible d'appliquer cette étude à la consommation d'eau au niveau du collège voire d'y déceler, par le même procédé, une fuite.

Dans un second temps, les élèves peuvent être amenés à déterminer la consommation de leur foyer pour six mois à l'aide d'un tableur (fichier téléchargeable sur le site de l'IREM de Rouen), ce qui permettra de compléter leurs réponses au questionnaire et de calculer le montant de leur facture semestrielle. La consommation d'un bain est déterminée par l'exercice précédent et pour la douche, cela correspond à une durée de cinq minutes.

	A	B	C	D
1		réponses	consommation en litres	Total pour 6 mois
2				
3	Combien de personnes vivent dans votre foyer ?		40	
4			par jour et par personne	
5	Combien de fois par jour tirez-vous votre chasse d'eau ?		8	
6			par usage	
7	Par semaine :	7		
8				
9	Combien de fois, prenez-vous des douches ?		60	
10			par douche	
11	Combien de fois, prenez-vous des bains ?		160	
12			par bain	
13	Combien de fois, utilisez-vous votre lave-linge ?		60	
14			par usage	
15	Combien de fois, utilisez-vous votre lave-vaisselle ?		17	
16			par usage	
17	Combien de fois, lavez-vous votre linge à la main ?		40	
18			par usage	
19	Combien de fois, faites-vous la vaisselle à la main ?		20	
20			par usage	
21				
22			Consommation totale pour 6 mois en litres	
23			Consommation totale pour 6 mois en mètres cubes	
24				

	A	B	C	D	E	F	G
25							
26				Facture d'eau			
27							
28	Consommation en mètres cubes						
29							
30		Base	Prix unitaire (H.T.)	Montant (H.T.)	Taux TVA	Montant TVA	Montant TTC
31							
32	Distribution de l'eau						
33	Abonnement : redevance communautaire	181 J	30,15	14,95	5,50		
34	Consommation : redevance communautaire	0	0,5822		5,50		
35	Consommation : redevance investissement eau	0	0,2345		5,50		
36	Préservation des ressources en eau	0	0,1000		5,50		
37							
38	Collecte et traitement des eaux usées						
39	Consommation : redevance communautaire	0	1,0086		10,00		
40							
41	Organismes publics						
42	Lutte contre la pollution	0	0,4000		5,50		
43	Modernisation des réseaux	0	0,3000		10,00		
44							
45	Total à payer						
46							
47							
48	1. Compléter la cellule en jaune avec votre consommation pour 6 mois en mètres cubes.						
49	2. Compléter les autres cellules avec des formules.						

Pour le questionnaire, il faut définir un nombre de jours et un nombre de semaines pour 6 mois. On peut l'imposer après en avoir discuté en classe ou le co-construire avec les élèves. La fonctionnalité SOMME du tableur peut être utilisée pour la consommation totale.

Pour la facture d'eau, la dernière colonne doit contenir deux décimales. La question sur le prix unitaire à quatre décimales et le total à payer à deux décimales peut être soulevée. Les élèves peuvent connaître des prix à trois décimales, comme le prix de l'essence au litre.

Une autre relance possible est d'apporter l'extrait[8] suivant, entier ou partiel, qui permettra de relier la si-tuation des factures au compteur d'eau :

> **LA GOUTTE D'EAU QUI FAIT DEBORDER ...VOS FACTURES !**
> Un robinet qui goutte, ce sont 35 m³ par an, soit 91 € qui sont gaspillés. Pour un filet d'eau, c'est 140 m³ par an, soit 365 €, et une chasse bloquée représente 220 m³ par an, soit 574 €.
>
> Faire réparer les fuites est donc très rentable économiquement et écologiquement. Le compteur d'eau permet de détecter les fuites que vous ne voyez pas : il vous suffit de réaliser un relevé d'index en notant le chiffre inscrit sur celui-ci avant de vous coucher et de le vérifier le lende-main matin !

Des documents annexes comme par exemple d'autres extraits de factures d'eau, ou une courte vidéo pour soutenir par exemple la correspondance entre L et dm³, ou encore une expérimentation en classe se trouvent ici.

Annexe 6 : Radar tronçon - Analyse a priori

Les deux questions posées sont de natures assez différentes.

La question 1. mobilise la connaissance de la relation $v = \frac{d}{t}$ et ses adaptations $t = \frac{d}{v}$ ainsi que $d = v \times t$. Faire le point sur cette connaissance si elle est visée sera nécessaire avant que les élèves ne s'engagent dans la question 2. La relation $v = \frac{d}{t}$ peut aussi être réactivée selon la place de cette ressource dans la progression de l'enseignant.

8. source (page 4)

Ensuite, après un travail individuel nécessaire, les élèves pourront être mis en situation de recherche par groupe pour la question 1. comme pour la question 2. ce qui permettra de faire naître un débat lors de la mise en commun. Des essais dans un environnement papier-crayon pourront être soutenus ensuite par la construction d'une feuille de calcul, afin d'automatiser des calculs.

Pour la première question, on peut s'attendre de la part des élèves à au moins deux stratégies,
• Le calcul de la durée sur les 5 premiers kilomètres ($\frac{1}{22}$ h), puis de la durée sur les 4 derniers ($\frac{1}{15}$ h) puis de la durée totale ($\frac{37}{330}$ h).Ensuite, un calcul de la vitesse moyenne sur les 9 km (80,27...km/h). Cette vitesse est alors comparée aux 90 km/h. Dans cette démarche, la somme de fractions est une connaissance ancienne, mobilisable et la connaissance des relations entre vitesse, distance et temps est un intermédiaire.
• La comparaison de la durée d'un véhicule roulant à 90 km/h sur le tronçon (6 min) avec celle de l'automobiliste (6,72...min).

Dans les deux cas, la possibilité est laissée à l'élève de calculer les durées en secondes.

La calculatrice est ici un outil à « orchestrer » en raison des nombreuses adaptations permettant de ré-pondre à la question (calcul sur les fractions, heures décimales, heures fractionnaires, conversion d'heures en minutes,...). Même si des valeurs exactes peuvent être demandées à des élèves performants, tout résultat en valeur approchée doit être à l'évidence validé. L'idée d'orchestration technologique mentionnée ci-dessus par rapport à l'usage des TICE en classe est plus largement éclairée par la vidéo (site de l'IREM de Rouen) de Gilles Aldon, enseignant-chercheur à l'IFÉ[9].

Place dans la progression

Ce scénario est une activité permettant de réactiver la notion de vitesse moyenne. Le changement de vitesse moyenne sur le tronçon représente une difficulté majeure à travailler. Avant de proposer cette ressource, les élèves auront manipulé les formules de vitesse moyenne et les conversions h, min, s (en calcul mental ou « questions-flash » par exemple), le sens d'une fraction d'une quantité (fraction d'heure). Nous la situons donc cette activité plus sur le niveau troisième.

Relances possibles

En cas de blocage, rappeler aux élèves qu'ils ont à leur disposition les trois relations entre v, d et t. Que connaît-on ? Que peut-on calculer ? Proposer de remplir un tableau qui permet de faire « l'état des connaissances », par exemple :

	DISTANCE	DURÉE	VITESSE MOYENNE
5 premiers km			
4 derniers km			
Tronçon de 9 km			

Si une moyenne simple est calculée (110 + 60) ÷ 2 = 85, une relance est alors envisageable : « imagine que l'automobiliste roule à 110 km/h sur 8,900 km et qu'il abaisse sa vitesse à 60 km/h sur les 100 derniers mètres. Penses-tu toujours que la vitesse moyenne sera de 85 km/h ? ».

Si l'élève propose de faire une moyenne pondérée basée sur les distances partielles (soit : (110 × 5 + 60 × 4) ÷ 9 ≈ 76,66), on peut l'amener à découvrir que cela ne convient pas avec le scénario suivant : un cycliste parcourt un trajet descendant de 30 km en 1 h, puis refait ce

même trajet dans le sens de la montée en 2 h ; que valent sa vitesse moyenne en descente, en montée et sur la totalité du trajet ?

Le calcul de la moyenne pondérée est pourtant une idée judicieuse, à condition de pondérer par les temps et non par les distances . La formule correcte est $v = \frac{(t_1 \times v_1 + t_2 \times v_2)}{(t_1 + t_2)}$.

Les calculs de durées et interprétations des résultats obtenus nécessitent un travail non négligeable de conversions qui peut s'avérer difficile et occupera un temps non négligeable dans le déroulement de l'activité. Par exemple si certains élèves sont tentés d'interpréter, de façon erronée, 2,72 min comme 3 min 12 s (au lieu de 2 min 43 s) l'enseignant pourra se saisir de cette occasion pour retravailler sur les conversions horaires.

Les nombres en jeu, tels que $\frac{5}{110} = \frac{1}{22}$ dont l'affichage décimal par la calculatrice est 0,04545454545 (ou encore $\frac{4}{60}$ qui peut s'afficher comme 0,0666666667) ont des représentations dont le sens n'est ni toujours compris, ni toujours interprété comme un temps exprimé dans une unité adéquate.

La deuxième question est à faire dans un deuxième temps. Elle apparaît naturelle : en roulant à la vitesse moyenne de 60 km/h sur les 4 derniers kilomètres, l'automobiliste ne sera donc pas en infraction, mais à 110 km/h, il le sera évidemment. Les élèves pourront alors chercher par essai-erreur la vitesse maximale à laquelle il ne sera pas en infraction.

	A	B	C	D
1	Vitesse 4 derniers km	Durée 4 derniers km en heures	Durée Tronçon 9 km en heures	Vitesse Moyenne sur le tronçon de 9 km
2	60	0,06666667	0,1121212121	80,2702702703
3	...	...	...	...
4	70	0,05714286	0,1025974026	87,7215189873
5	71	0,05633803	0,1017925736	88,4150943396
6	72	0,05555556	0,101010101	89,1
7	73	0,05479452	0,100249066	89,7763975155
8	74	0,05405405	0,0995085995	90,4444444444
9	75	0,05333333	0,0987878788	91,1042944785

	A	B	C	D
1	Vitesse 4 derniers km	Durée 4 derniers km en heures	Durée Tronçon 9 km en heures	Vitesse Moyenne sur le tronçon de 9 km
2	60	=4/A2	=5/110+B2	=9/C2
3	...	...	...	...
4	70	=4/A4	=5/110+B4	=9/C4
5	71	=4/A5	=5/110+B5	=9/C5
6	72	=4/A6	=5/110+B6	=9/C6
7	73	=4/A7	=5/110+B7	=9/C7
8	74	=4/A8	=5/110+B8	=9/C8
9	75	=4/A9	=5/110+B9	=9/C9

Les stratégies utilisées dans la première question peuvent être réactivées en augmentant progressive-ment la vitesse de 60 km/h. Les calculs peuvent alors être accélérés par le tableur qui trouve alors ici tout son sens dans l'automatisation des calculs à l'aide de formules recopiées par « copier-glisser ». Il est alors utile, lors de la construction de la feuille de calcul, de bien penser l'orchestration. En effet, limiter l'accès au tableur et interdire la calculatrice simultanément ne produira pas les mêmes effets sur l'élaboration de formules dans les cellules.

Le choix des variables de départ est pensé pour que la vitesse moyenne maximale ne soit pas un nombre entier. La question de la valeur exacte de cette vitesse moyenne maximale ($\frac{220}{3}$ km/h) est-elle envisageable au collège ? Sans doute que non, mais pourquoi pas au lycée ?

9. La vitesse moyenne globale est en fait une moyenne harmonique des deux vitesses pondérée par les distances.

10. On peut aider les élèves à se diriger vers la bonne formule en revenant vers les unités de mesure ; en effet, une expression comme $d_1 \times v_1 + d_2 \times v_2$ doit être interprétée par rapport à une unité de mesure (ou « dimension » dans le langage des physiciens) de type m²/s, alors que $t_1 \times v_1 + t_2 \times v_2$ se mesure en mètres.

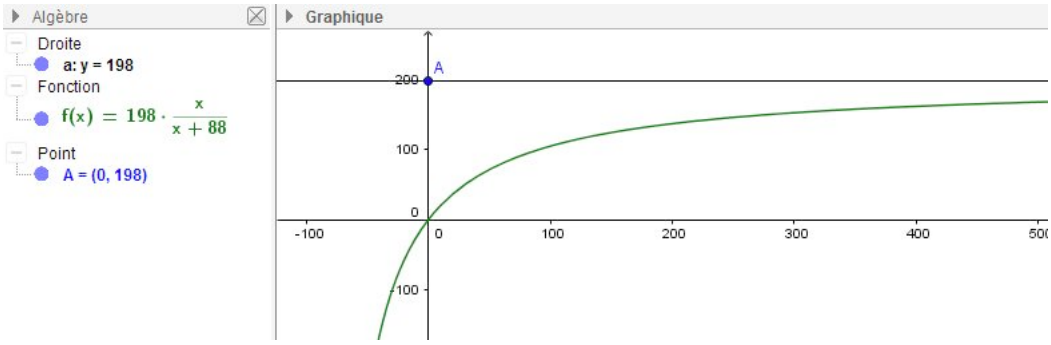
Alternatives

La situation peut être proposée en cinquième comme introduction de la vitesse moyenne en disant sim¬plement : « Un automobiliste a mis 6 min et 43 s pour parcourir les 9 km du tronçon. Sera-t-il en infraction ? »

En jouant sur les variables didactiques, on peut également :
• soit proposer, pour le premier tronçon,1000 m à 150 km/h ou encore 300 m à 100 km/h ;
• soit faire intervenir la « marge technique » de 5% prise en compte par le radar dans la mesure de la vitesse moyenne sur tout le tronçon. Les calculs de pourcentages seront alors des pistes pour mener un travail sur les pourcentages.

Pour aller plus loin sur le « radar tronçon », côté enseignant

La vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet est une fonction homographique de la vitesse moyenne des 5 derniers kilomètres : $9 \div \left(\frac{1}{22} + \frac{4}{v}\right) = \frac{198v}{v+88}$. Cette forme montre que quelle que soit la vitesse moyenne sur les 4 derniers kilomètres, la vitesse moyenne sur l'ensemble du tronçon ne peut pas dépasser 198 km/h.



Voici une illustration de cette limite sous GeoGebra.

L'étude de ce phénomène pourrait être proposé en prolongement, pour un groupe qui aurait terminé le travail ou qui se sentirait capable de répondre à la question. « Observez ce qu'il se passe quand on aug-mente indéfiniment la vitesse dans les 4 derniers kilomètres. Comment expliquer cela ? ».

Annexe 7 : Variantes « Ticket de grattage »

Première variante

En 2013, l'organisme de jeux vendant ces tickets de grattage a vendu 405 millions de tickets.
• Une fois déduite les sommes remises aux gagnants, combien la vente des tickets a-t-elle rapporté à l'organisme ?

Deuxième variante

Voici deux tableaux de lots : le premier datant de septembre 2012 et le deuxième de septembre 2013. Chaque émission est répartie en blocs de 15000000 unités de jeu. Le prix de vente d'un ticket est 5 €.

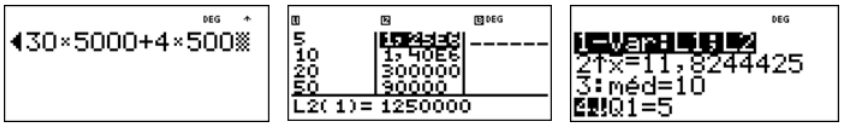
NOMBRE DE LOTS	MONTANT DU LOT	TOTAL		NOMBRE DE LOTS	MONTANT DU LOT	TOTAL
3	500 000 €	1 500 000 €		3	500 000 €	1 500 000 €
3	100 000 €	300 000 €		3	100 000 €	300 000 €
5	10 000 €	50 000 €		5	10 000 €	50 000 €
40	5 000 €	200 000 €		10	5 000 €	50 000 €
1 800	1 000 €	1 800 000 €		1 000	1 000 €	1 000 000 €
3 750	500 €	1 875 000 €		3 000	500 €	1 500 000 €
112 500	100 €	11 250 000 €		112 500	100 €	11 250 000 €
112 500	50 €	5 625 000 €		112 500	50 €	5 625 000 €
375 000	20 €	7 500 000 €		375 002	20 €	7 500 040 €
1 760 000	10 €	17 600 000 €		1 772 496	10 €	17 724 960 €
1 560 000	5 €	7 800 000 €		1 500 000	5 €	7 500 000 €

1. Quel est l'intérêt d'avoir modifié le règlement de ce jeu entre 2012 et 2013 pour l'entreprise qui le com¬mercialise ?
2. Quelles en sont les conséquences pour le joueur ?

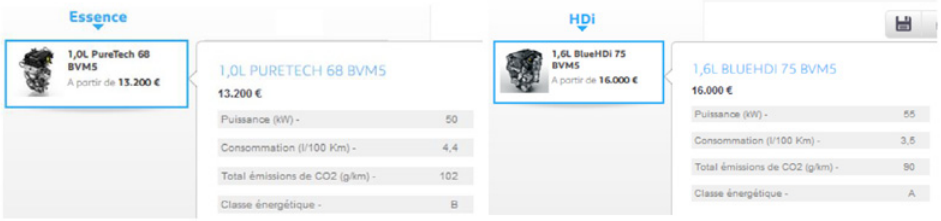
Pour répondre à la première question, un usage des listes de la calculatrice peut être proposé aux élèves. Pour évaluer le montant total des gains, la calculatrice n'a pas assez de mémoire pour faire le calcul en un bloc, comme nous le présentons ci-après pour un ticket d'une autre année.

G=1 250 000 × 5 + 1 400 000 × 10 + ... + 4 × 50 000 + 4 × 100 000 + 3 × 500 000

Ce problème peut être résolu en utilisant des listes dans le menu stat de la calculatrice collège, ce qui prépare nos élèves pour le lycée où ils retrouveront l'usage de ces fonctionnalités des calculatrices. Cette manipulation sera l'occasion d'un travail sur les nombres via les affichages en écriture scientifique fournis par la calculatrice (voir liste L2).



Annexe 8 : Choix de données pour exposer ce germe de ressource



Source

Au vu de la copie d'écran ci-dessus, le choix des données peut reposer sur :
- le prix de la voiture « À partir de » comme celui proposant les options initiales de base;
- une puissance de moteur considérée équivalente (autour de 50 kW) ;
- une consommation mixte (sans entrer dans les détails) ;

• un prix de carburant choisi comme moyenne des extrêmes à un temps donné ici en Seine-Maritime.

Bibliographie – sitographie

• Les pages dédiées au thème mathématiques et quotidien du site de l'IREM de Rouen
• Prise d'initiative pour tous et travail hors la classe au collège, une ressource de l'académie de Créteil.
• Mieux consommer grâce aux mathématiques, ADAM E., DAMAMME G., VENTELON H., 2010, Tome 1, Hermann.
• Mieux consommer grâce aux mathématiques, ADAM E., DAMAMME G., VENTELON H., 2012, Tome 2, Hermann.
• Les maths au quotidien, COLONVAL M., ROUMADNI A., 2009, Ellipses.
• Mathématiques classe de 3ème, Méthodes en Pratiques, D. DUPONCHEL, M. BILAS, 2011, Scéren.
• Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les durées, IREM de POITIERS, Groupe Collège, 2010.
• Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les longueurs, IREM de POITIERS, Groupe Collège, 2012.
• Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les aires, IREM de POITIERS, Groupe Collège, 2010.
• Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les angles, IREM de POITIERS, Groupe Collège, 2010.
• Enseigner les mathématiques en 5ième, 4ième, 3ième à partir des grandeurs. Pourquoi ? Comment ?, IREM de POITIERS, Groupe Collège, 2014.
• Nombres Grandeurs Proportions, Du quotidien aux mathématiques, ROUCHE N., 2006, Ellipses.
• Géométrie, Du quotidien aux mathématiques, ROUCHE N., 2006, ellipses.
• 100 énigmes de tous les jours, 2014, SOUFFLET M., Vuibert.

Sur le thème de « l'eau » :

• Des images de compteurs d'eau
• Comment lire une facture d'eau
• Petit guide des matériels pour économiser l'eau

Sur le thème « Essence ou diesel » :

• Les ventes des voitures essence dépassent celles des voitures diesel
• Le prix de revient d'un kilomètre (Argus-2015)

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Ressources transversales

Les mathématiques par les jeux

Accéder à la liste des jeux exposés dans cette ressource

Visionner la vidéo
Du plaisir à l'apprentissage

Une ressource produite dans le cadre de la stratégie mathématiques en partenariat avec le réseau des IREM.

irem

De nombreux professeurs font jouer leurs élèves dans leur classe. Il s'agit de jeux pédagogiques, avec un cadre et des objectifs. Ceux-ci se différencient des « jeux de la vie courante » même si certains partent des règles de jeux populaires.

Chacun peut en retirer de grands bénéfices. La pratique du jeu permet de gagner du temps dans la compréhension des connaissances, rend plus pérennes les savoir-faire essentiels en mathématiques et leur permet de développer des compétences diverses

Grâce à l'expérience de professeurs de tous horizons, un groupe de travail s'est constitué, autour de quelques professeurs, inspecteurs et enseignants-chercheurs des académies de Lille et Nantes, avec l'appui des IREM de Caen, Besançon, Montpellier, Lille et Nantes, en ayant pour objectif principal d'aider les professeurs souhaitant s'investir dans cette démarche pédagogique.

C'est ainsi que ce groupe a eu pour ambition de proposer un document opérationnel.

Dans un objectif pédagogique, il a identifié des jeux déjà existants et présentant un intérêt particulier, en a modifié certains dont les règles sont connues et en a construit d'autres.

Pour rendre ces approches plus accessibles, des films ont été tournés et montés par CANOPÉ Nantes ; on y accédera en cliquant sur les liens en marge du document ou à cette adresse.

Les activités ludiques présentées dans cette ressource ont leur place à différents moments des apprentissages et peuvent également être utilisées comme outils de remédiation ou de réinvestissement.

Tous les jeux disponibles et efficaces ne sont pas recensés dans ce document qui se limite à une sélection dans un choix immense, et ne demande qu'à être enrichi.

Pourquoi jouer en mathématiques ?

Parce que les mathématiques forment une discipline exigeante mais nécessaire à tous

Un objectif essentiel de l'enseignement des mathématiques pour la vie sociale, citoyenne et professionnelle de nos élèves, est la résolution de problèmes, et notamment la mise en place de stratégies.

Le jeu amène l'élève à raisonner : faire des choix, prendre des décisions, anticiper un résultat sont autant d'attitudes que l'on attend d'un élève lors de la résolution de problèmes ou de tâches complexes. Le jeu développe donc les prises d'initiatives des élèves.

Cependant, des élèves peuvent se trouver bloqués en cours de résolution de problème ou se tromper par manque de facilité au niveau du calcul. Grâce à certains jeux, le professeur fait faire davantage d'exercices répétitifs avec ses élèves (tout en les motivant) qu'en donnant des pages de calculs à réaliser.

Ce qui est attendu et souhaité c'est aussi une construction pérenne de ces automatismes de calcul. Le jeu facilite cette construction.

Parce que cela donne du sens aux notions mathématiques des programmes

Énoncer de manière magistrale une propriété ou une définition n'implique pas nécessairement sa compréhension et cela même si on l'apprend par cœur. L'utiliser, la manipuler et la réinvestir dans des contextes lui donne du corps et tout son sens.

Le jeu peut être un outil pertinent à différents moments des apprentissages :
- introduction d'une nouvelle notion ;
- construction d'automatismes ;
- approfondissement / remédiation.

On peut également réinvestir le moment du jeu, y faire référence au cours des apprentissages. Faire revivre cette situation permet d'inscrire le jeu comme une réelle activité mathématique dans une démarche pédagogique. Le jeu pédagogique, considéré au même titre qu'une activité mathématique plus ordinaire (entraînement par des exercices, tâche complexe, etc.), est valorisé aux yeux de chacun.

Parce que les mathématiques sont vivantes et se prêtent facilement aux activités ludiques

Le contexte d'apprentissage est important. Au cours d'un jeu, le contexte se veut convivial avant tout. L'utilisation du jeu permet de changer l'image rébarbative que peuvent avoir les mathématiques pour certains élèves et ainsi les mobiliser davantage. Du fait que les enfants sont naturellement joueurs, ils se lancent et sont plus actifs. Avec le jeu, ils peuvent prendre du plaisir et développer ainsi une relation nouvelle à la discipline. Leur investissement n'en sera que plus grand par la suite, même lors d'une activité plus « classique ».

La pratique du jeu permet donc de gagner du temps dans la compréhension des connaissances et rend plus solides les savoir-faire mathématiques développés à cette occasion.

Parce que l'écrit n'est pas obligatoire

Un élève peut ne pas réussir à additionner dans une page de calcul en évaluation et très bien compter les scores dans des jeux de cartes comme le bridge ou le tarot.

Perdre à un jeu n'a pas la même conséquence pour un élève que de se retrouver en situation d'échec face à un exercice. La peur de se tromper est encore trop présente chez certains élèves qui préfèrent en conséquence « ne rien écrire » sur leur feuille, voire ne pas s'engager dans un exercice de peur de se retrouver confrontés à leurs difficultés. Pris dans le jeu, l'élève peut se permettre plus facilement des procédures qu'il se serait interdites dans le cadre d'un « cours de maths ». Le jeu amène donc l'élève à se décomplexer, à tenter, essayer, faire des erreurs… ce qui est indispensable aux apprentissages.

De plus, en jouant par équipes, les élèves acceptent plus facilement l'aide de leurs camarades.

On s'autorise à ne pas avoir un travail soigné. Certains documents peuvent être à usage unique.

Un des atouts du jeu réside dans la décentration des objets d'apprentissages, qui ne sont plus regardés pour eux-mêmes mais pour gagner dans un espace de jeu spécifique. L'élève se trouve dans une situation de joueur (et plus uniquement d'élève).

Parce que jouer est naturel chez la plupart des enfants… et des adultes aussi

Tous les enfants ont une propension naturelle à jouer, c'est même le mode d'apprentissage premier du petit enfant, qui lui permet d'essayer des processus mentaux.

La pratique du jeu conduit à développer chez les enfants des compétences mobilisant logique, stratégie, rigueur, concentration, mémoire et capacité d'abstraction, qui sont toutes des facteurs de réussite.

Il s'agit davantage d'un partage des connaissances plutôt qu'un travail individuel. Les élèves s'investissent lorsqu'ils sont mis en activité et lorsqu'ils mettent du sens dans ce qu'ils font.

La posture de créativité du professeur participe pleinement à l'implication des élèves dans le travail proposé. Ce changement de positionnement lors du jeu amène les élèves à être autonomes et à aller au-delà des attentes du professeur.

La pratique régulière du jeu est ainsi une modalité d'apprentissage efficace dont on aurait tort de se passer. Une dynamique d'équipe, d'entraide, de collaboration peut émerger dans la classe.

Les adultes sont aussi joueurs, mais ne se l'avouent pas volontiers.

Parce que jouer développe des attitudes sociales

Visionner la vidéo
Le travail de groupe, la coopération des élèves.

Respecter des règles, prendre des initiatives, apprendre à coopérer, accepter de perdre sont autant de compétences développées.

Même si la compétition existe, celle-ci est sans enjeu pénalisant et permet donc à l'élève de se surpasser.

Parce que les mathématiques sont, en elles-mêmes, une sorte de jeu avec des règles.

La construction d'une figure de géométrie, la démonstration d'une propriété, le calcul sur des expressions algébriques : voilà autant de situations mathématiques se traduisant par une production qui pour être « réussie » doit « obéir aux règles du jeu » et « parvenir au but ».

Je veux essayer de mettre un jeu en place dans mon cours : comment faire ?

Par quoi commencer ?

Il est préférable de commencer par des jeux courts sans déplacement, nécessitant peu de matériel et avec des règles très simples. Il est préférable de tester d'abord les jeux par deux, qui ne nécessitent pas de changement de place et utilisent peu de matériel.

Le créneau horaire choisi est important, en particulier pour les séances au cours desquelles une règle est expliquée.

Si les règles sont nombreuses, elles peuvent, par exemple, être introduites au fur et à mesure du jeu.

Il est aussi possible de proposer à un collègue de venir en co-enseignement les premières fois.

Il faut accepter que le vocabulaire utilisé soit approximatif. Il est compréhensible d'avoir peur de se mettre en danger et de ne pas tout contrôler.

Quand jouer ?

Les temps de jeu varient en fonction du jeu choisi. Certains se prêtent bien à l'introduction de notions, d'autres à du réinvestissement.

- Faire des jeux courts un rituel de début ou de fin de séance en facilite la mise en place dans la classe. Les jeux de calcul mental s'y prêtent bien notamment.
- Ne pas réserver les jeux à ceux qui ont fini. Le jeu est une activité pédagogique à part entière et ne doit pas se limiter à du soutien ou à une récompense.
- Certaines séances situées à des heures où la concentration des élèves est difficile à obtenir, peuvent aussi être une occasion favorable pour jouer.

Silence, on joue !

Il faut accepter le bruit de fond. En effet, les élèves parlent, expérimentent et débattent. C'est un jeu, les élèves « risquent » donc de s'amuser à faire des mathématiques.

Le temps de jeu crée un espace à part dans l'activité de l'élève. Cet espace a ses propres règles qui ne sont pas celles de la classe ordinaire. Il est important de bien identifier ce temps de jeu afin qu'il n'y ait pas de confusion avec les règles de vie et de débats lors des autres temps d'apprentissage.

Les élèves ont besoin de temps pour comprendre. Un élève peut être mandaté pour régler l'intensité sonore.

Pour un jeu qui dure une séance, une grande salle peut aussi atténuer le bruit.

Malgré le bruit généré, la réflexion, la qualité et la quantité de travail fournies par les élèves lors d'une séance de jeu sont souvent meilleures que lors d'une séance qualifiée de « silencieuse ».

IDÉE
Comment faire moins de bruit lorsqu'on lance des dés ? Faire lancer dans de petites boites à chaussures ou des couvercles de boites de ramettes à papier (voire y coller un bout de moquette) ou utiliser des gobelets retournés. Il existe aussi des dés en mousse.

Et si certains élèves ne veulent pas jouer ?

• C'est assez rare mais certains élèves ne jouent pas chez eux. Ils mettent plus de temps à comprendre les règles et à mettre en place des stratégies. Il vaut mieux commencer par des jeux courts et faciles d'accès (jeu des angles, puissance 4, Roi du 7, etc).
S'ils ne veulent vraiment pas jouer au début, il est possible de leur donner une fiche d'exercices. Certains n'aiment pas perdre. Cela va avec le respect des règles et vivre ensemble. Mettre les élèves en groupe et changer les groupes permet de varier les gagnants.
• Certains pensent que ce n'est pas sérieux. Or, la définition de « sérieux » nous renvoie ... au jeu : « qui ne peut prêter à rire » ou « qui n'est pas fait pour l'amusement » (Petit Robert). En ce sens, jouer n'est pas « sérieux ». Mais est-ce là un critère de qualité d'un enseignement de mathématiques ? Le.la professeur.e des écoles qui fait jouer ses élèves avec une perspective d'apprentissage n'est pas considéré.e comme « pas sérieux.se ». Pourquoi le « sérieux » s'imposerait-il aux élèves dès qu'ils franchissent la porte du collège ? Rappelons enfin que, d'après Aristote, « il faut jouer pour devenir sérieux » et d'après Albert Einstein, « le jeu est la forme la plus élevée de la recherche ».
• L'échec sous le regard des autres peut être dur à vivre. Il faut savoir dédramatiser et rappeler que... ce n'est qu'un jeu !

Il est important de communiquer et d'expliquer à ces élèves pourquoi on joue, et tout aussi important de prendre le temps de faire un bilan.

Et le regard des parents d'élèves ?

Il est important de faire comprendre que jouer est une autre modalité d'apprentissage qui peut permettre à beaucoup d'élèves de progresser et de s'engager dans une dynamique. Il ne faut pas hésiter à inciter les enfants à jouer avec leurs parents. Il est possible de prêter des jeux, notamment pendant les vacances.

Que vont penser les collègues ?

Certaines évolutions dans les pratiques pédagogiques nécessitent du temps. La pratique du jeu permet de gagner du temps sur l'acquisition de connaissances et de savoir-faire. Ouvrir sa porte ou accompagner ses collègues peut aider. Bien souvent, la pratique du premier jeu suffit à faire comprendre les divers intérêts de l'enseignement par le jeu.

Que va dire le chef d'établissement ?

La création de groupes de travail académiques[1] pilotés par les inspections pédagogiques régionales de mathématiques concernées, en collaboration avec le réseau des IREM et la production d'une ressource nationale constituent des actions officielles qui donnent une vraie dynamique et une légitimité à cette pratique. Cette action s'inscrit dans le cadre de la stratégie mathématiques, lancée à décembre 2014 par la ministre de l'Education nationale. Ce plan vise notamment à développer la dimension ludique des mathématiques.

1. Académies de Nantes et Lille

Il est possible d'inviter le chef d'établissement en observation dans la classe. Les jeux peuvent aussi être proposés lors des journées portes ouvertes.

Que fait le professeur lorsque les élèves jouent ?

Visionner la vidéo
Le rôle du professeur

L'enseignant doit laisser les élèves jouer et débattre entre eux. Il doit être présent tout en sachant garder ses distances. Il a un rôle d'observateur et d'arbitre. Tout d'abord, il doit s'assurer que tous se mettent effectivement au travail. Il doit répondre aux sollicitations pour débloquer une situation particulière, préciser une règle du jeu et surtout faire en sorte de faire réfléchir les élèves. L'idée n'est pas de leur donner une réponse, mais de les pousser à raisonner.

En fin de séance, le professeur peut organiser une explicitation collective, individuelle ou par groupe de ce que les élèves ont appris, appris à faire et compris. Il est possible de faire rédiger un bilan. Une fiche d'exercices peut compléter de manière plus académique les connaissances travaillées lors du jeu.

Que peut être une trace écrite ?

Il est important de ne pas la formaliser trop vite et de la faire mettre en place par les élèves. Ce ne devrait pas être aux professeurs de la donner.

Il est par exemple envisageable de photographier le jeu et d'insérer la photo dans le cahier. Certains jeux au cours desquels des documents papiers sont donnés (Decitri, Quem's, etc) peuvent être collés dans le cahier et servir efficacement de trace écrite.

C'est aux élèves d'établir un bilan, soit personnel, soit individuel, qui pourra être sous la forme d'une affiche ou d'une carte mentale où les élèves pourront écrire leurs questions, ce qu'ils ont aimé ainsi que leur ressenti sur la séance. Certains instants pourraient aussi faire l'objet d'une trace écrite (rebondissement remettant en cause une stratégie ou situation marquante sur l'application d'une notion ou un automatisme).

Les élèves peuvent aussi être invités à créer eux-mêmes de nouvelles grilles (par exemple pour la Route des maths, Quatre alignés c'est gagné, etc.).

Certains jeux permettent aux élèves d'acquérir des réflexes de calculs ou des stratégies de raisonnement. La trace écrite n'est donc pas indispensable.

Que peut-on évaluer ?

L'investissement des élèves est visible et gagne à être valorisé, car ils pratiquent effectivement une activité mathématique.

Cependant, tout n'est pas à évaluer tout le temps : préserver l'espace du jeu de l'évaluation peut en effet permettre d'amener les élèves, notamment les plus fragiles, à s'autoriser des stratégies d'engagement. Pour le professeur, il s'agit d'un moment de prise d'informations

permettant de mieux comprendre et connaître les élèves que sur une évaluation ponctuelle et traditionnelle.

Le jeu permet enfin de valoriser (voire d'évaluer) des élèves sur d'autres focales, notamment sur des compétences sociales dans le cadre du socle commun de connaissances, de compétences et de culture.

Les professeurs faisant jouer dans leurs classes parlent autrement de leurs élèves (notamment en conseil de classe).

Après une séance, faire un bilan oral avec les élèves leur permet de se rendre compte de ce qu'ils ont travaillé et appris.

Comment expliquer une règle ?

On peut procéder par étapes et donner les règles progressivement. Il est important de ne pas y passer trop de temps.

La première partie peut être jouée « pour rire » (« pour du beurre ») avec l'ensemble de la classe. Parfois, l'utilisation du vidéoprojecteur avec une version numérique du jeu peut également se révéler être une aide précieuse.

Quelles compétences peuvent être travaillées lorsque l'on fait jouer ?

Suivant le jeu et la pratique du professeur, toutes les compétences mathématiques (Chercher, Modéliser, Calculer, Raisonner, Représenter, Communiquer) peuvent être mises en œuvre. La pratique du jeu participe pleinement à l'acquisition des cinq domaines du socle de compétences de connaissances et de culture.

Deux exemples de jeux

Cette partie permet de mettre en avant trois jeux typiques illustrant un usage possible des jeux dans la classe. De nombreux autres jeux ainsi qu'un tableau synoptique figurent en annexe de ce document.

Le jeu des angles

Télécharger l'annexe « Plus près des angles ».

Visionner la vidéo : Le jeu des angles : les trois étapes

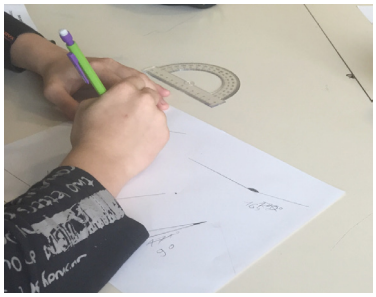
Le jeu vise à développer une notion intuitive d'angle et de mesure d'angle, à partir de connaissances tout à fait élémentaire sur les angles (cycle 3). La comparaison des mesures d'angles vient assez naturellement dans ce contexte.

Ce jeu se réfère principalement aux parties « Grandeurs et mesures » et « Géométrie » du programme du cycle 3. Il répond aux attendus de fin de cycle « Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques », « Utiliser les instruments de mesure spécifiques de ces grandeurs » et « Reconnaitre, nommer, décrire, reproduire, représenter des figures géométriques ».

Le jeu est facile à mettre en place et demande peu de matériel (vidéoprojecteur, rapporteurs). Il permet aux élèves de travailler l'ordre de gran¬deur de la mesure d'un angle, et notamment éviter une mauvaise utilisation du rapporteur

La progression est trois étapes. Au cours des deux premières étapes, le professeur projette une série d'angles et les élèves donnent une estimation de leur mesure.

- **Étape 1 : estimation d'angles proches de l'angle droit**. Il convient de débuter par l'angle droit (permettant un rappel des acquis antérieurs) et des angles très proches.
- **Étape 2 : estimation d'angles variés**. Il s'agit ensuite de progresser vers des angles différents, en débutant par des angles avec des angles importants, ayant pour mesures 45°, 135° et éventuellement 30°, 60°, 120°. Le vocabulaire lié aux angles (aigu, obtus, sommet, côté) est peu à peu introduit et repris sous forme de trace écrite.
- **Étape 3 : de l'estimation à la mesure**. Chaque binôme propose, au binôme voisin, des angles tracés sans rapporteur (3 ou 4). Les membres d'un binôme discutent et proposent une estimation des mesures des angles. La validation se fait à l'aide du rapporteur, que les élèves découvrent eux-mêmes sans formalisation préalable.



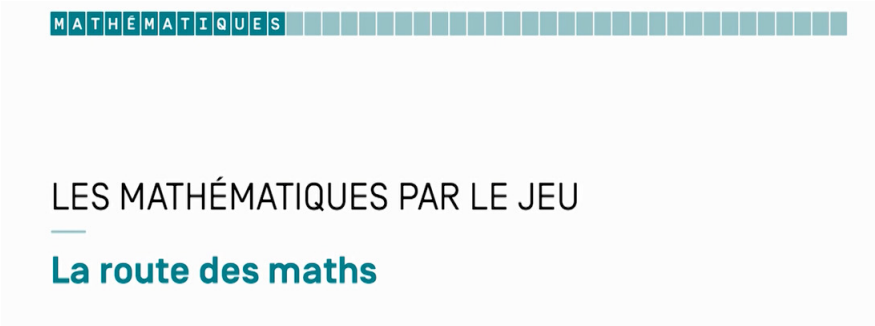
Intérêt du jeu

L'expérience montre que :
- les élèves visualisent mieux les angles avant leur construction ;
- les élèves maîtrisent mieux le sens des graduations du rapporteur ;
- les élèves réinvestissent le savoir-faire pour la vérifica¬tion des figures ;
- les élèves estiment correctement les angles, positionnent correctement leur rapporteur sans effort.

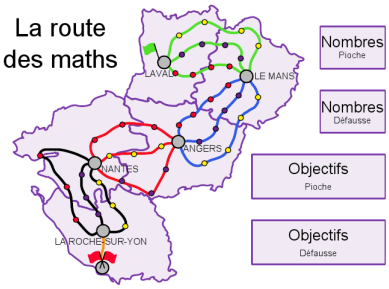
Télécharger l'annexe « La route des maths ».

La route des maths

Visionner la vidéo : La route des maths



Il s'agit d'un jeu de coopération se basant sur un plateau. L'idée initiale de ce jeu provient du jeu Fujiyamaths de l'IREM de Caen. C'est une course à étapes de difficultés croissantes : les équipes déplacent leurs pions de Laval vers la côte vendéenne et résolvent des énigmes (cartes « objectif ») à chaque étape, les collections d'énigmes changeant lorsque les équipes se rejoignent sur les villes-étapes. Le temps d'une partie dépend des objectifs fixés (entre une demi-heure et une heure).



Un des grands avantages de ce jeu est que la règle et les cartes peuvent être utilisées sur différentes notions de la sixième à la troisième. Chaque notion est travaillée à l'aide des cartes « objectif ».

Les parties du programme abordées par ce jeu varient ainsi suivant les cartes « objectif » prises. Ainsi, on peut introduire les fonctions affines, les puissances, les fractions.

Le dernier trajet (qui relie La Roche-sur-Yon à la plage) fournit l'occasion de proposer un bilan (éventuellement guidé) : créer une nouvelle carte objectif, écrire la règle découverte, résoudre collectivement une dernière énigme, etc.

Avantages pédagogiques de ce jeu

• Ce jeu est coopératif et incite chacun à s'investir. L'erreur n'est pas stigmatisée. La part de hasard permet à chacun de pouvoir avancer.
• Une notion peut être intégrée progressivement. Les cartes « objectif » changent à chaque étape.
• Les élèves s'autocorrigent. Par contre un même groupe peut se conforter ensemble sur une même erreur ; la place du professeur est alors importante. On peut aussi attribuer un rôle de maitre de jeu à un élève qui dispose d'une calculatrice.
• La règle est à expliquer la première fois. Lorsque l'on reprend le jeu avec de nouvelles notions, il n'y a pas de nouvelles explications à donner. On ne se lasse pas de ce jeu. En effet, les cartes « objectif » changent à chaque fois.
• Il n'y a pas de passage à l'écrit, ce qui peut motiver des élèves à s'engager.
• Après le jeu, un bilan peut être fait par les élèves sur ce qu'ils ont appris. Ce bilan peut être différé dans le temps dans une séance suivante.

Un avantage extrêmement pratique pour le professeur : le même plateau de jeu ainsi que les mêmes cartes « nombre » sont utilisés pour toutes les notions et tous les niveaux. Le temps gagné en plastification, découpage et en préparation est significatif.

Quelques exemples d'intégration des jeux dans des projets à long terme

Utiliser le jeu de Bridge dans le cadre de l'accompagnement personnalisé

Le document fourni en annexe propose de découvrir et d'utiliser comme outil pédagogique le jeu de bridge afin d'initier (en particulier) les élèves au raisonnement dans un contexte différent de ceux habituellement vécus par les apprenants et leur professeur. Les tests effectués dans différentes classes ont démontré qu'un débat peut assez vite s'instaurer autour des différentes stratégies possibles pour résoudre les différents problèmes posés.

Cette animation pédagogique peut par exemple trouver sa place dans le cadre de l'accompagnement personnalisé en sixième, mais aussi en activités périscolaires, etc.

Dans la progression pédagogique choisie, un temps d'appropriation des règles du jeu et du jeu lui-même est nécessaire afin de familiariser les apprenants au vocabulaire spécifique et au déroulé d'une partie de bridge. Dans chacune des séances programmées, l'usage effectif d'un jeu de cartes peut permettre à certains élèves de mieux contextualiser la situation étudiée. Chaque phase d'apprentissage est l'occasion d'aborder, travailler, consolider différentes connaissances ou compétences. Anticiper les besoins, c'est une manière d'y répondre, certes collectivement, mais avec l'avantage qu'on ne répond pas a posteriori à un manque, à une difficulté, mais qu'on prévient les difficultés en posant des jalons explicites avec les élèves.

L'intérêt et la plus-value des différents textes résident dans le fait qu'ils font appel pour la plupart d'entre eux à un bagage mathématique relativement restreint. C'est pourquoi la même activité peut être proposée à des élèves de niveaux très différents, chacun exploitant les outils à sa disposition pour la traiter. Il est d'usage de dire que certaines réponses aux questions posées se résument à « il suffit de savoir compter jusqu'à treize ». C'est oublier qu'il faut au minimum savoir ce qu'il faut compter et pourquoi on doit le compter. Si le calcul mental et sa maitrise sont souvent cités, l'analyse des résultats et le classement d'un tournoi amènent de nombreux exemples permettant l'introduction et l'utilisation des entiers relatifs et des pourcentages.

Au-delà de l'aspect calculatoire, de nombreuses compétences sont travaillées à travers ces activités. Il faudra mobiliser son attention à chaque instant, raisonner et argumenter régulièrement, analyser et anticiper, rechercher l'information nécessaire à la découverte d'un plan de jeu cohérent, etc.

L'expérience montre en effet qu'une partie de bridge demande :
- l'analyse des enchères effectuées à la table, la recherche des informations que l'on peut en déduire sur la forme des mains de chacun des joueurs ;
- la mémorisation des cartes jouées et les conséquences sur l'emplacement des cartes qui nous intéressent ;
- de savoir rechercher parmi les informations connues celles qui auront de l'importance et celles que l'on peut négliger.

À tout moment, il faut donc veiller à se poser les bonnes questions et en chercher, à travers les informations connues et reçues, un maximum de réponses.

De temps à autre, des pistes de différenciation seront proposées. En particulier, il est possible de développer pour les élèves les plus avancés des activités de recherche originales.

À l'issue de ce parcours, les élèves comme leur enseignant auront découvert de nouvelles pratiques pédagogiques.

D'autres pistes n'ont pas été explorées. Il est ainsi possible d'introduire le calcul des probabilités à partir de ce jeu. On consultera avec profil le livre édité par CANOPÉ sur ces questions.

Plan du document proposé en annexe

- Séance 1 : présentation du bridge et premières règles
- Séance 2 : comment évaluer la force de son jeu
- Séance 3 : à la recherche du contrat
- Séance 4 : applications mathématiques
- Séance 5 : Etude de la marque et de techniques simples de jeu
- Séance 6 : Découverte d'un théorème
- Séance 7 : Exercices de raisonnement
- Séances 8 à 10 : Ensemble d'activités mettant en œuvre les connaissances acquises.

Pour chacune d'entre elles, deux supports sont proposés. Le diaporama est destiné, pour ceux qui le désirent, à présenter le travail à faire et animer la séance. Le texte propose quelques pistes pédagogiques, des recommandations et quelques éléments de réponse.

Cette animation pédagogique peut par exemple trouver sa place dans le cadre de l'accompagnement personnalisé en sixième, mais aussi en activités périscolaires, etc.

Utiliser le jeu des échecs

Un travail du même genre est envisageable avec le jeu d'échecs. Plusieurs documents (dont un livre édité par CANOPÉ) existent et recensent diverses activités pouvant servir de base à un projet à long terme autour de ce jeu.

Pour les échecs comme pour le bridge, deux remarques importantes sont à faire :
• le travail proposé vise à développer de nombreuses compétences qui seront certes utiles en mathématiques mais plus globalement dans l'ensemble des matières enseignées au collège ;
• le fait de proposer des exercices de raisonnement ne nécessitant pas de connaissances mathématiques particulières permettra à certains élèves de ne pas être bloqués par un contenu mathématique non maîtrisé. Pour les élèves plus scolaires, cela servira à leur faire apprécier des chemins moins balisés que ceux auxquels ils sont habitués (et qu'ils affectionnent même).

Un exemple réalisé dans l'académie de la Réunion est décrit dans le document intitulé « Projet d'innovation : jeu d'échec et socle commun ». Un bon argumentaire peut aussi être trouvé sur le site de l'association canadienne Echecs et Maths.

Création d'un jeu sur ordinateur

L'algorithmique a fait son entrée dans les programmes de mathématiques du cycle 4 (thème E).

À partir de ce thème, les élèves peuvent s'initier à la problématique de la création des jeux vidéo en créant un projet de jeu à leur mesure. Suivant leur niveau, leur envie et leurs capacités ils pourront développer de nombreuses compétences et connaissances. Le travail permet également de favoriser le travail collaboratif. Au final, les élèves apprendront :
• les bases de l'algorithmique, ce qui leur servira dans le cadre de leurs futures études ;
• à travailler ensemble, confortant ainsi le travail fait en EPI ;
• qu'il est possible d'apprendre par soi-même (l'autonomie, la créativité dont ils vont devoir faire preuve leur montreront la nécessité d'introduire certains concepts) ;
• à découvrir ou mettre en œuvre de nombreuses connaissances mathématiques en lien avec les programmes (les transformations et le repérage en sont deux exemples simples) ;
• à mettre en œuvre diverses compétences telles qu'analyser une situation, la modéliser, structurer sa pensée, prendre des initiatives, etc.

De nombreux documents sont actuellement publiés sur ces questions, notamment dans le cadre des TraAM. Parmi les nombreuses ressources disponibles, il peut être utile de consulter les suivantes : sites suivants :
• la ressource d'accompagnement du programme de mathématiques du cycle 4 : Algorithmique et programmation ;
• les TraAm 2015-2016 ;
• la remarquable contribution didactique de l'académie de Rennes : Algorithmique en mathématiques du collège au lycée ;
• la contribution de l'académie de Reims : Algorithme et programmation en Mathématiques - Une nouvelle approche pour les élèves et l'enseignant ! ;
• la contribution de l'académie de Nantes : labyrinthe.

D'autres jeux

Pour aller plus loin

En annexes de ce document sont proposés divers jeux présentant tous un intérêt didactique, et soigneusement présentés afin de permettre une prise en main rapide.

Cette annexe récapitule tous les jeux proposés sous forme de tableau. Il va de soi que l'enseignant intéressé par la mise à profit de la dynamique des jeux saura aller plus loin que les quelques jeux proposés et découvrir l'inépuisable richesse de cette approche pédagogique.

Bibliographie et sitographie

Sur le jeu en mathématiques

• Fédération française des jeux mathématiques (FFJM)
La FFJM est une association sans but lucratif dont les objectifs sont de développer les mathématiques par le jeu, orienter la pédagogie vers le problème, rehausser l'image des mathématiques et faire partager le plaisir de la recherche.

Elle organise, en particulier, le Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques, participe à des activités d'édition et d'animation, produit des expositions itinérantes sur les jeux mathématiques et organise chaque année une Université Mathématique d'été pour les élèves du secondaire.

• Le comité international des jeux mathématiques (CIJM)
Association fondée en 1993, le CIJM se donne pour mission de changer l'image des mathématiques auprès du grand public et il fédère près de 40 associations (dont la FFJM) qui touchent plusieurs millions de personnes dans le monde.

Il propose une large plate-forme internationale d'échanges. Il est reconnu par les pouvoirs publics et agréé Association nationale de jeunesse et d'éducation populaire et a reçu l'agrément national de l'Éducation Nationale. Il est soutenu par un comité d'honneur particulièrement prestigieux et de nombreuses institutions et universités scientifiques.

• Animath
L'association Animath a pour but de favoriser l'introduction, le fonctionnement, le développement, la mise en réseau, la valorisation et la reconnaissance institutionnelle d'activités mathématiques dans les écoles, collèges, lycées et établissements de niveau universitaire. Elle veille tout particulièrement au développement d'ateliers et de clubs dans les établissements, à l'essor des compétitions mathématiques et à la participation du plus grand nombre d'élèves et étudiants, filles et garçons, à ce type d'activité.

• La commission « jeux et mathématiques » de l'AMPEP :
Les travaux de cette commission ont été récompensés par le prix Anatole Decerf en 2014.

• APMEP (2007) Comment faire du calcul un jeu d'enfant, Éditions Vuibert (édition « papier » de la brochure Jeux 2) :
Voir la fiche PubliMath.

• APMEP : Des activités mathématiques pour la classe : Jeux, cahiers 5, 6, 7…
- Les brochures Jeux et mathématiques de l'APMEP ;
- Activités de niveau collège ;
- Des activités de niveau maternelle et premier degré.

• Tentatives de définition d'un jeu mathématique (Commission Inter-IREM Pop'maths).

• Le réseau des IREM est aussi une source importante de documents sur ce thème. On citera, par exemple, les travaux réalisés par :
- IREM de Caen, groupe Jeux2Maths ;
- IREM de Lyon (groupe jeux) Jeux.
• Jeux mathématiques à Bruxelles (Joëlle Lamon).
• Présentation d'un diplôme universitaire sur le thème « apprendre par le jeu ».
• Thèse de Nicolas Pelay : Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique.
• Ayme, Y. (2006). Cahiers Pédagogiques: Le jeu en classe. CRAP.
• Brougère, G. (2005). Jouer / Apprendre. Paris: Economica.
• De Grandmont, N. (1999). Pédagogie du jeu. Les éditions Logiques.
• Trouillot, E., Richard, J., Faradji, D., & Le Borgne, P. (2005). Mathématiques et jeux au collège. Hachette.
• Vial, J. (1981). Jeu et éducation : les ludothèques. Presses Universitaires de France.

Sur l'usage du jeu de bridge

• Introduction à la pratique du bridge en classe sur Educscol.
• Les mathématiques du bridge : activités mathématiques pour le collège et le lycée (Réseau Canopé).
• Mathématiques et bridge, compte-rendu d'une action menée en collège à Nantes.
• Une expérience de bridge au collège Montaigne de Poix du Nord.
• Site de la fédération française de bridge.

Sur l'usage du jeu d'échecs

• Actions éducatives – Introduction du jeu d'échec à l'école - B. O n°3 du 19 janvier 2012.
• Introduction du jeu d'échecs à l'école sur eduscol.
• Le jeu d'échecs à l'école comme une autre approche des apprentissages sur eduscol.
• Apprendre avec le jeu d'échecs de l'école au collège (Réseau Canopé).
• Jeu et tournois d'échecs en ligne de l'école au lycée (académie de Rennes).
• Les échecs, sur le site du « matou matheux ».
• Cours d'échecs en lien avec l'activité mathématique au lycée.
• Mon cahier Jeu d'échecs.
• Travail d'écriture (en travail interdisciplinaire).
• Un projet d'innovation (en travail interdisciplinaire).

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Ressources transversales

Mathématiques et maîtrise de la langue

Une ressource produite dans le cadre de la stratégie mathématiques en partenariat avec le réseau des IREM.

irem

Introduction

Toutes les disciplines concourent à la maîtrise de la langue[1] et, réciproquement, la maîtrise de la langue est partie intégrante de l'apprentissage des disciplines. Qu'en est-il en mathématiques ? Quelle activité sur la langue est nécessaire, ou peut être efficace pour l'apprentissage des mathématiques ? Que peut-on viser comme compétences de maîtrise de la langue à travers le travail en classe de mathématiques ?

Les mathématiques recourent à des usages complexes de la langue courante et mobilisent des pratiques langagières qui leur sont spécifiques. C'est pourquoi le travail de la langue et de ses usages en cours de mathématiques (à l'écrit et à l'oral) est indispensable, de même qu'une réflexion plus générale sur le rôle du langage[2]. Cela inclut une réflexion sur l'articulation entre les usages courants de la langue naturelle, un symbolisme particulier et certains usages formels de la langue.

Ces problématiques s'inscrivent dans le premier domaine de formation du socle commun de connaissances, de compétences et de culture « Les langages pour penser et communiquer » et notamment dans les deux objectifs « Comprendre, s'exprimer en utilisant la langue française à l'oral et à l'écrit » et « Comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques, scientifiques et informatiques ».

La question du langage en classe de mathématiques peut être abordée selon trois points de vue :

- les pratiques langagières des mathématiciens peuvent être considérées comme objet d'étude (étude essentielle pour l'enseignant);
- le langage peut aussi être envisagé comme vecteur d'apprentissage dans la mesure où la conceptualisation (l'appropriation, l'apprentissage d'un nouveau concept) passe nécessairement par une activité langagière des élèves, articulée avec son action ;
- enfin, le langage est pour l'enseignant un outil privilégié : support de l'essentiel de ses interactions avec les élèves, indice de l'activité et, par là même, de l'apprentissage des élèves.

C'est à ces questions qu'un groupe de professeurs, enseignants-chercheurs et inspecteurs a tenté de répondre. Les travaux ont été conduits au sein de l'IREM de Paris et avec de multiples collaborations, aboutissant à la présente ressource, articulée selon ces trois axes : le langage en classe de mathématiques comme objet d'étude, comme moyen d'apprentissage, et comme outil pour enseigner.

1. Les compétences de maîtrise de la langue sont, dans les programmes de français, des compétences langagières et linguistiques. Les compétences langagières recouvrent la maîtrise, en réception et en production, des procédures de lecture (compréhension et interprétation des textes et des images de tout type), d'écriture (tout type d'écrit) ; elles comprennent aussi la compréhension des énoncés oraux et leur production adéquate. Le développement des compétences langagières prend appui sur la construction des compétences linguistiques au sens strict (maîtrise de la grammaire implicite, c'est-à-dire le bon usage de la langue et de la grammaire explicite, c'est-à-dire le retour réflexif et analytique qui prend la langue comme objet d'étude).

2. La *langue* est vue comme un réservoir commun de mots, de signes (vocaux ou graphiques) avec ses règles d'usages (dictionnaire, grammaire, etc.). Le langage désigne très largement ici l'expression et la communication des individus à l'aide d'une langue.

SOMMAIRE

Introduction 2

Les langages des mathématiques : un objet d'étude 3

- Des registres variés pour désigner des objets ou leurs propriétés 3
- Langue naturelle et formalisme 4
- Écrit et oral 5
- Spécificités liées au lexique et à la grammaire 6
- Formulation des preuves 7
- Discours d'accompagnement de l'activité mathématique 8
- En français 9
- Conclusion 9

Le langage : un moyen d'apprentissage 9

Le langage : un outil pour enseigner 11

Conclusion 12

Exemples d'activités en classe 12

- Travailler les formulations 12
- Narration de recherche 15
- Restauration de figure, figure téléphonée, programme de construction 16
- Bilan de savoir 16
- Énoncé d'exercices audio, résolution orale d'exercices audio, utilisation de la vidéo 17
- Dictée 17
- Dictionnaire collectif, affiche « Comment dire ? » ou « Que veut dire ? » 18

Ressources bibliographiques 19

- Dans la classe 19
- En français 19
- Documents institutionnels 19
- Généralités, recherche 20
- Dictionnaires 21

Retrouvez Éduscol sur

Les langages des mathématiques : un objet d'étude

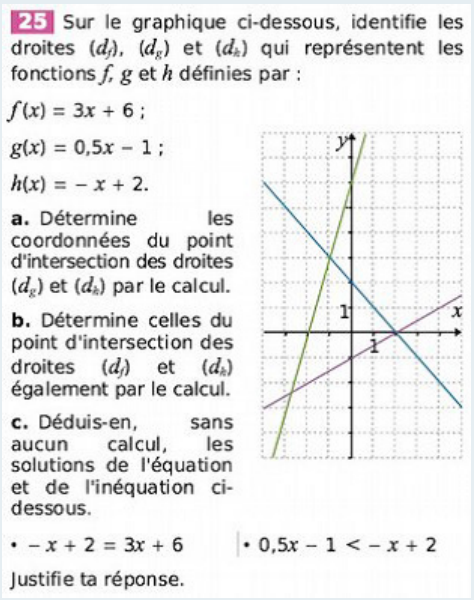
Faire des mathématiques suppose de manipuler des objets spécifiques de la discipline, des propriétés de ces objets, des relations entre objets, et des preuves de ces propriétés et relations. Les objets de la discipline sont fondamentalement abstraits (on ne peut pas montrer une fonction ou une droite, au même sens qu'on montre une chaise) et donc essentiellement manipulés via leurs représentations, notamment à travers le langage. Par ailleurs, l'activité mathématique, y compris langagière, passe, de façon incontournable, par la manipulation de variables. Cette manipulation (introduction et désignation des variables, formulation des quantifications universelles ou existentielles) n'est pas naturelle dans la langue usuelle.

Des registres variés pour désigner des objets ou leurs propriétés

Les pratiques langagières des mathématiciens se caractérisent par leur usage spécifique de la langue naturelle (du point de vue lexical, mais aussi grammatical et syntaxique), ainsi que par l'articulation de la langue naturelle avec d'autres registres : des registres symboliques (les chiffres, les lettres, les signes opératoires) et des registres graphiques (celui du dessin en géométrie, les graphiques cartésiens, les tableaux).

Registres

Pour évoquer le nombre correspondant à la quantité de trois dizaines et quatre dixièmes, on peut parler du nombre « trente virgule quatre » (parfois « trente virgule quarante », notamment dans un contexte monétaire), on peut écrire « 30,4 » ou utiliser des fractions décimales 30+4/10...
Ce type de connais¬sances commence à être abordé au primaire[3].
Pour manipuler la fonction qui à un nombre réel x associe son carré (ceci étant une première façon de la désigner), on peut parler de « la fonction carré », de « la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, telle que, quel que soit x réel, $f(x) = x^2$ ». De manière plus générale pour une fonction, on peut utiliser la notation avec la flèche $\mapsto$, ou encore, dans certains contextes, donner la courbe représentative de la fonction dans un repère cartésien, la manipuler à travers un logiciel de géométrie dynamique, ou manipuler les valeurs de la fonction dans un tableau de valeurs, ou dans un tableur.
Une part importante des exercices sur les fonctions en 3e consiste d'ailleurs à travailler ces changements de registre (voir ci-dessous).



25 Sur le graphique ci-dessous, identifie les droites (d_f), (d_g) et (d_h) qui représentent les fonctions f, g et h définies par :

$f(x) = 3x + 6$;

$g(x) = 0{,}5x - 1$;

$h(x) = -x + 2$.

a. Détermine les coordonnées du point d'intersection des droites (d_g) et (d_h) par le calcul.

b. Détermine celles du point d'intersection des droites (d_f) et (d_h) également par le calcul.

c. Déduis-en, sans aucun calcul, les solutions de l'équation et de l'inéquation ci-dessous.

• $-x + 2 = 3x + 6$ • $0{,}5x - 1 < -x + 2$

Justifie ta réponse.

(source : Sésamath 3e 2012, p139)

3. On pourra se reporter au Document d'application des programmes de mathématiques du cycle des approfondissements de l'école primaire, 2002.

Pour parler de deux droites perpendiculaires (désignées par les lettres « d » et « d' »), on peut décrire la situation en disant « d et d' sont perpendiculaires », ou « d est perpendiculaire à d' », on peut écrire « d ⊥ d' », ou encore faire une figure codée[4].

La conversion d'un registre à un autre est plus complexe qu'une simple équivalence d'expressions. La capacité à appréhender un objet dans plusieurs registres, à coordonner ces registres est un enjeu essentiel de l'apprentissage des mathématiques[5] (on voit dans l'exercice ci-dessus l'entraînement aux passages entre les registres algébrique et graphique dans l'étude des fonctions en fin de cycle 4).

Langue naturelle et formalisme

Les objets mathématiques sont abstraits, leurs définitions, leurs propriétés, les preuves de ces propriétés ont une forte dimension formelle. On ne peut cependant pas communiquer ou penser complètement formellement (les mathématiciens ne sont pas des ordinateurs). Par ailleurs, on ne peut pas exprimer sans ambiguïté les mathématiques avec la langue naturelle. C'est même un des constats de départ de la volonté de refondation des mathématiques (fin 19e – début 20e) et de la fondation de la logique mathématique moderne[6]. Les pratiques langagières des mathématiciens s'appuient donc naturellement sur un mélange changeant d'expressions formalisées (éventuellement sous forme symbolique à l'écrit, mais également au travers d'un usage normé de la langue) et d'expressions relevant de la langue courante (voir les exemples proposés dans l'encart ci-dessous). Reconstituer et reconnaître les éléments de ce mélange est malaisé car les frontières sont floues, non explicites, non stables (elles dépendent du locuteur, mais aussi de l'auditoire, du contexte, de l'instant, etc.). Il y a une coexistence qui correspond à un jeu fructueux (à maintenir, à entretenir) entre pensée, échanges, intuition, conjecture, exploration, élaboration de preuves d'une part, et rigueur, formalisme et preuve d'autre part.

Coexistence d'expressions formalisees et d'expressions relevant de la langue courante

Les différentes expressions, dans lesquelles n désigne un entier, « n est pair », « n est divisible par 2 », « n est un multiple de 2 », « n s'écrit sous la forme $2k$ avec k entier », « il existe un entier k tel que $n = 2k$ », « $\exists k \in Z \;\; n = 2k$ » sont autant d'expressions normées utilisant de façon plus ou moins forte la langue naturelle, les premières pouvant être écrites ou dites (et pouvant être une verbalisation de la dernière). Les expressions sont figées, mais supportent quelques variations, notamment à l'oral. On conjugue les verbes par exemple « si n était pair, il serait divisible par 2 ». On peut aussi bien être amené à ajouter un adverbe au sein de la proposition « n est effectivement un multiple de 2 ». Cela peut apporter un certain confort d'expression tout en compliquant le lien avec les objets formels décrits et manipulés. Il n'est pas certain par exemple qu'un élève interprète la phrase « n s'écrit sous la forme $2k$ avec k entier » comme l'affirmation, entre autres, de l'existence d'un nombre.

4. Notons qu'une figure géométrique imbrique quasiment systématiquement au moins deux registres : celui du dessin et un registre symbolique lorsqu'on nomme les objets ou que l'on code des propriétés de la figure.

5. Le changement de registre de représentation des objets mathématiques relève de la compétence représenter, qui figure en bonne place parmi les « compétences travaillées » en tête des programmes des cycles 3 et 4, avec notamment : choisir et mettre en relation des cadres (numérique, algébrique, géométrique) adaptés pour traiter un problème ou pour étudier un objet mathématique ; produire et utiliser plusieurs représentations des nombres.

6. Auxquelles notamment les travaux de Frege, Hilbert et Russel ont contribué de façon centrale.

Retrouvez Éduscol sur

De même, un élève distinguera-t-il dans les phrases suivantes des usages radicalement différents du « si ... alors ... » ? Dans « si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$ » l'expression « si ... alors ... » exprime une implication : on peut en écrire la contraposée, « $ab = 0$ » est une condition suffisante de vérité de « $a = 0$ ou $b = 0$ », on utilise une expression de la langue courante pour formuler une proposition mathématique (implication). Dans « si y est non nul, alors on $a\,x\,/\,y = 2x\,/\,2y$ » le « si ... alors ... » exprime une condition de sens (usage proche de « si tu as faim, alors tu peux te servir dans le frigo »), il n'y a pas de lien avec une implication, cela n'a pas de sens de chercher une contraposée.

De même, quel sens donnera un élève aux « un » de « *un* carré est *un* rectangle » (« tout carré est un rectangle », « les carrés sont des rectangles »), « *un* nombre positif est plus grand qu'*un* nombre négatif » (« tout nombre positif est plus grand que tout nombre négatif »), ou « *un* nombre positif est le carré d'*un* nombre positif » (« pour chaque nombre positif il existe un nombre positif dont il est le carré ») ? Quel sens donne-t-il aux mots « quelconque », « donné », « fixé » utilisés dans une phrase mathématique ?

Enfin, l'une des caractéristiques des usages de la langue en mathématiques est liée à la concision recherchée. Ainsi, certaines formulations mathématiques doivent dans un premier temps être « dépliées » pour en permettre la compréhension. Par exemple, la phrase « les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu » nécessite d'être reformulée pour expliciter les relations qu'elle décrit : il s'agit de mettre au jour le fait que les diagonales d'un parallélogramme ont nécessairement un point d'intersection, elles ont chacune un milieu et ces trois points sont confondus. Les implicites sont ainsi extrêmement nombreux dans les pratiques langagières des mathématiciens et peuvent amener des malentendus avec les élèves ; citons par exemple le fait que la quantification universelle des implications est rarement explicitée (tout lecteur initié aura lu la phrase « si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$ » ci-dessus de la façon suivante : « Quels que soient les réels a et b, si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$ »).

Écrit et oral

La dimension orale ou écrite de l'expression a son importance, l'écrit ayant tendance à être un mode d'expression plus normé que l'oral. On se permet par exemple d'énoncer oralement des formulations qu'on n'écrirait pas, notamment des énoncés moins complets. Mais il existe des activités permettant des formes d'expression écrite plus relâchées (écrits intermédiaires, narration de recherche, figure téléphonée, jeux...) et des formes d'activités orales contraignantes (communication entre élèves à l'aide de petites vidéos ou d'enregistrements audio par exemple). Ces différences entre oral et écrit peuvent être riches pour travailler la langue : chaque mode d'expression pouvant éclairer l'autre du fait même de leurs différences (d'autant plus si elles sont soulignées).

Lecture d'expressions symboliques

La manière de dire / lire les symboles est un vaste champ de questions (et de travail potentiel) : « $f(x)$ » se lit « f de x », « $2 \times (x + 3)$ » se lit « deux fois [petit silence] x plus trois », ou « 2 facteur de x plus 3 », ou « le produit de la somme de x et trois par deux ». Comment dire « $(1 + x)^2$ » sans ambiguïté ? « $\leqslant$ » peut se lire « inférieur ou égal à », mais parfois « inférieur », et peut se conjuguer à la lecture (« si a était inférieur à 0 » par exemple).

La lecture des fractions (« 3 septièmes », « 3 sur 7 »), des notations en géométrie (« [AB] » se lit parfois « segment A B » ou plus simplement « A B »... comme « (AB) » ou « AB »)... n'est pas naturelle, elle doit se travailler à travers des activités spécifiques (lectures, dictées, situations de communication). C'est surtout dans le cadre d'une réelle activité mathématique qu'elle peut devenir fonctionnelle et naturelle.

Spécificités liées au lexique et à la grammaire

On peut souligner tout d'abord que la définition mathématique (caractérisation mathématique qui « crée » un objet) est assez souvent éloignée de celle d'un dictionnaire (description des objets ou concepts désignés, contours des différents sens du mot, liste d'usages).

La discipline a un lexique spécifique : certains mots ou expressions ne se rencontrent dans la langue française que dans leur sens mathématique, comme « bissectrice », « cosinus », « dodécagone »... Ces mots ont souvent une étymologie éclairante[7].

Les mathématiques font aussi un usage spécifique de certains noms communs de la langue française. Leur sens usuel et le sens qu'ils prennent en mathématiques ne sont souvent pas totalement étrangers, souvent parce qu'il y a eu des allers – retours entre les différents contextes d'usages (exemples : « hauteur », « base », « milieu », « centre », « fonction », « droite », « angle », « premier », « mesure », « image », « échelle », « facteur », « penta¬gone », « tangente », « divisible », « inconnue »...). Les mathéma¬tiques ne sont pas isolées des autres champs de connaissances, ni du quotidien ! Ces mots ont parfois également un sens spécifique (et différent) dans d'autres disciplines (voir l'exemple autour du mot « milieu » dans l'encart ci-après). Là aussi un travail étymologique ou lié au champ lexical est souvent riche. Ces activités sur le lexique peuvent être pensées de façon interdisciplinaire.

Le mot « milieu » : son usage en mathematiques, dans les autres disciplines scolaires et dans la langue courante

« Milieu » en sciences physiques et chimiques : substance dans laquelle se produit une réaction, un phénomène, et qui est caractérisé par certaines propriétés. Milieu acide.

« Milieu » en géographie : ensemble des caractéristiques naturelles et humaines influent sur la vie des hommes. Milieu urbain.

« Milieu » en EPS : joueur chargé, au football par exemple, d'assurer la liaison entre les défenseurs et les attaquants.

« Milieu » en SVT : ensemble des facteurs physico-chimiques et biologiques qui agissent sur une cellule, un être vivant, une espèce. Le désert, la forêt, la montagne sont des milieux dans lesquels vivent certaines espèces.

« Milieu » en mathématiques : « milieu d'un segment » point du segment situé à égale distance des deux extrémités.

Mais « milieu » c'est aussi le milieu social, le milieu professionnel, la rangée du milieu, le nez au milieu de la figure, le milieu de la nuit, le milieu des affaires, voire le Milieu (comme synonyme de « mafia »).

On rencontre des usages spécifiques de certains adverbes, déterminants, conjonctions, prépositions, propositions ou formes verbales : « et », « ou », « un », « le », « soit », « avec », « quel que soit », « si ... alors ... », « il existe », de certaines constructions entre virgules (« qui, à tout nombre x, associe », « qui, élevé au carré, vaut »)... L'usage de la négation est aussi très différent en mathématiques et en français. Dans tous ces cas, les usages courants ne disparaissent pas en cours de mathématiques, certains usages s'ajoutent (le « et », par exemple, en plus de pouvoir référer à une succession, une conjonction, une conséquence, une addition, etc. désignera également un connecteur logique)[8].

Comme dans les usages courants de la langue, l'enseignement des mathématiques utilise aussi des mots non encore définis, ou mal définis au moment de leur utilisation (au collège par exemple, « point », « droite », « nombre », « nombre relatif », « angle », « agrandisse¬ment »,

7. Des recherches étymologiques (bases grecques et latines) sur le vocabulaire du cours de mathématiques peuvent être effectuées en lien avec le cours de français ou, le cas échéant, de langues et cultures de l'Antiquité.

8. Voir document Notations et raisonnement mathématiques, Ressources pour la classe de seconde, 2009.

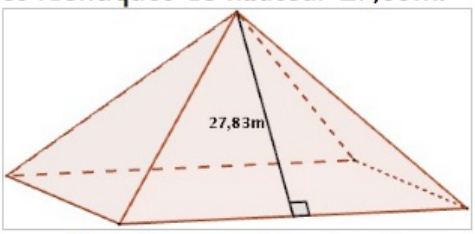
« translation », « rotation », « fonction » ne sont pas définis). Ces mots sont alors manipulés avant de correspondre à une définition mathématique, parfois pendant plusieurs années (la notion d'angle en est un très bon exemple). L'enseignement des mathématiques utilise également des mots ayant plusieurs sens possibles en mathématiques (voir « base » ci-après). Il est important d'en avoir conscience car les élèves découvrent alors les usages du mot de façon plus dispersée que lorsqu'ils peuvent avoir accès à une caractérisation mathématique claire. Soulignons qu'il n'est pas possible de définir formellement l'ensemble des concepts en jeu dans l'activité, certains concepts sont manipulés avec une approche intuitive, usuelle ou approximative. Ils sont souvent définis mathématiquement plus tard dans la scolarité, parfois beaucoup plus tard[9].

Polysémie au sein des mathématiques

Le mot « base » est un grand classique pouvant désigner un segment, sa mesure, un polygone ou son aire, parfois dans le même contexte. Pour résoudre l'exercice ci-contre, l'élève va utiliser une formule de calcul d'aire pour un triangle (classiquement exprimée par une phrase de la forme « base fois hauteur divisé par deux », qui laisse implicite le fait que « base » renvoie ici à la longueur d'un segment) puis utilisera le mot « base » pour renvoyer à la base de la pyramide, désignant alors le polygone, voire son aire. Parfois le mot désigne aussi le côté opposé au sommet principal d'un triangle isocèle. Par ailleurs, le mot « base » désigne les bases de numération (on calcule « en base 10 »).

Autre exemple, l'adjectif « symétrique » : il peut concerner une figure (« ce dessin de papillon est symétrique »), une relation entre une figure et une droite (« ce dessin de papillon est symétrique par rapport à la droite d »), une relation entre deux figures (« deux triangles symétriques ont même aire »), une relation entre deux figures et une droite (« ces deux figures sont symétriques par rapport à la droite d »). Le même type de phrases existe concernant la symétrie centrale… et le mot symétrie est aussi le nom d'une transformation !

La grande pyramide construite dans la cour du musée du Louvre est formée par une base carrée de côté 35m et par quatre triangles isocèles identiques de hauteur 27,83m.



Les faces formées par les triangles sont en verre. Calculer la surface de verre recouvrant cette pyramide.

Formulation des preuves

La formulation des preuves a également ses spécificités. Comme pour le lexique, il y a une spécificité épistémologique : une preuve est un objet mathématique formel et abstrait que l'on décrit, et dont on poursuit l'élaboration, en la formulant. La réflexion sur l'apprentissage de la démonstration a des liens avec la réflexion plus générale autour de l'argumentation dans la scolarité et dans les autres disciplines, mais les problématiques ne se recouvrent pas totalement.

9. Voire jamais : les nombres réels font ainsi leur apparition de manière subreptice en fin de cycle 4, sont nommés et utilisés de manière plus courante dès la classe de seconde … mais la définition des nombres réels ne figure plus dans aucun programme d'enseignement (y compris en post-bac).

Chaque pas de déduction[10] correspond à des formulations usuelles. Signalons simplement par exemple l'usage complexe du « donc ». Il marque, de façon très générale, la présence d'un pas de déduction. En affirmant « n est pair, donc n^2 est pair », le locuteur intervient et affirme au moins trois choses : « la proposition «n est pair» est vraie », « la proposition «n^2 est pair» est vraie » et « je déduis la seconde proposition de la première » (on peut penser que, pour ce faire, le locuteur utilise l'implication « [pour tout entier n] si n est pair, alors n^2 est pair »). Lorsque l'on dit « n est pair, donc n^2 est pair » on ne formule pas une proposition mathématique. On ne dit notamment pas la même chose que si l'on dit « [pour tout entier n] si n est pair, alors n^2 est pair ».

L'apprentissage de la démonstration passe par un travail sur le raisonnement, les arguments utilisés, mais aussi sur la formulation et la rédaction. Les deux dimensions sont abordées de façon progressive, sans exigence de formalisme. Travailler explicitement la formulation permet de (faire) préciser la construction du raisonnement, d'expliciter certains pas de déduction, de faire comprendre certaines exigences de rédaction.

Discours d'accompagnement de l'activité mathématique

Les mots ou expressions utilisés pour parler de l'activité mathématique de l'élève sont aussi parfois polysémiques ou flous : qu'est-ce que la « nature » d'un objet mathématique ? Que peut-on dire ou pas quand un énoncé d'exercice demande « que peut-on dire ? » ? Qu'est-il attendu quand il est demandé de « justifier », « expliquer », « prouver », « montrer », « vérifier », « démontrer », « déduire » ? Il n'y a par exemple pas de consensus autour de ces mots, leur sens et leur usage peut différer d'un enseignant à un autre, et évoluer pour un même enseignant en cours d'année et de l'avancée sur les activités autour de la preuve, ou au cours des cycles 3 et 4. Un travail réflexif d'explicitation et de reformulation mérite d'être mené avec les élèves.

Éléments d'étymologie a propos de « prouver », « démontrer », « montrer », « justifier » etc.

Le premier sens de « montrer » est « mettre devant les yeux », « attirer l'attention sur ». Il n'est pas sans lien avec « monstre » terme initialement religieux (« signe divin à déchiffrer », êtres mythologiques, puis personne au physique ou aux mœurs étranges).

« Démontrer » garde un sens proche de « faire voir », « exposer » (on retrouve ce sens dans les expressions « démonstration de force », « démonstration d'amitié », ou dans l'adjectif « démonstratif »), et « donner des preuves ».

« Justifier » a un sens juridique « traiter avec justice », « déclarer juste », mais aussi, toujours dans ce contexte, « disculper », « innocenter », et « établir un fait, prouver ».

« Prouver » a eu des sens proches de « éprouver », « mettre à l'épreuve », « approuver » et « faire approuver », mais également de « rendre croyable ». C'est surtout dans ce sens qu'il est utilisé en mathématiques (« faire apparaître comme vrai »).

« Déduire » a la même racine que « conduire » : il a signifié « faire sortir », « faire descendre », « faire tomber » (d'où le sens de « soustraire »), mais aussi « emmener », « amener à ». Au Moyen Âge le verbe désigne un raisonnement par lequel on fait sortir d'une supposition la conséquence logique qu'elle contient implicitement.

La compréhension des énoncés d'exercices de mathématiques soulève des difficultés propres qui s'ajoutent aux difficultés générales de lecture et de compréhension des textes (quelques points difficiles par exemple : perception du contexte et de l'implicite, compréhension des connecteurs, usages fins des pronoms relatifs et des déterminants, etc.).

Retrouvez Éduscol sur

10. Introduction ou élimination d'une quantification universelle ou existentielle, introduction ou élimination d'un connecteur (disjonction (ou), conjonction (et), implication), introduction ou élimination de la négation.

En français

En français, l'apprentissage de la compréhension de texte se met en place dès le cycle 2 (« les démarches et stratégies permettant la compréhension des textes sont enseignées explicitement »), mais se poursuit encore au cycle 4.

Les obstacles que rencontrent les élèves dans la lecture des énoncés (et des consignes), ou plus généralement des textes en mathématiques (cours, solutions d'exercices, manuels…) sont de plusieurs ordres.

On peut bien sûr penser aux problèmes de décodage (identification des mots écrits), puis de lexique et de syntaxe. Mais il faut aussi penser aux compétences plus larges : prises d'informations, en termes de structuration et de contenu, dans le texte et hors texte (postulats implicites, inférences, contexte, culture personnelle). Il est également connu que les élèves en difficulté de lecture ont du mal à comprendre ce qui est attendu d'eux dans une situation de lecture au-delà du déchiffrage et de la compréhension des mots ou des phrases ; de plus, ils ne savent pas réguler leur lecture, contrôler et évaluer leur compréhension du texte dans son ensemble.

Conclusion

Les pratiques langagières des mathématiciens sont spécifiques et complexes. Elles mêlent de façon profonde des usages courants (et déjà souvent sophistiqués) de la langue française, et le formalisme mathématique (usage normé de la langue, symbolisme). Les élèves découvrent en même temps les objets mathématiques à étudier (leurs définitions, leurs propriétés, les preuves de ces propriétés, les problèmes auxquels ils permettent de répondre, etc.) et la façon d'en parler. Comme l'indiquent les programmes, le cycle 4 est le lieu de l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves utilisent des raisonnements logiques, des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion. C'est donc un moment charnière de l'apprentissage des mathématiques. La façon de dire (ou de ne pas dire) les mathématiques doit faire l'objet d'une attention particulière pour l'enseignant (qui prépare son cours et le met en œuvre, qui écoute les élèves et interprète). Elle fait l'objet d'activités explicites en classe en lien avec le contenu : travail des formulations avec les élèves (comparer, expliquer, modifier, affiner), explicitations des contraintes menant à telle ou telle formulation, situations de communication entre élèves, coexistence de plusieurs formulations des propriétés, des définitions ou des preuves dans le cours ou les corrections d'exercices…

L'attention aux usages de la langue est également un support de choix pour des travaux interdisciplinaires (évidemment entre mathématiques et français, mais aussi par exemple entre mathématiques et sciences expérimentales).

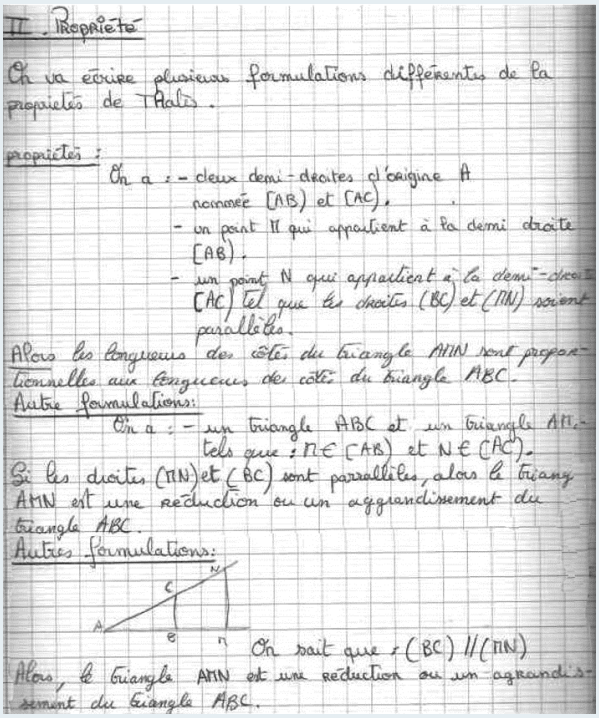
Le langage : un moyen d'apprentissage

L'élaboration d'un concept et les pratiques langagières qui y sont associées sont deux processus indissociables qui s'alimentent mutuellement dans le cadre d'un apprentissage. La question de l'appropriation d'un nouveau concept n'est pas dissociable de l'appropriation des pratiques langagières qui lui sont associées (a minima le vocabulaire spécifique). Il ne s'agit ni de penser que l'introduction du nouveau mot (ou d'une définition) suffit à la maîtrise d'un concept, ni de considérer que savoir manipuler un concept « en actes » suffit pour savoir en parler : les deux doivent se construire en interaction. Le travail de la maîtrise des aspects langagiers ne peut cependant pas être déconnecté du reste du cours et du contenu enseigné. En particulier, comprendre un objet mathématique suppose d'être capable de le représenter dans divers registres et d'articuler ces représentations entre elles (on peut repenser à l'exemple précédent sur les fonctions).

Le lexique spécifique associé à un concept ne doit pas être introduit trop tôt, et l'usage correct des mots (ou l'usage des mots attendus) ne peut être que progressif. Il est important d'entendre comme telles, de laisser vivre, voire de solliciter et de travailler, des formulations intermédiaires. Elles peuvent être considérées comme incorrectes du point de vue des formulations visées, mais sont des passages nécessaires (les exigences évoluant petit à petit au fil du chapitre ou de l'année). Il est normal que les premières tentatives de manipulation des nouveaux mots soient éloignées des usages standards, elles sont en revanche souvent révélatrices voire créatrices de sens, notamment dans les phases de recherche et de découverte de nouvelles notions ou encore de résolution de problèmes. Les phases de synthèse et d'institutionnalisation doivent être le lieu d'activités sur la correction des formulations, même si leur appropriation est progressive. L'objectif n'est pas d'arriver à une formulation unique à reprendre systématiquement, mais plutôt de faire intégrer aux élèves les contraintes qui mènent à certaines formulations complexes et normées. L'usage des brouillons, le travail d'élaboration collective d'une formulation (de définition, de proposition, de preuve), la présentation dans les traces écrites (cours, correction d'exercice par exemple) de plusieurs formulations d'une même définition ou de précisions sur l'équivalence de plusieurs formulations d'une même propriété, d'une même preuve sont très riches de ce point de vue (à tous les niveaux et dans tous les domaines mathématiques).

Formulations du théorème de thales

Certaines pratiques sont nécessaires pour permettre aux élèves de prendre du recul sur la langue, de se familiariser avec certaines pratiques langagières, et d'identifier des équivalences de formulations. Il ne faut pas hésiter à formuler de plusieurs façons ce que l'on dit quand on parle, à juxtaposer, à faire travailler plusieurs formulations de la même chose, mais aussi à expliquer, à « déplier » les expressions.


II. Propriété

On va écrire plusieurs formulations différentes de la propriété de Thalès.

propriété :

On a : - deux demi-droites d'origine A nommée [AB) et [AC).
- un point M qui appartient à la demi droite [AB).
- un point N qui appartient à la demi-droite [AC) tel que les droites (BC) et (MN) soient parallèles.

Alors les longueurs des côtés du triangle AMN sont proportionnelles aux longueurs des côté du triangle ABC.

Autre formulations:

On a : - un triangle ABC et un triangle AMN tels que : M ∈ [AB] et N ∈ [AC].

Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors le triang AMN est une réduction ou un agrandissement du triangle ABC.

Autres formulations:

On sait que : (BC) // (MN)

Alors le triangle AMN est une réduction ou un agrandissement du triangle ABC.

Notons de plus que des formulations équivalentes, en général, ne mettent pas la même chose en évidence : par exemple, dire « l'image de 3 par la fonction *f* est 5 » peut être reformulé en « 3 a pour image 5 par la fonction *f* » ou « 3 est un antécédent de 5 pour la fonction *f* », ou « *f*(3) = 5 », mais également en « 5 est l'image de 3 par la fonction *f* », « 5 a pour antécédent 3 pour la fonction *f* », « 5 = *f* (3) », et on peut noter que, par exemple, l'ordre de 3 et 5 est inversé dans les dernières formulations, et est inversé par rapport au sens « naturel » associé à l'idée de fonction, ainsi qu'au sens de la flèche.

Faire produire aux élèves ou proposer des (re)formulations, les comparer, les faire évoluer, est un processus riche permettant de faire cohabiter plusieurs formulations d'une même définition, ou d'une même propriété, tout en en travaillant le sens. Les élèves se familiarisent ainsi avec les différentes formes qu'ils vont rencontrer, dans les exercices par exemple.

Ci-contre un exemple de cahier en classe de 4e : suite à une activité en géométrie dynamique, les élèves écrivent une formulation de la propriété conjecturée, un travail collectif est mené avec l'enseignant sur ces formulations, pour aboutir à cette présentation du cours.

D'autres pratiques langagières ne sont pas liées à des concepts particuliers mais doivent faire l'objet d'une attention spécifique (comme la notion de définition, de preuve, les connecteurs logiques). Il ne s'agit pas de faire un cours sur ce qu'est une définition ou une preuve, mais de pointer avec les élèves, aussi souvent que possible, le sens de ces mots et leurs usages. De même les consignes d'exercice méritent une attention particulière, et souvent un travail spécifique (reformulation par les élèves ou l'enseignant, rappels sur le vocabulaire, précisions sur les phrases complexes ou incomprises, etc.).

Enfin, notons que de nombreuses recherches ont mis en évidence l'importance des compétences langagières dans la réussite scolaire et le fait que le rapport au langage des élèves de milieu social défavorisé, parce qu'il est plus éloigné du rapport au langage nécessaire aux apprentissages scolaires que celui d'élèves « ordinaires », est un des facteurs importants des inégalités scolaires[11]. Les enjeux langagiers doivent donc faire l'objet d'une attention particulière avec les publics de l'éducation prioritaire. Cela dépasse la question de la maîtrise de la langue française (fautes de grammaire ou d'orthographe), mais concerne plutôt le rôle que l'on attribue au langage, ce que l'on « fait avec ». Les apprentissages scolaires requièrent notamment que le langage soit un outil, non seulement pour « dire le vrai » et communiquer, mais également pour élaborer sa pensée, argumenter, analyser… y compris le langage lui-même. Tous les élèves ne sont pas familiarisés de la même façon avec ces différents usages.

Le langage : un outil pour enseigner

Si le langage est un moyen d'apprentissage (partie précédente), c'est aussi, à ce titre, un levier d'enseignement. La parole de l'élève, ses formulations, sont autant d'indices de son activité, de son appropriation des concepts en jeu, de son apprentissage. Le langage est de plus, comme on l'a vu ci-dessus, un outil de pilotage : faire formuler, faire reformuler les élèves, les faire échanger entre eux, c'est les faire penser, les faire penser autrement, faire évoluer leurs conceptions.

Au-delà du choix des tâches proposées aux élèves et de l'organisation du travail, un des outils puissants de l'enseignant est le langage qu'il emploie. Il a sur celui-ci une importante marge de manœuvre, oralement comme par écrit.

Il est souhaitable que l'enseignant soit vigilant sur ses pratiques langagières, qu'il veille, dans la mesure du possible, à manipuler des expressions correctes et complètes, des formulations variées, tout en contrôlant les équivalences entre les expressions utilisées. Il est aussi important que son langage soit adapté au moment de l'apprentissage. Notons qu'à l'oral, il est souvent pratique d'omettre certains éléments dont l'absence ne gêne pas la compréhension entre personnes familières des usages de la langue en mathématiques, mais cela peut faire obstacle à la compréhension des élèves : par exemple, dans le cas où l'on demande si deux figures sont symétriques par rapport à une droite donnée, on peut être tenté de reformuler à l'oral par « les figures sont-elles symétriques ou non ? », alors qu'elles peuvent être symétriques (par rapport à une autre droite), sans pour autant être symétriques par rapport à cette droite.

Un regard réflexif sur ses propres pratiques langagières est pertinent pour l'enseignant : les formulations habituelles dans sa discipline sont naturelles pour lui, transparentes. Il faut réussir à les (ré-)interroger et prendre conscience de la difficulté qu'elles peuvent représenter pour les élèves, se donner les moyens de percevoir ces difficultés, de les travailler.

11. Voir Bautier, Bonnery, Cèbe, Charlot, Goigoux, Rochex dans la bibliographie.

Conclusion

L'apprentissage d'une discipline inclut l'apprentissage des pratiques langagières qui lui sont propres. Il est donc nécessaire de prendre en charge dans l'enseignement des mathématiques les spécificités langagières de cette discipline qui sont multiples et complexes. À l'inverse, ce travail enrichit les compétences langagières des élèves et leur maîtrise de la langue, maîtrise dont l'enjeu est fondamental pour leur réussite scolaire.

Exemples d'activités en classe

Travailler les formulations

La formulation des définitions ou des théorèmes énoncés dans le cours de mathématiques peut être issue d'un travail avec les élèves : après une expérimentation permettant l'approche d'un théorème, par exemple, on demande classiquement aux élèves de formuler une conjecture (un fait qui semble être vrai dans le contexte), on peut poursuivre en leur demandant de formuler la propriété pour le cours : ils doivent ainsi trouver aussi une description du contexte, des hypothèses, de la prémisse ; et arriver à une formulation (ou des formulations) qui convienne(nt) à tous (y compris à l'enseignant). L'idée est alors de garder cette formulation (ou ces formulations) pour le cours (voir ci-dessus l'exemple Formulations du théorème de Thalès). Ce n'est pas seulement le résultat qui compte, les formulations choisies, mais le processus : le fait d'avancer progressivement et collectivement vers une formulation permet de discuter et d'intégrer la nécessité de précision et de rigueur (les demandes de précisions venant alors aussi des élèves lors de la discussion), les choix de présentation (en géométrie, fait-on une figure ou liste-t-on des éléments caractérisant la situation ? ou les deux ?). Au final cela permet également aux élèves de s'approprier le théorème.

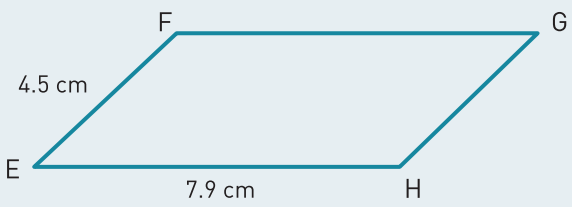
De la même façon, ce type d'activités peut être mené sur la formulation des démonstrations : chaque élève réfléchit à une preuve (éventuellement avec aide) et formule sa démonstration. Un travail en groupes est ensuite demandé de façon à ce que les membres de chaque groupe se mettent d'accord sur une rédaction commune. Une discussion peut ensuite être menée collectivement sur les différences observées, les choix faits, les manques, la clarté, la concision, la précision relative des propositions, etc. Il n'est pas possible d'échanger sur la formulation sans travailler le contenu : les déductions mathématiques en jeu, les objets mathématiques utilisés et leurs propriétés. Là aussi, l'activité aboutit à la validation par la classe (y compris par l'enseignant) d'une ou plusieurs formulations.

Formulations de preuves

Exemples de preuves proposées par des élèves de 5e. Les élèves doivent ensuite travailler en groupe pour arriver à l'écriture d'une (seule) preuve. Ce sont les discussions autour de ces formulations et les interactions avec l'enseignant sur ces questions qui sont le cœur de cette séance.

L'énoncé

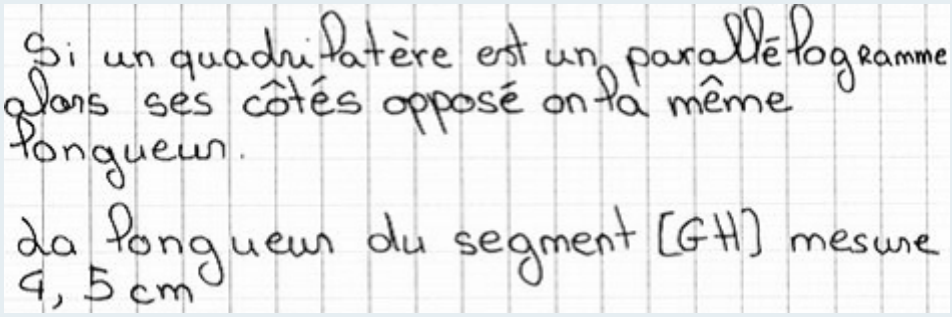
Le quadrilatère EFGH ci-dessous est un parallélogramme. Quelle est la longueur du segment [GH] ?



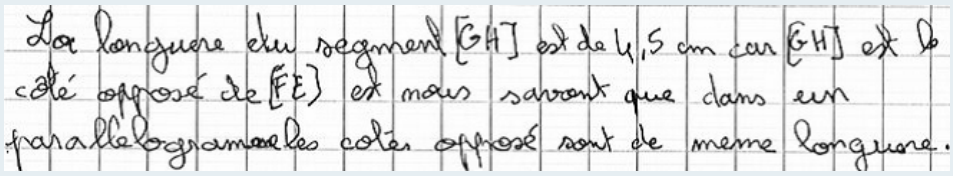
Retrouvez Éduscol sur

Les productions

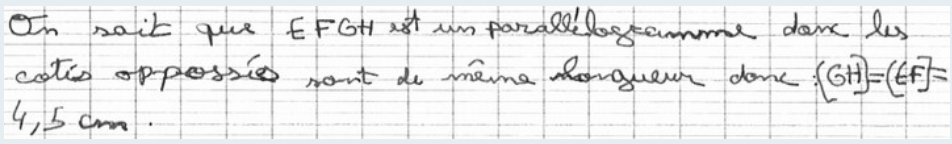
1.



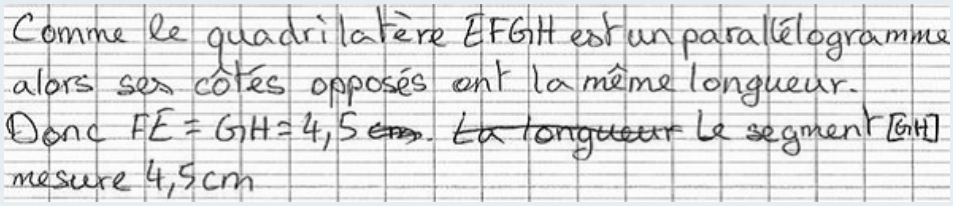
2.



3.



4.

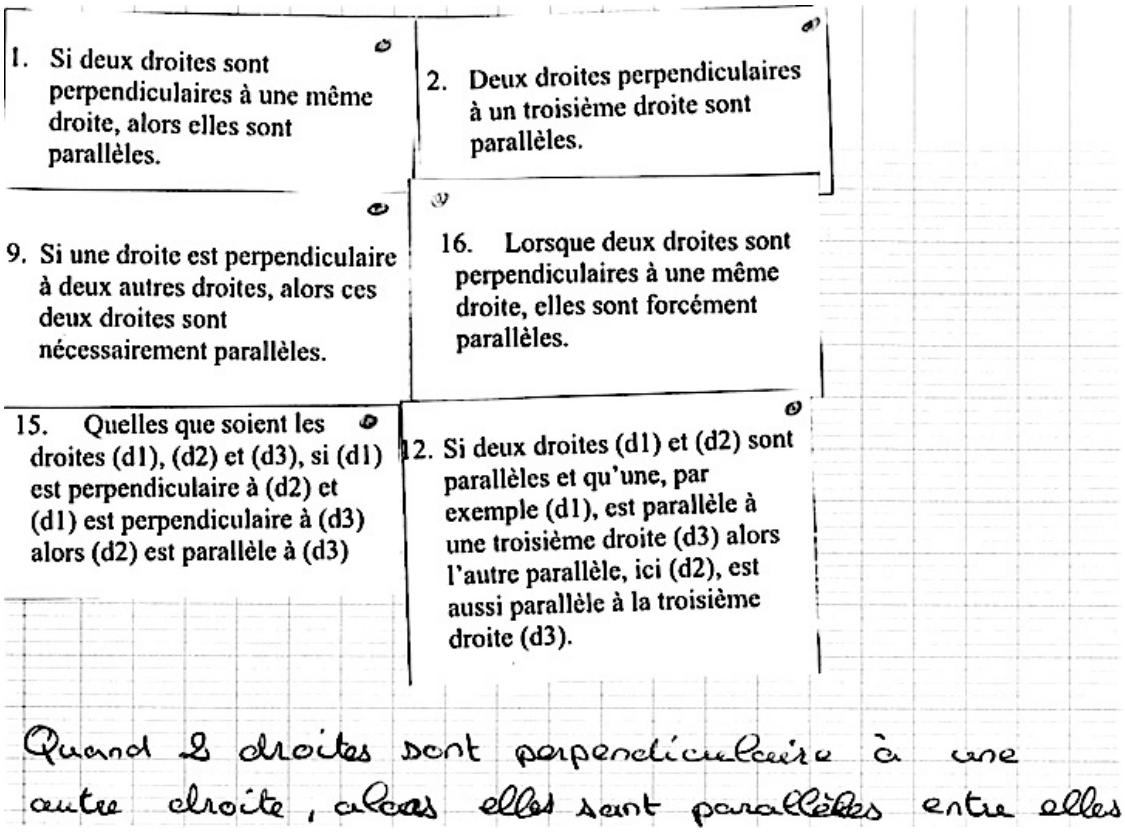


Une relecture d'orthographe et de grammaire est à faire (une notation à revoir également dans la 3e copie), les élèves le font collectivement en général de façon relativement efficace.
Trois faits permettent de déduire la réponse attendue *GH* = 4,5 cm. Ce résultat s'appuie en effet sur un théorème du cours, le fait que, dans ce contexte, [*EF*] et [*GH*] sont deux côtés opposés du parallélogramme *EFGH*, et le fait que *EF* = 4,5 cm. La façon de citer (ou non) ces éléments est ici très variable : formes différentes, ordre différents, utilisation ou non de symboles (égalité par exemple) et des notations (notations des longueurs par exemple). Un élève commence par donner la réponse et justifie ensuite (utilisation de « car »), les autres présentent les choses dans un ordre plus classique, mais les formulations des pas de déduction sont variées (« si… alors », « car », « donc », « comme… alors »). Les façons d'évoquer le théorème sont en elles-mêmes très intéressantes : en citant le cours (ou peut-être en le reformulant, mais sans évoquer le contexte de l'exercice) comme c'est vraisemblablement le cas dans les deux premières copies ? Ou dans un entre – deux permettant au lecteur de reconnaître le théorème tout en le situant dans le contexte de l'exercice comme dans la copie 4 ? La variété peut être source de discussions, d'explicitations des règles.

L'esprit critique des élèves permet de soulever la plupart de ces points dans les échanges. L'enseignant pilote l'échange et fait avancer le débat vers une (ou des) formulation(s) acceptées collectivement. Les débats explicitent certaines connaissances, les ambiguïtés ou la complexité de certaines formulations (des alternatives sont proposées), et les attendus concernant le raisonnement en mathématiques sont mis en évidence.

Les équivalences de formulations peuvent aussi être vues sous forme de jeu de correspondances. On peut par exemple en fin de cycle 3 faire regrouper, parmi un paquet de cartes sur lesquelles sont écrites diverses représentations de nombres (écriture décimale, fraction irréductible ou non, opérations, en mots), les cartes qui « désignent » le même nombre. L'exercice peut d'ailleurs être enrichi au fil de la progression allant du cycle 3 au cycle 4 ; c'est ainsi qu'on peut commencer l'exercice avec les représentations « huit », « *eight* », « *ocho* », « 11 – 3 », « 24 / 3 », et « 0,51 + 7,49 » pour désigner le nombre 8, l'enrichir un peu plus tard avec « 7 – (-1) » et « $\sqrt{64}$ » et proposer en fin de cycle 4 les représentations « la solution de l'équation $2x = 16$ » ou encore « l'image de 9 par la fonction affine qui, à x, associe $x - 1$ ».

Ce type d'activités peut aussi être mené à partir de formulations variées d'une même propriété. Voici un exemple de production d'un élève de 6e : il s'agissait, quelques séances après le cours correspondant, de regrouper en trois paquets des formulations variées de trois propriétés reliant droites parallèles et perpendiculaires, puis de proposer pour chaque propriété une formulation personnelle :



Narration de recherche

Il s'agit de faire entrer les élèves dans l'écrit en mathématiques par le biais du récit. L'exercice de narration de recherche se fonde sur un travail autour d'un problème choisi, chaque élève devant écrire le récit, un compte rendu, de la recherche : toutes les idées, toutes les pistes suivies, y compris celles qui n'ont pas abouti. L'attention est ainsi portée sur la recherche elle-même (écouter, confronter, expérimenter, raisonner, se tromper, reprendre…).

La présentation de l'activité nécessite des explications orales et du temps. Elle peut être accompagnée d'un écrit, par exemple : « La solution du problème proposé n'est pas facile à trouver. Le but de ce travail est bien sûr de trouver la solution, mais surtout de la chercher. Vous pouvez essayer toutes les méthodes qui vous viennent à l'esprit. Il faudra ensuite expliquer par écrit les détails de vos recherches, de vos idées, même si elles ne donnent pas de bons résultats (il faudra alors expliquer pourquoi ça ne marche pas) ».

La narration peut aussi se faire sur un exercice « courant » (mais bien choisi), et sa rédaction peut être **courte**… ce qui compte c'est que l'élève comprenne que sa recherche a une valeur, quel que soit l'exercice, la solution « complète » n'étant pas le but premier.

Pour monter un escalier, on peut sauter une marche si on veut (on fait des pas de une ou deux marches).

Voici toutes les manières différentes de grimper trois marches d'un escalier.

Combien y a-t-il de manières différentes de monter :
4 marches d'un escalier ? 5 marches d'un escalier ?
6 marches d'un escalier ? 7 marches d'un escalier ?
17 marches d'un escalier?

Source : IREM de Paris – 2002, p 39, voir bibliographie.

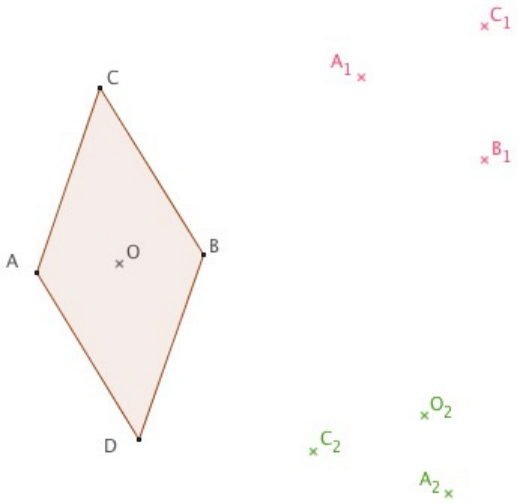
Il est préférable que l'expression de l'énoncé soit simple. Il est intéressant de commencer par des questions très élémentaires, de façon à ce que les élèves se mettent plus facilement au travail, entrent en confiance dans la tâche donnée et aient tous quelque chose à raconter. Le partenariat avec l'enseignant de français de la classe est très riche (activités autour des techniques liées au récit, à l'argumentation). En ce qui concerne le travail sur la langue (la narration de recherche concerne, comme on le voit, d'autres champs de l'activité), notons que des activités sont à mener dans le cadre du cours de mathématiques pour passer de cette forme d'écrit (la narration) à un écrit plus conforme aux pratiques des mathématiciens (suppression de toute subjectivité, notam¬ment).

Les narrations de recherche constituent aussi un outil permettant de travailler les compétences mathématiques visées aux cycles 3 et 4 : chercher (expérimenter, émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture, tester, essayer plusieurs pistes de résolution, décomposer un problème en sous-problèmes…), raisonner (mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions, fonder et défendre ses jugements…), communiquer (expliquer à l'oral ou à l'écrit sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme)[12].

À titre d'exemple, dans la partie des programmes traitant de l'enseignement du français, on trouve la proposition d'EPI suivant : « Aider les élèves à lire / écrire des textes scientifiques (comptes – rendus d'expériences, formulations d'hypothèses…) ».

12. Les programmes de cycle 3 et de cycle 4 détaillent les six compétences majeures de l'activité mathématique.

Restauration de figure, figure téléphonée, programme de construction



Une *restauration de figure* est un exercice de reproduction par les élèves d'une figure donnée, à partir d'une amorce. Les instruments sont déterminés, ou suggérés à l'aide d'un système de « coût ». Dans l'exemple ci-contre, reproduire le losange à la règle non graduée et au compas[13] à partir de $A_1C_1B_1$ fait travailler les propriétés des longueurs des côtés, dans le second cas les diagonales sont visées. Si l'équerre est seule disponible[14], ce sont des relations d'orthogonalité ou de parallélisme qui seront mobilisées.

La validation de la figure tracée peut se faire avec un calque. La mise en commun compare les constructions adoptées et les figures obtenues (et, le cas échéant, le coût). Le travail oral de description, d'explication, voire de justification, des procédures qui a lieu pendant la mise en commun est central. Cette description peut être, dans un premier temps, centrée sur les manipulations et les outils, elle s'enrichit et se décontextualise ensuite.

Un *programme de construction* est une description écrite d'une procédure permettant, avec des instruments précis, de reproduire une figure donnée. Ici encore les procédures dépendent de la figure initiale et des instruments imposés. Cet exercice conduit les élèves à verbaliser des propriétés, pour mieux les conceptualiser en les utilisant comme une description. Les élèves rédigent souvent, dans un premier temps, une description très factuelle de la construction (« je plante la pointe du compas sur la croix et je le fais tourner ») pour parvenir, ensuite, à une description plus mathématique (« je trace le cercle de centre… »).

L'exercice peut être transformé : l'enseignant peut choisir un (ou plusieurs) programme(s) de construction en amont de façon à faire travailler les élèves sur telle ou telle notion, ou l'utilisation de tel ou tel instrument. Le travail, amorcé au cycle 3, peut ainsi se poursuivre au cycle 4.

On peut motiver la production des élèves par des situations de figures téléphonées. Un binôme étudie une figure dessinée et doit écrire un programme de construction. Un second binôme[15] reçoit le message, exécute les instructions autant que faire se peut, et devient, dès lors, juge de sa qualité. Il est possible de mettre en place une navette de questions / réponses, ou un bilan oral des difficultés rencontrées (à l'écriture d'une part, à la compréhension d'autre part). Il est possible de mener les échanges oralement en demandant aux élèves de s'enregistrer (fichiers audio). Ce type de productions peut permettre à des élèves gênés à l'écrit de se lancer, les contraintes de précisions et de respects des conventions apparaissent très rapidement.

En réagissant à la description d'un autre binôme, les élèves s'approprient les contraintes de l'exercice. Il est important d'utiliser des figures simples, et de ne pas négliger une phase de mise en commun permettant de rendre explicites les enjeux, géométriques et textuels, des programmes de construction. Il est tout à fait possible d'organiser, dans un premier temps, le travail à l'oral faisant préparer aux élèves des messages audio (voir point suivant).

13. On peut aussi indiquer qu'il faut faire la figure en un minimum de points sachant qu'une utilisation de l'équerre coûte 3 points, du compas ou de la règle non graduée coûte 1 point, de la règle graduée 10 points, les autres instruments n'étant pas autorisés.

14. Ou en changeant les coûts.

15. En pratique, les messages sont échangés entre les binômes, qui jouent les deux rôles.

Le principe de la figure téléphonée peut être utilisée aussi en formule téléphonée (en s'inspirant par exemple des éléments du paragraphe « Dictées » ci-après).

Bilan de savoir

De nombreuses modalités de travail avec les élèves s'inspirent de l'idée de « bilans de savoir ». Ce sont notamment des occasions de structuration des connaissances et de l'activité mathématique mais aussi des moments de reformulation. L'idée consiste à faire formuler par les élèves, de manière ciblée, ce qu'ils ont appris. L'objectif est notamment de les faire passer du « faire » au « savoir », dans une modalité de travail intermédiaire entre les mises en activité et les moments d'institutionnalisation des connaissances.
L'activité peut être rapide en début de cours « Qu'avons-nous appris lors de la séance précédente ? » ou en fin de cours « Qu'avons-nous appris lors de cette séance ? ». La forme peut être variée : production orale ou écrite, individuelle ou collective, privée (bilan pour soi, préparation d'une évaluation, voire préparation d'une « anti-sèche », élaboration d'une carte mentale) ou publique (bilan pour les autres, correspondance réelle ou factice, poster dans la classe, vidéo[16]), ponctuelle ou plus évolutive.

Énoncé d'exercices audio, résolution orale d'exercices audio, utilisation de la vidéo

Certaines expériences menées montrent que le travail en mathématiques à partir d'enregistrements audio (ou vidéo) permet un cheminement entre l'expression orale spontanée des élèves (souvent inadaptée aux attentes de l'enseignant) et des formulations plus proches des usages normés.

La mise à disposition d'enregistrements de la lecture des énoncés (fichiers MP3, lecteurs et casques mis à disposition) est intéressante. Il ne s'agit pas de remplacer la lecture d'énoncé, mais simplement de permettre à certains élèves mal à l'aise avec la lecture de se rendre compte qu'ils peuvent résoudre certains exercices. La résolution d'exercices de manière orale et enregistrée par les élèves permet aussi de ménager une possibilité d'activité pour des élèves particulièrement en difficulté à l'écrit. Dans les deux cas, il ne s'agit pas de solutions pérennes : les objectifs de lecture autonome des énoncés et d'expression écrite demeurent essentiels dans toutes les disciplines. Mais ces modalités de travail peuvent débloquer certains élèves, ou permettre une évaluation temporairement moins dépendante de l'écrit.

D'autres utilisations d'enregistrements audio ou vidéo sont possibles : on peut utiliser les vidéos comme une sorte de bilan de savoir. Soulignons que les productions enregistrées sont souvent plus formelles qu'une intervention orale classique d'élève : les élèves prennent même parfois l'initiative… d'écrire leur texte avant de s'enregistrer.

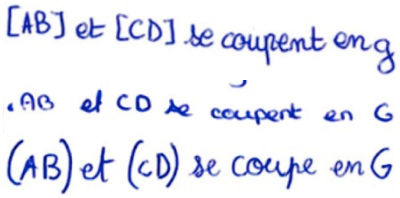
Dictée

Le travail sur les formulations ou sur les pratiques usuelles de l'écrit en mathématiques peut aussi se faire à l'aide de dictées : de même que la séance de mathématiques peut commencer par un rapide temps de calcul mental, de même certains points délicats (notation, exigences d'écriture) peuvent être abordés régulièrement (et rapidement) en début d'heure, sous forme de « questions flash », par exemple.

À propos des notations, en géométrie, il est intéressant de demander aux élèves de noter ce qu'ils entendent quand l'enseignant leur dit par exemple « *A* est le milieu de *B C* », « *D E* mesure trois centimètres » ou « *A* est sur *B C* ». On souligne ainsi l'importance des notations à l'écrit… et la plus grande précision de certaines formulations orales (« le point *A* est le milieu du segment *A B* », « le segment *D E* mesure trois centi¬mètres »). On engage, ou on renforce, une réflexion sur le langage en cours de mathématiques.

16. Dans l'exemple proposé ici, les élèves devaient, après le cours, produire un résumé filmé de l'une des propriétés étudiées. Reformulation en vidéo

Exemples de productions amorçant la discussion à partir de la dictée « *A B* et *C D* se coupent en *G* » (classe de 6e) :



Ce travail peut se faire aussi dans le domaine numérique : « la somme de douze et neuf », « le produit de quinze par cinq », « la différence entre trente et sept » (on peut demander le résultat, ou simplement l'expression écrite du calcul, on peut aussi afficher l'expression écrite du calcul et demander « en mots »), On peut arriver à des phrases plus ambiguës « le double de 7 plus 1 » permettant de comparer l'usage de « la somme de » et de « plus », puis, sur d'autres calculs, de discuter la nécessité des conventions de priorité, le rôle des parenthèses à l'écrit par exemple. Les exemples précédents relèvent plutôt du cycle 3 ou du début du cycle 4, mais ils peuvent être prolongés pendant tout le cycle 4. Ils permettent ainsi d'aborder les notions de somme ou de produit d'expressions algébriques, et de préciser le sens de la distributivité, de la factorisation et du développement.

Dictionnaire collectif, affiche « Comment dire ? » ou « Que veut dire ? »

La confection d'un dictionnaire ou d'un lexique est une activité très riche. Elle suscite un regard réflexif tant sur la langue que sur les notions mathématiques travaillées. Le dictionnaire peut prendre la forme d'un cahier spécial (individuel ou partagé, papier ou numérique) ou d'une affiche dans la salle. Il est complété par les élèves au fil du travail, des sollicitations de l'enseignant ou des difficultés rencontrées.

Comme on l'a vu ci-dessus avec le mot « milieu » dans le texte de ce document, les mots, y compris ceux qui ont une acception technique pour une discipline, ont des sens variés à l'école et dans la langue courante. Cette activité peut être menée en collaboration avec l'enseignant de français, et avec les autres ensei¬gnants de la classe (usage de documents numériques partagés).

Ci-dessus, un travail sur les expressions utilisées dans un contexte mathématique (en 6e).

À titre d'exemple, dans la partie des programmes traitant de l'enseignement du français au cycle 4, on trouve la proposition d'EPI suivant : « Travail sur le lexique scientifique »

Ressources bibliographiques

Dans la classe

- Baudart F. (2011) Enjeux langagiers et cognitifs d'une séquence de mathématiques en 6e, Carmal, académie de Créteil
- IREM de Besançon : Le numérique pour travailler l'oral en mathématiquesTravail
- IREM de Montpellier : Sauter M. (2000), Formation de l'esprit scientifique avec les narrations de recherche en cycle central du collège, Repères-IREM n°39.
- IREM de Paris (2002), Expériences de narration de recherche en mathématiques : Les petites Zep... qui montent... qui montent... et qui démontrent, ACL, les Éditions Kangourou. Fiche Publimath
- Sur le site Culture Maths : Narration de recherche en mathématiques
- IREM de Paris : groupe de travail Léo – Langage, écrit, oral
- IREM de Rennes : l'enseignement de la démonstration
- Petit S. et Camenisch A. (2007) La formation savante des mots en mathématiques, Bulletin APMEP n°470, Paris
- Petit S. et Camenisch A. (2007) Projets d'écriture en mathématiques, actes du 33e colloque de la COPIRELEM, Dourdan

En français

- Baudart F., Faure M. F., Galisson V., et Piccolin L. (2002). De surprises en découvertes, mathématiques & français, collège, Repères pour Agir, CRDP de Créteil.
  Le rôle primordial du langage dans l'élaboration des savoirs, la façon de construire une séquence pédagogique sont analysés par des enseignants de mathématiques et de français. Fiche PubliMath
- Groupe Maths-Français de l'IREM de Strasbourg (2000). Un travail interdisciplinaire en français et mathématiques. Repères-IREM n°38, Topiques Éditions.
- Cèbe S. et Goigoux R. (2012) Lector & Lectrix, Apprendre à comprendre les textes - Collège, Éditions Retz.
- Apprendre à comprendre les textes, manuel de français innovant pour un enseignement de la compréhension des textes en cours de français.

Documents institutionnels

- Communiquer à l'écrit et à l'oral, Ressource d'accompagnement du programme de mathématiques du cycle 4, 2016.
- Raisonner, Ressource d'accompagnement du programme de mathématiques du cycle 4, 2016.
- Notations et raisonnement mathématiques, Ressource d'accompagnement du programme de mathématiques de la seconde générale et technologique, 2009.
- Raisonnement et démonstration, Ressource d'accompagnement des anciens programmes de mathématiques au collège, 2009.
- Document d'application de l'ancien programme de mathématiques du cycle des approfondissements de l'école primaire, 2002.
- La maîtrise de la langue au collège, CNDP (1998)

Généralités, recherche

- Barrier T., Mathé A. C. (dir.) (2014). Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques, Spirale n°54, Revue de Recherches en Education.
- Ce numéro vise à éclairer, du point de vue de la recherche, le rôle du langage dans les processus d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques tant dans la construction des connaissances par les élèves que dans l'organisation de l'enseignement.
  Fiche Publimath
- Baudart F. (2011). Monde de l'oral et monde de l'écrit en mathématiques, Le français aujourd'hui n°174, Armand Colin.
  Cet article présente l'apport des mathématiques dans la maîtrise de la langue au travers d'exemples concrets de situations de collège.
- Bessonnat D. (1998). Maîtrise de la langue et apprentissages disciplinaires, Approches transversales au collège en France, Revue internationale d'éducation de Sèvres n°19.
  Cet article expose les enjeux de la maîtrise de la langue et son articulation avec les apprentissages disciplinaires, en présentant de manière synthétique les principaux résultats de la recherche dans le domaine et les implications pédagogiques et didactiques.
- Bonnery S. (dir.) (2015) Supports pédagogiques et inégalités scolaires : études sociologiques, La dispute "L'enjeu scolaire", Paris
  Regards de chercheurs sur les supports pédagogiques proposés aux enseignants, entre autre du point de vue de leur complexité cognitive et langagière.
- Charlot B. Bautier E. et Rochex Y. (1992). École et savoirs en banlieue et ailleurs. Paris : Armand Colin
  Au départ de cette recherche, la question suivante (« bilan de savoir ») posée à des enfants d'origine sociale variée : « J'ai ... ans. Depuis que je suis né, j'ai appris beaucoup de choses, chez moi, à l'école, dans la cité, ailleurs. Qu'est-ce qui est important pour moi dans tout ça ? Et maintenant, qu'est-ce que j'attends ? ».
- Hache C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens. Une étude de cas avec « avec », Petit x n°97, IREM de Grenoble.
  Exemple d'analyse des interactions entre formalisme et langue naturelle dans les pratiques langagières des mathématiciens et en classe (manuels de collège, classe de 1eS).
- Laborde C. (1975). Un langage de prononcés de formules en mathématiques, Revue française de pédagogie n°33, INRP
  Cet article s'intéresse notamment à la formulation orale des expressions symboliques mathématiques.
- Lahanier-Reuter D. (1998). La description en mathématiques. Quelques problèmes posés par les descriptions géométriques, Pratiques n° 99, numéro spécial : la description.
- Lahanier-Reuter D. (2007). Récits dans la classe de mathématiques, Pratiques n° 133/134, numéro spécial : récits et disciplines scolaires.
- Laparra M. et Margolinas, C. (2009). Le schéma : un écrit de savoir ?, Pratiques n° 143-144, numéro spécial : les écrits de savoir.
- Pluvinage F. (2000). Mathématiques et maîtrise de la langue, Repères-IREM n°39, Topiques Éditions.
- Vergnaud G. (1991). Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques, Revue Française de Pédagogie n°96
  Cet article montre que le langage naturel et le symbolisme jouent un rôle essentiel dans l'activité mathématique et dans l'apprentissage des mathématiques.

Dictionnaires

- Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales (Cnrtl) : Dictionnaire en ligne, étymologie, proxémie, etc.
- Rey A. (dir.) (2012) Dictionnaire historique de la langue française, Le Robert. Dictionnaire historique de référence.
- Rey-Debove J. (dir) (2004) Brio, dictionnaire général et morphologique, Le Robert.
  Ce dictionnaire propose une analyse comparative des mots permettant la mise en évidence des éléments qui les composent.
- Rigny A. et López P. (2014) Parlez-vous maths ? Le langage mathématique dans tous ses états, EDP Sciences, Hors Collection.
  Dictionnaire « français-maths » écrit par deux professeurs de mathématiques confrontés aux difficultés rencontrées par leurs étudiants.
- Hauchecorne B. (2003). Les Mots et les Maths, dictionnaire historique et étymologique du vocabulaire mathématique, Ellipses.
  Ce dictionnaire retrace l'origine et l'histoire de plus de 500 mots utilisés en mathématiques.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Ressources transversales

La différenciation pédagogique

> Le premier article du décret 2015-544 du 19 mai 2015 remplace l'article D332-2 du code de l'éducation par les dispositions suivantes : *« Le collège dispense à chaque élève, sans distinction, une formation générale qui lui permet d'acquérir, au meilleur niveau de maîtrise possible, le socle commun de connaissances, de compétences et de culture défini en application de l'article L. 122-1-1 et dont l'acquisition a commencé dès le début de la scolarité obligatoire. »*

L'enseignement au collège est ainsi organisé autour de la prise en compte du parcours personnel de formation de **chaque élève**, dans l'objectif d'une acquisition du socle commun **au meilleur niveau de maîtrise possible**, qui peut varier d'un élève à l'autre. Pour autant, le cadre du collège ne doit pas être remis en cause, et la création de filières doit être évitée, comme le rappelle l'annexe de la loi du 8 juillet 2013 : *« Il convient de remettre en cause tout dispositif [...] qui détournerait les élèves de l'objectif de maîtrise du socle et les enfermerait trop tôt dans une filière. »*

Le rapport *« Pour un collège démocratique »* de Louis Legrand, en 1982, affirmait déjà : *« admettre au collège tous les élèves de 11-12 ans, c'est obligatoirement créer une hétérogénéité de population scolaire qui ne saurait être traitée uniformément sans dommage. L'échec relatif des collèges — et de l'école élémentaire — vient précisément de cette absence de différenciation. »*

La différenciation pédagogique consiste[1] à mettre en œuvre un ensemble diversifié de moyens et de procédures d'enseignement et d'apprentissage pour permettre à des élèves d'aptitudes et de besoins différents d'atteindre par des voies différentes des objectifs communs.

1. *On reprend ici des éléments de la définition du Conseil supérieur de l'éducation du Québec.*

Deux remarques s'imposent :

- la différenciation pédagogique ne répond pas à la seule question de la difficulté scolaire et ne doit pas être réduite à la remédiation. Accompagner chaque élève dans son apprentissage pour acquérir le socle commun au meilleur niveau de maîtrise possible, c'est également accompagner l'élève qui est en réussite ;
- la différenciation pédagogique ne saurait être limitée aux temps dédiés à l'accompagnement personnalisé.

Diversifier pour différencier

Les sciences de l'éducation ont coutume de distinguer *la différenciation successive* et *la différenciation simultanée*.

La différenciation successive

Elle porte sur l'utilisation, les uns après les autres et dans le déroulement même du cours, de situations d'apprentissage, d'interactions, d'outils, de supports, suffisamment variés pour que chaque élève puisse trouver la manière de travailler qui lui convient le mieux. Pour décrire cette variété, on peut citer comme exemples :

- le recours au texte, à l'image, au son ;
- le tâtonnement expérimental, l'explication magistrale, la recherche individuelle, par petits groupes, en plénière.

Ce type de différenciation est compatible avec le fonctionnement d'une leçon collective.

La différenciation simultanée

Au sein de la classe, les élèves, individuellement ou au sein de groupes, travaillent en même temps sur des tâches différentes adaptées à leurs besoins du moment. Ce mode de différenciation suppose que l'enseignant ait auparavant identifié ces besoins (soit à l'aide d'évaluations diagnostiques, soit à l'issue de l'observation fine de ses élèves au travail) et ait conçu les situations d'apprentissage et les organisations de classe les mieux adaptées à la réussite individuelle de chaque élève (plans de travail personnalisés, ateliers tournants, groupes d'entraide ou de besoin).

Pour ne pas marginaliser les élèves les plus fragiles et ne pas encore accroître les écarts, il convient de proposer majoritairement à tous les élèves des situations d'apprentissage visant les mêmes objectifs de formation, clairement identifiés par le professeur. En jouant sur certains paramètres didactiques et pédagogiques, il pourra concevoir différents cheminements d'apprentissage tenant compte de la variété des aptitudes et des besoins de ses élèves. Dans un souci de faisabilité et de réalisme, il importe que le nombre de ces cheminements reste limité.

Parmi les paramètres sur lesquels on peut jouer pour réaliser la différenciation, citons, de façon non exhaustive :

- les variables didactiques : par exemple la nature et l'écriture des nombres engagés, le degré de complexité d'une figure géométrique, le nombre d'étapes d'un raisonnement ;
- les supports (textes, images, vidéos, etc.) ;
- les modalités d'organisation de la tâche à réaliser, en évaluation comme en formation. Celles-ci varient en fonction des outils mis à disposition, des aides apportées par l'enseignant ou par les pairs, de la nature des consignes, du temps dont dispose l'élève, etc.
- les processus mis en œuvre pour réaliser la tâche (raisonnement par tâtonnement, par essai-erreur, par déduction logique) ;
- les productions attendues (écrites ou orales, individuelles ou par groupes, complètes ou partielles).

Les variables didactiques

La situation de référence et l'objectif visé sont les mêmes pour tous, mais l'activité varie selon les valeurs données à certaines variables de la situation : les ressources disponibles (utilisation d'outils, guidage du professeur…) ; les contraintes imposées (un temps d'exécution variable, un support utilisé différent selon le niveau de l'élève, une demande de résultat écrit pour certains élèves quand pour d'autres c'est le professeur qui sert de secrétaire).

À titre d'exemple, prenons comme situation de référence le célèbre puzzle de Brousseau (ou sa variante proposée par R. Charnay).

L'objectif de cette situation d'apprentissage est de faire identifier aux élèves qu'agrandir chacune des pièces du puzzle ne revient pas à ajouter le même nombre à toutes les mesures, mais à multiplier toutes les mesures par un même nombre.

Afin de faire face à l'hétérogénéité des élèves en termes de maîtrise calculatoire, la différenciation peut porter sur les nombres engagés dans le problème.

Ainsi, proposer à certains élèves des agrandissements du type « le côté qui mesure 8 cm devra mesurer 16 cm sur le puzzle agrandi », à d'autres « le côté qui mesure 8 cm devra mesurer 12 cm sur le puzzle agrandi », à d'autres encore « le côté qui mesure 7 cm devra mesurer 12 cm sur le puzzle agrandi », permet d'adapter la situation à différents niveaux de maîtrise des nombres. Le fait que, pour les uns le coefficient d'agrandissement soit un entier, pour d'autres un nombre décimal non entier, et pour d'autres enfin un rationnel non décimal, ne nuit pas à l'objectif principal de formation (le caractère multiplicatif de la situation), tout en tenant compte du degré de maîtrise de la notion de quotient.

Notons que la différenciation peut aussi reposer sur la forme et le nombre des pièces du puzzle.

Les supports

Pour tenir compte des difficultés de lecture ou d'expression écrite de certains élèves, il importe de ne pas faire reposer tous les apprentissages sur la maîtrise du langage écrit (en compréhension comme en production), mais de jouer sur la multiplicité des supports d'information et de communication : images ou dessins, schémas, énoncés oraux, vidéos, écoute ou production d'enregistrements audio. Dans chaque cas, une explicitation des énoncés et des consignes et une vérification de leur bonne compréhension sont indispensables, surtout pour les élèves fragiles.

Les procédures de résolution

On parle parfois de *différenciation par les procédures*.

Il s'agit de concevoir des activités permettant à chacun d'apporter sa propre solution, en faisant appel à ses propres procédures. Par exemple, pour la résolution d'une équation du premier degré, certains élèves peuvent trouver une solution approchée par essai-erreur, avec ou sans usage d'un tableur ou d'une calculatrice, tandis que d'autres mettent en œuvre la procédure algébrique de résolution. La mise en commun et la confrontation des différentes solutions, les échanges et les débats qu'elles ne manqueront pas de susciter se substituent alors à une correction qui consisterait à valider la solution experte.

Pour permettre de diversifier les procédures mises en œuvre, le problème proposé ne doit pas induire *a priori* la réponse experte, mais permettre la coexistence de plusieurs niveaux ou plusieurs formes de réponses. Cette différenciation par les procédures ne demande pas de protocole ou de préparation très compliqués puisque tous les élèves travaillent au même moment sur la même tâche. Il s'agit simplement d'ouvrir le questionnement pour que chacun soit capable, d'une manière ou d'une autre, de répondre aux questions posées avec ses méthodes propres, mais aussi de les confronter à celles utilisées par ses camarades.

Il convient toutefois de prévoir des protocoles permettant de gérer la diversité des états d'avancement dans la réalisation de la tâche. Si la recherche s'inscrit dans une certaine durée, la variété des démarches de résolution (et du temps nécessaire à leur mise en place) peut en effet générer des problèmes de gestion de classe qu'il est préférable d'anticiper : il importe que tous les élèves s'impliquent dans la recherche et disposent d'un temps suffisant pour mettre en œuvre leur propre démarche ; il faut veiller à la fois à ce que les élèves les plus rapides ne soient pas freinés dans leur activité et à ce que leurs réponses ne retirent pas prématurément tout intérêt pour la tâche à leurs camarades plus lents. Enfin, lors de la confrontation des différentes procédures lors d'une plénière de synthèse, le professeur doit mettre en avant l'efficacité de la démarche experte sans stigmatiser les procédures personnelles moins performantes.

On peut par exemple, dans un premier temps, éviter de donner le problème dans sa généralité. Si l'activité proposée commence par l'étude d'un cas particulier, les élèves plus rapides risquent moins de bousculer les autres. En outre, il est bienvenu de permettre aux élèves de poser eux-mêmes la question de la généralité du résultat obtenu sur un cas particulier.

Les modalités d'organisation du travail

Différentes organisations du travail en groupes peuvent être envisagées.

Le groupe détaché au sein du groupe classe

Les élèves ont à réaliser le même travail, sur le même support, avec les mêmes consignes. Ce qui varie est la modalité de début de séance : les élèves en difficulté sont regroupés autour de l'enseignant qui, par exemple, réactive des prérequis ou vérifie la bonne compréhension de l'énoncé et des consignes, tandis que les autres démarrent l'activité en autonomie.

Les groupes de besoin

Ces groupes sont constitués **ponctuellement** en fonction des difficultés momentanées rencontrées ou des nécessités d'approfondissement. Il s'agit donc de groupes homogènes**, changeants** : il est important que leur constitution ne soit pas fixée tout au long de l'année. Le groupe de besoin peut bénéficier d'une aide apportée par le professeur ou travailler en autonomie. L'activité qui lui est proposée doit lui permettre de progresser. Au sein du groupe, les élèves ont la même tâche à réaliser, mais ne travaillent pas nécessairement en coopération.

Les groupes constitués des élèves les plus rapides pourront se voir proposer des questions « défi » qui ne donnent pas lieu à une mise en commun.

Les groupes hétérogènes

La répartition des élèves en groupes hétérogènes permet de différencier les rôles au sein du groupe afin que chacun puisse apporter sa part personnelle au travail collectif (par exemple : le rôle de « rapporteur » du groupe ou le rôle de « celui qui va montrer comment faire », etc.). Les compétences développées variant selon les rôles, on répartira les élèves en tenant compte des besoins d'apprentissage de chacun.

La régulation au sein du groupe est un objectif relevant des compétences sociales à développer chez les élèves, mais elle incombe avant tout à l'enseignant qui doit gérer la nature des interactions entre pairs. La répartition entre concepteurs, exécutants et inactifs

Retrouvez Éduscol sur

n'étant jamais exclue, il doit éviter deux risques de dérive : l'inactivité des plus faibles ou le confinement de leur activité à des tâches techniques ou « d'intendance » sans plus-value intellectuelle (par exemple le recopiage de la solution trouvée par les autres).

L'aide des pairs

À certains moments, un groupe hétérogène peut fonctionner sur le mode de l'entraide, un élève du groupe pouvant solliciter un ou plusieurs autres pour une suggestion, un avis, le contrôle de certains résultats. Cette aide est mise en œuvre par l'élève aidant soit avec l'accord de l'enseignant, soit à sa demande. Elle se base sur un double volontariat : le désir d'aider et celui d'être aidé. Elle nécessite donc un accord réciproque entre les deux élèves concernés.

Elle se situe en général en fin d'activité d'entraînement, lorsqu'un élève a terminé et qu'un autre se trouve en difficulté légère.

Si certains élèves jouent ce rôle de « camarade aidant » avec plaisir et efficacité, d'autres peuvent trouver pesant de s'occuper d'un élève moins à l'aise qu'eux. Le professeur doit accompagner ces « camarades-ressources » dans cet apprentissage de compétences sociales et de communication qui ne peut avoir que des répercussions positives sur leurs propres apprentissages. Il importe aussi que l'entraide par un pair ne s'applique que pour résoudre une difficulté légère et bien ciblée de l'élève « aidé » et qu'elle ne se substitue en aucun cas au rôle du professeur, seul expert pour identifier les difficultés de compréhension et déconstruire les conceptions erronées.

Le traitement de l'erreur

Parties intégrantes de la différenciation pédagogique, le repérage, l'identification et le traitement des blocages et des erreurs constituent à la fois pour l'élève un levier pour progresser dans ses apprentissages et pour le professeur un appui pour réguler son enseignement. L'atteinte de ce double objectif est cependant conditionnée par la perception du statut que l'un et l'autre (élève et professeur) accordent à l'erreur.

Si elle est perçue comme une faute, le professeur pourra être tenté de la rejeter sur l'élève (qui aura mal écouté, mal retenu, ou mal appliqué ce qui lui a été enseigné) et de la corriger au plus vite, pour qu'elle cède la place à « la » réponse exacte. Quant à l'élève, il sera d'autant plus disposé à admettre la correction qu'elle lui permettra de ne pas s'appesantir sur un échec personnel.

Au contraire, si le blocage ou l'erreur est perçu comme inhérent à l'apprentissage, le professeur fera de son repérage, de son identification et de son traitement des enjeux de son enseignement et développera des stratégies permettant d'en faire un véritable levier de progrès.

Ces stratégies doivent s'adapter au type d'erreur ou de blocage qu'il s'agit d'abord de repérer puis de traiter. Rares sont les cas où leur origine peut être identifiée à partir des seules traces écrites laissées par l'élève. Leur interprétation gagne à s'appuyer sur un questionnement oral effectué par le professeur. Lorsqu'elle est possible, l'explicitation par l'élève du cheminement qui l'a amené à produire une erreur permet à l'enseignant de comprendre son fonctionnement mental, mais aussi les conceptions erronées qui font obstacle à sa compréhension.

On propose ici une typologie (non exhaustive) de certaines erreurs, et des pistes pédagogiques pour une prise en compte profitable, en nous inspirant de l'ouvrage *L'erreur, un outil pour enseigner*, de Jean-Pierre Astolfi, 1997, ESF éditeur (collection « Pratiques et enjeux pédagogiques »).

Erreurs ou blocages relatifs à la situation

Exemples de problèmes rencontrés :

- La situation paraît nouvelle à l'élève, il ne la reconnaît pas. Le langage utilisé, inhabituel, fait obstacle à la compréhension du travail qui lui est demandé ; la présentation de l'exercice est inédite ; le support est nouveau ; la tâche à effectuer est différente de celles qu'il a rencontrées auparavant…
- La situation est connue de l'élève (par exemple un problème de proportionnalité), mais elle privilégie un type de réflexion ou de raisonnement que l'élève maîtrise mal (les rapports d'homogénéité et le coefficient de proportionnalité sont des nombres rationnels non décimaux). L'élève construit alors une représentation erronée de la tâche à effectuer.
- La situation est connue de l'élève, mais elle impose des contraintes plus importantes, par exemple parce qu'il s'agit d'un travail en temps limité ; parce qu'il y a un plus grand nombre d'exercices à traiter ; parce que la tâche est d'un degré de complexité supérieur ; ou encore parce que les exercices se réfèrent à des apprentissages relatifs à des thèmes différents.

Pistes pour une prise en compte de ce type d'erreur :

- prendre l'habitude de varier les représentations, les supports tant en formation qu'en évaluation ;
- éviter de faire appel à des situations trop éloignées du quotidien des élèves ;
- aider les élèves à rattacher une situation à une classe de problèmes (par exemple un problème de proportionnalité) et à identifier les principaux outils permettant de les résoudre (propriété de linéarité, coefficient de proportionnalité, tableaux) en indiquant dans quels cas certains outils sont plus efficaces que d'autres.

Erreurs ou blocages relatifs à la consigne

Exemples de problèmes rencontrés :

- la consigne est formulée de façon ambiguë ou contient trop d'implicite ;
- la consigne renferme des difficultés d'ordre lexical ou syntaxique ;
- l'élève ne comprend pas la consigne : il ajoute, enlève, remplace des éléments dans la consigne, il recrée la consigne ;
- l'élève manque d'autonomie face à la consigne ; il anticipe trop ou trop peu ; il oublie la consigne ;
- l'élève décode mal les règles du contrat didactique : il sait que le professeur attend une réponse, mais ne comprend pas vraiment ce qui est attendu.

Pistes pour une prise en compte de ce type d'erreur :

- procéder systématiquement à la reformulation de la consigne par les élèves fragiles ;
- aider les élèves à s'interroger sur le sens de la consigne, à identifier les mots importants, à repérer des analogies avec des problèmes déjà traités ;
- aider les élèves à se représenter mentalement le travail à effectuer ;
- inciter les élèves à vérifier leur production en cours de tâche. Exemples : contrôler la vraisemblance des calculs à l'aide d'ordres de grandeur, tester une formule sur des valeurs numériques.

Erreurs ou blocages relatifs aux opérations intellectuelles

Exemples de problèmes rencontrés :

- l'élève a des difficultés à reconnaître les connaissances et les méthodes utiles à la résolution de la tâche ;
- l'élève a des difficultés pour transférer des connaissances et des compétences acquises dans un domaine mathématique à un autre domaine ;
- l'élève a des difficultés à extraire de l'ensemble de ses acquis les éléments particuliers adaptés à la résolution de la tâche proposée ;
- l'élève a des difficultés à transférer sa connaissance d'une situation d'apprentissage à une situation partiellement ou entièrement nouvelle.

Pistes pour une prise en compte de ce type d'erreur :

- aider les élèves à s'emparer de la situation, par exemple en la représentant par un dessin, un schéma ;
- amener l'élève à établir des liens entre les connaissances nouvelles et ses acquis antérieurs, mais aussi entre les différents champs disciplinaires. Forger une image mentale des connaissances à acquérir ;
- inciter l'élève au transfert de ses acquis grâce à un travail plus transversal, interdisciplinaire ;
- freiner l'impulsivité, favoriser la réflexion, la concentration, le questionnement intérieur ;
- consolider les connaissances de base grâce à des activités ritualisées d'entrainement (portant aussi sur des connaissances et des méthodes étudiées dans les classes antérieures) ;
- inciter les élèves à rendre explicites leurs démarches ;
- favoriser les activités développant tous les types de mémoire (visuelle, auditive, kinesthésique).

Erreurs ou blocages relatifs à l'acquis antérieur

Exemples de problèmes rencontrés :

- acquis antérieurs partiels, insuffisamment consolidés et/ou incorrects ;
- non-acquisition du savoir.

Pistes pour une prise en compte de ce type d'erreur :

- identifier les prérequis, vérifier leur stabilité et ne pas hésiter à différer un nouvel apprentissage ; par exemple, travailler sur la différence entre nombres positifs avant l'introduction des nombres négatifs ; consolider la multiplication entre relatifs avant d'introduire la division ;
- reprendre un apprentissage mal acquis en modifiant les situations, le contexte ;
- aider l'élève à faire émerger ses représentations initiales pour qu'il puisse lui-même les rejeter s'il les reconnaît comme étant erronées ou inefficaces ;
- aider l'élève à surmonter progressivement ses difficultés, en lui proposant des exercices de complexité croissante ;
- aider l'élève à hiérarchiser et à structurer ses connaissances, par exemple en utilisant des cartes mentales, en rédigeant des fiches de synthèse, en identifiant les exemples emblématiques, etc.

Pédagogie inversée

Cette modalité d'enseignement consiste à mettre à disposition des élèves des documents qu'ils consultent avant de venir en cours. Grâce au développement des technologies, ces documents sont souvent aujourd'hui des capsules vidéo (souvent conçues par l'enseignant lui-même). Les élèves ont alors, en amont de la séance, la possibilité d'écouter et de visualiser autant de fois que nécessaire une définition ou l'explication d'une procédure (de calcul ou de construction géométrique, par exemple). Ils arrivent en classe en étant déjà familiarisés avec les notions qui sont alors mises en pratique sur des exercices en présence de leur professeur. Celui-ci peut compléter la vidéo par un questionnaire (souvent en ligne) à remplir par les élèves après le visionnage de la capsule et qui permet au professeur d'apprécier en amont de la séance le degré de compréhension de ses différents élèves. Fort de cette information, il peut alors concevoir des exercices adaptés à chacun et surtout consacrer un temps de réexplication auprès des élèves dont il a perçu les difficultés.

L'intérêt majeur de cette modalité pédagogique réside dans l'utilisation des ressources du numérique afin de dégager du temps en classe pour une réelle mise en activité des élèves et permettre à l'enseignant de l'accompagner.

Elle a aussi ses limites : d'abord, renvoyer à la maison ou au CDI toute la part de découverte, avec le danger évident de renforcer les inégalités en matière d'appropriation des savoirs. Ensuite, il faut signaler le risque de « sanctuariser » des présentations vidéos conçues a priori, sans avoir été articulées aux interrogations élaborées avec les élèves ; il ne faudrait pas non plus que l'aspect séduisant d'un clip vidéo ne prime sur son caractère fonctionnel et fasse oublier l'objectif majeur de différenciation. Enfin, la classe inversée peut amener à sous-estimer le rôle pédagogique essentiel de la parole du professeur devant la classe ; c'est bien cette parole qui, par sa précision, sa justesse, sa rigueur, sa capacité à s'adapter à son public, non seulement « institue le savoir », mais crée un véritable « rapport au savoir » auquel ne peut pas se substituer un ensemble de consignes et de gestes intégrés dans une vidéo, aussi utiles et pertinents qu'ils puissent être.

On peut dégager de cette analyse quelques principes pour faire un bon usage de la classe inversée.

Premièrement, il faut conserver en classe des « interventions magistrales » : en effet, celles-ci sont indispensables pour former chaque élève à l'écoute attentive (en posant, par exemple, des questions préalables pour favoriser l'attention, la collecte intelligente des informations et la formalisation des acquis).

Deuxièmement, la différenciation consécutive suppose l'articulation, dans les pratiques quotidiennes de la classe, de temps de « construction des questions », de temps d'exposés — dont certains peuvent être effectivement « externalisés » — et des temps de retour réflexif sur ces exposés — qu'introduit légitimement la classe inversée — mais aussi des temps d'entraînement personnel, des temps de synthèse collective, des temps de restitution, des temps pour le transfert, etc. : chacun de ces temps doit être précisément identifié par les élèves, tant en termes d'objectifs poursuivis, de dispositifs mis en œuvre (travail individuel, par petits groupes ou en classe entière), de consignes à appliquer, de ressources à mobiliser, etc. La référence à une « pédagogie de l'activité des élèves » ne peut en effet exonérer l'enseignant d'un travail préalable sur la cohérence des séquences d'apprentissage proposées, le choix des situations et des outils utilisés, les opérations mentales suscitées, etc., toutes choses qui sont facilitées, de toute évidence, par le travail en équipe avec ses collègues.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Ressources transversales

Travail des élèves en mathématiques en dehors de la classe

Ce document précise le rôle et les modalités de mise en œuvre du travail des élèves en dehors de la classe, au collège et au lycée. Centré sur les apprentissages des élèves, il met en lumière :

- la nécessaire articulation entre le travail mené en classe et en dehors de celle-ci ;
- le type d'activités proposées et de productions attendues, qui ne sauraient se limiter aux seuls travaux écrits ;
- les perspectives offertes par les outils numériques.

Objectifs du travail en dehors de la classe

Le travail demandé aux élèves en dehors de la classe poursuit deux objectifs principaux :

- faciliter le développement de compétences dont l'exercice demande du temps, en anticipant ou en prolongeant des activités de classe ;
- permettre à chaque élève de progresser selon son rythme et de développer son autonomie.

Motivation des élèves

Elle se fonde sur cinq éléments majeurs :

- une explicitation des attendus, des objectifs en matière d'apprentissage, en fonction de l'avancement de chacun dans son parcours de formation ;
- un contrat pédagogique entre le professeur et sa classe ;
- l'adaptation du travail proposé en fonction des aptitudes, des besoins et des goûts de chacun ;
- la richesse, l'intérêt et la diversité des situations proposées ;
- une évaluation explicite et bienveillante et un travail spécifique sur l'erreur en tant que levier de progrès.

Typologie d'activités possibles

Anticipation

Anticipation du cours

- diagnostic des prérequis nécessaires et des obstacles potentiels ; réactivation des prérequis ;
- introduction d'une notion par une activité d'accroche.

Visant à faciliter la compréhension d'une notion, ces modalités d'anticipation nécessitent un délai suffisant pour la mise en place éventuelle d'une différenciation.

Préparation d'une activité
- prise de connaissance d'un énoncé ;
- collecte de données ;
- réalisation de schémas.

L'externalisation de ces tâches permet de gagner du temps et d'installer les élèves dans une démarche d'investigation.

Apprentissage du cours

Il vise à la fois la stabilisation de la compréhension amorcée en cours, l'assimilation et la mémorisation des connaissances, des méthodes et des démarches.

Entraînement

Indispensable pour atteindre l'opérationnalité, l'entraînement permet de développer des automatismes, de stabiliser et d'approfondir les connaissances et les procédures, d'entretenir les acquis.

Recherche

Les activités de recherche offrent l'occasion de développer l'initiative et l'autonomie, de repérer les techniques à maîtriser pour réaliser la tâche et les éléments théoriques qui la sous-tendent. Consubstantielles à l'activité mathématique et au plaisir d'apprendre, elles s'adressent à tous les élèves et participent à la construction d'une image positive de la discipline. Elles offrent un cadre favorable à la collaboration entre élèves.

Travail sur le langage mathématique

Il est essentiel que les élèves soient régulièrement placés dans des situations de communication authentiques où chacun a l'initiative de ce qu'il produit. Ainsi, la mise en forme d'une solution partiellement envisagée en classe, la synthèse d'une activité en vue de l'institutionnalisation d'un résultat, le compte rendu d'une recherche ou la préparation d'un exposé prenant appui sur une étude documentaire, sont des pratiques formatrices au service de l'expression écrite.

Par ailleurs, le passage d'un oral véhiculaire à la forme scolaire de l'oral mathématique est un objectif de formation auquel peut contribuer le travail hors de la classe, notamment avec des outils numériques. Il peut s'agir par exemple d'expliciter oralement le déroulé d'une construction géométrique et d'en réaliser un enregistrement audio (MP3). Ce travail oral et écrit, qui constitue une phase préparatoire à l'apprentissage de la rédaction, participe à la maîtrise du langage mathématique, et par-là même à la construction et au contrôle de la validité des raisonnements et de la bonne acquisition des connaissances et des méthodes.

Révision

Il s'agit de revoir des notions déjà étudiées afin destabiliser, d'organiser et de hiérarchiser les connaissances. Ce temps de révision doit permettre à l'élève de prendre du recul, de mettre en relation différentes notions et de vérifier la bonne acquisition des méthodes.

Modalités de mise en œuvre

L'organisation du travail mathématique demandé aux élèves en dehors de la classe ne saurait être conçue par le seul professeur de cette discipline sans concertation avec l'ensemble de l'équipe pédagogique. À l'intérieur d'un cadre global contraint, le critère d'efficacité revêt donc un aspect majeur. La régularité et la diversité du travail de l'élève sont des conditions de cette efficacité ; on privilégiera ainsi des travaux courts et fréquents, alternant avec des travaux plus longs mais plus rares, et de nature variée tant au niveau des productions attendues que des modalités de réalisation.

Le rythme d'au moins une production écrite par quinzaine, individuelle ou collective, est nécessaire pour permettre aux élèves d'atteindre les objectifs de formation du cycle 4.
Le travail en dehors de la classe s'articule avec le travail en classe qu'il permet de préparer, prolonger, illustrer ou réinvestir.

Pour être efficace, le travail demandé aux élèves doit tenir compte de leur diversité. Une même situation peut donner lieu à des adaptations en termes d'objectif, de difficulté, de longueur.

L'évaluation du travail réalisé par les élèves en dehors de la classe peut revêtir des formes variées : notation chiffrée, évaluation par compétences, autoévaluation individuelle ou par groupes… Dans tous les cas, cette évaluation est menée sous la conduite experte du professeur, et a pour objectif d'aider l'élève à progresser dans ses apprentissages.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Ressources transversales

Types de tâches

Les exemples fournis dans les ressources thématiques sont classés selon trois types d'activités : questions « flash », activités avec prise d'initiative et exercices d'application ou de réinvestissement. Les situations proposées ne sauraient être considérées comme des outils prêts à l'emploi. Leur mise en œuvre suppose une véritable appropriation par les équipes de professeurs, notamment à travers une réflexion collective sur différents scenarios pédagogiques possibles, sur les productions d'élèves attendues ou encore sur l'intégration dans la progression pédagogique.

Questions « flash »

La pratique de questions « flash » vise à renforcer la mémorisation de connaissances et l'automatisation de procédures afin de faciliter un travail intellectuel ultérieur par leur mise à disposition immédiate.

Une tâche de ce type relève d'une activité mentale attendue sur un temps court (quelques minutes). Elle peut mobiliser une connaissance, un savoir-faire, un traitement automatique ou réfléchi. Pour être efficaces, les questions flash doivent être proposées de façon régulière, tout au long du cycle, et s'inscrire dans une stratégie d'enseignement qui articule de façon cohérente entraînement, évaluation, remédiation et consolidation. Elles se prêtent à l'utilisation de supports variés : papier, diaporama, enregistrement oral.

Activités avec prise d'initiative

Les activités exigeant une prise d'initiative sollicitent l'autonomie et l'imagination des élèves. Elles peuvent conduire à modéliser une situation et consistent toujours à résoudre un problème. La résolution de ce problème peut être utilisée dans des situations d'enseignement variées :

- la découverte d'une notion nouvelle, à travers l'identification d'un obstacle qu'elle permet de franchir ;
- le réinvestissement de notions antérieurement installées.

Grâce à un questionnement suffisamment ouvert, la réalisation d'une activité de ce type favorise la mise en œuvre de plusieurs stratégies, d'expertise mathématique de différents niveaux (on peut parler à ce titre de « procédures personnelles », distinctes de la procédure experte). Une telle activité se prête donc à la différenciation pédagogique. Il importe que tous les élèves, y compris les plus fragiles, puissent s'engager dans la réalisation de la tâche.

Le contexte d'une activité avec prise d'initiative peut être interne aux mathématiques, issu de la vie courante, d'une ou plusieurs autres disciplines. Elle peut être proposée individuellement ou en groupes, en classe ou en dehors de la classe, à condition dans ce cas que les élèves aient été auparavant initiés à ce type d'activités sous la conduite du professeur.

Par la liberté de cheminement qu'elle laisse aux élèves, une activité avec prise d'initiative, contrairement à une activité guidée, doit donner lieu à des démarches et des productions variées ; les élèves doivent être incités à garder trace de leurs recherches, même infructueuses ou inabouties, afin de permettre le développement et l'évaluation de la compétence « chercher ». Pour ne pas être bloqué dans sa recherche, un élève ou un groupe d'élèves peut, à un moment jugé opportun par le professeur, bénéficier d'aides ciblées (aides à la démarche de réalisation ou de résolution, apport de savoir-faire, par exemple sous la forme d'une procédure de réalisation, apport de connaissances, etc.).

Une activité avec prise d'initiative peut aider l'élève à comprendre que ses difficultés dans la résolution peuvent être imputées à une maîtrise insuffisante de connaissances ou de techniques. L'activité pourra alors donner aux yeux de l'élève une réelle légitimité pour un entraînement technique indispensable (calcul numérique ou littéral, reconnaissance de configurations géométriques, apprentissage du cours, questions flash, etc.). Il est tout à fait envisageable d'interrompre la réalisation d'une activité avec prise d'initiative pour y revenir après avoir effectué l'entraînement technique nécessaire à son accomplissement. La motivation des élèves pour cet entraînement pourra alors se trouver accrue par l'envie de revenir rapidement à la résolution du problème initial.

Afin de ne pas déconnecter les activités à prise d'initiative des contenus du programme, les savoirs mathématiques (notions, méthodes ou stratégies) sollicités dans chaque activité de ce type doivent être formalisés au cours d'une phase d'explicitation, de structuration ou d'institutionnalisation.

Parmi les activités à prise d'initiative figurent aussi bien des problèmes d'une durée limitée (pouvant par exemple être traités sur une partie de séance, ou proposés dans le cadre d'un travail en dehors de la classe) et des tâches plus complexes, interdisciplinaires ou relevant de la vie courante. Celles-ci pourront alors trouver naturellement leur place dans les projets d'Enseignements Pratiques Interdisciplinaires.

Tâches intermédiaires

Intermédiaires entre les questions flash et les activités avec prise d'initiative, les tâches intermédiaires visent à stabiliser et à consolider les savoirs acquis. Selon le moment auquel elles apparaissent dans le processus d'apprentissage, elles peuvent prendre la forme d'exercices d'application ou de réinvestissement.

Les exercices d'application permettent à l'élève de mettre en œuvre, dans un contexte voisin de la situation d'apprentissage, des notions récemment acquises. Les exercices de réinvestissement permettent de consolider des connaissances, des procédures ou des stratégies antérieurement acquises, dans un contexte éventuellement différent du contexte d'apprentissage (on parle alors de transfert ou de recontextualisation). Ils trouvent une place naturelle dans une progression spiralaire conçue sur la totalité du cycle. Sans être une tâche isolée, une tâche intermédiaire nécessite au maximum deux ou trois étapes de raisonnement, et est posée sous une forme explicite.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

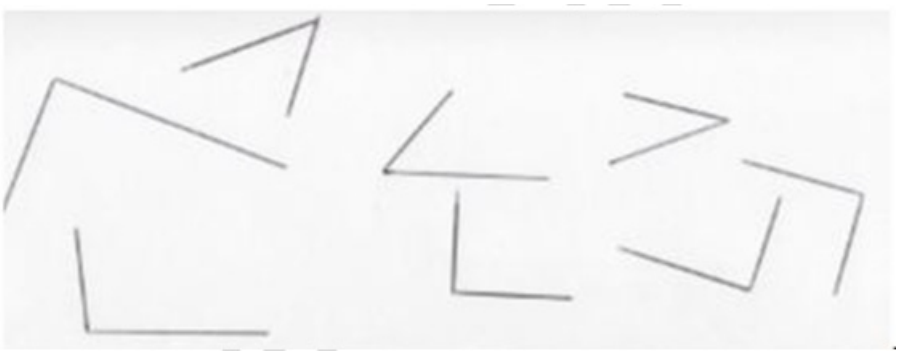
Compétences travaillées en mathématiques

Chercher

Chercher est peut-être la première des compétences à laquelle on pense lorsqu'on tente de décrire l'activité mathématique. Elle en constitue sans doute la part la plus exaltante pour celles et ceux qui aiment les mathématiques. Mais aussi la part la plus difficile pour d'autres. Il faut reconnaitre qu'il s'agit de l'une des compétences qui se laissent le moins facilement circonscrire. Amener les élèves à savoir quoi chercher et comment chercher est donc un objectif ambitieux, mais nécessaire au développement de toutes les autres compétences au cycle 4.

Deux activités pour un même terme

La compétence « Chercher » recouvre dans le travail quotidien de l'élève comme du mathématicien deux activités qu'il convient de distinguer. On peut illustrer cette dualité, qui tient simplement à la polysémie du verbe chercher, par les deux consignes suivantes, toutes deux relatives à une série de représentations d'angles :



- Première consigne : « Chercher quels sont les angles droits »
- Deuxième consigne : « Chercher comment classer les angles »

Il s'agit de deux activités mettant en œuvre une recherche, mais alors que dans le premier cas, l'élève met en œuvre des processus éprouvés, repère et utilise les attitudes expertes qui lui auront explicitement été indiquées comme telles, dans l'autre, il s'agit de donner un sens à la question, voire de définir la question.

Le préambule du programme de mathématiques du cycle 4 illustre bien le premier sens de la compétence « Chercher » dans la mesure où il précise qu'on attend de l'élève qu'il sache « extraire d'un document les informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à ses connaissances ».

Au cycle 4, on laisse à l'élève plus d'autonomie. Les situations proposées nécessitent en effet une part plus importante d'initiative : compléter un tableau, voire construire un tableau qui n'est pas présent, effectuer des calculs qui ne sont pas explicitement demandés.

Quant au deuxième sens, il est également présent dans le volet « Compétences travaillées » du programme: il s'agit d'« émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples », mais aussi de « tester, essayer plusieurs pistes de résolution ».

Dans ce second sens, il est cependant moins évident de décrire de quoi il s'agit et ce qu'on attend véritablement de l'élève. Il ne s'agit pas, en tout cas, de deviner une question fermée que l'enseignant aurait en tête et il convient d'explorer plus avant ce qui constitue cette part essentielle de la compétence « Chercher ».

Que se passe-t-il lorsque l'on cherche ?

Chercher peut être vu en première analyse comme une activité transitoire pour l'élève, un échafaudage que l'on oublie une fois le bâtiment achevé. Pour aboutir au résultat d'un calcul, pour établir un raisonnement, pour construire une modélisation, on sait qu'il a fallu une phase de recherche, mais qui ne laisse pas de trace sur le résultat final : on recopie au propre et on note la synthèse dans le cahier.

Cette phase de recherche et de tâtonnement (« *je cherche…* », dit l'élève en cachant son cahier) est pourtant essentielle en mathématiques et la réussite de tous les élèves passe par le fait d'expliciter au mieux ce qui s'y joue.

On peut dégager au moins deux grands axes dans cette réflexion sur l'activité de recherche.

La dimension temporelle est essentielle : il faut du temps, et c'est dans le temps que les choses vont se transformer. Ne pas donner immédiatement l'idée, ou une amorce de solution, mais laisser un temps d'indétermination où puissent s'élaborer des représentations personnelles et variées.

La place de l'erreur constitue également un élément capital : si transformation il y a, c'est qu'à un moment, les choses n'étaient pas justes. Comme le dit le mathématicien Alexandre Grothendieck[1] : « *Craindre l'erreur et craindre la vérité est une seule et même chose. Celui qui craint de se tromper est impuissant à découvrir. C'est quand nous craignons de nous tromper que l'erreur qui est en nous se fait immuable comme un roc.* »

Cette peur dont parle le mathématicien (peur de se tromper, peur de ne pas bien faire, de ne pas savoir quoi faire) une phrase aussi anodine que « *Voilà, maintenant, vous pouvez chercher* » peut la déclencher chez les élèves : chercher quoi, chercher comment, chercher jusqu'où ? Si cette phrase est prononcée, il faut donc qu'elle ait été précédée d'expériences plus balisées. Il faut également laisser un temps suffisant pour prendre le risque d'essayer, de se tromper, d'identifier son erreur, mais un temps explicitement limité pour ne pas tomber dans une activité sans limite et sans consistance. Il faut enfin donner aux élèves les outils permettant de dépasser la peur de se tromper.

1. *Récoltes et Semailles : Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, Université Paris 6, Grothendieck Circle, 1986, Première partie, § 5.2.

Un chemin qui laisse des traces

Ces outils peuvent être définis comme ce qui reste lorsque la recherche est terminée, en dehors du résultat lui-même. Ils peuvent être pour une part identifiés par les élèves, par le biais d'un carnet de recherche ou de phrases notées sur le cahier : « *j'ai essayé avec trois et quatre* », « *j'ai fait des figures et j'ai mesuré* ». Mais ils doivent aussi être explicitement isolés et identifiés par l'enseignant : « *vous avez essayé plusieurs choses très intéressantes…* », « *en fait, ce que tu as fait, c'est ce qu'on appelle…* », « *lorsque l'on rencontre un problème de ce type, on fait souvent plusieurs figures…* »

Cette manière d'associer des problèmes et des méthodes permet ensuite de construire des situations références : « *et si tu essayais les mêmes idées que pour le problème de la somme de trois nombres ?* ». Les élèves peuvent ainsi peu à peu donner de l'épaisseur à l'activité de recherche : chercher, c'est tester avec des nombres, c'est émettre des hypothèses, c'est parfois proposer une question. Le passage à la démonstration, qui constitue un des objectifs du cycle 4, ne peut être réussi pour les élèves les plus fragiles que s'ils en perçoivent les moyens et les buts au travers de situations diverses et explicitement désignées comme représentatives de l'activité de recherche.

On notera à ce stade qu'au travers de l'apparition du thème E, « Algorithmique et programmation », ces questions trouvent un cadre nouveau et particulièrement propice. Tout d'abord, les outils de la recherche y sont explicitement désignés comme des objets de savoir à part entière : « décomposer un problème en sous-problèmes », « reconnaitre des schémas », outils et méthodes qui seront évidemment réinvestis avec profit dans d'autres champs du programme.

Ce thème offre également un cadre rassurant aux élèves quant à la place de l'erreur, qui fait en effet partie intégrante de la démarche de programmation : « Écrire, mettre au point (tester, corriger) et exécuter un programme en réponse à un problème donné ». De plus, la validation n'y est pas celle de l'enseignant, mais celle, plus neutre, de l'exécution du programme qui marche ou ne marche pas.

Une activité extraordinaire ?

La mention du carnet de recherche amène naturellement à évoquer la pratique des problèmes ouverts, et plus largement des défis, dans la classe, mais aussi en dehors de la classe sous la forme de clubs, ateliers, concours (MATh.en.JEANS, stages MathC2+, etc.). L'apport de tels dispositifs est indéniable, dans leur dimension collective et collaborative, comme dans leur aspect ludique. Mais ce serait une erreur de réduire la compétence « Chercher » à une activité extraordinaire, rare et sans effet sur l'ordinaire de la classe constitué quant à lui de questions fermées et balisées. Il importe de repenser les activités les plus quotidiennes, les plus simples, sous l'angle de ce qu'elles peuvent apporter, même modestement, à l'élaboration de la compétence « Chercher ».

Cela peut être à l'occasion d'une activité de calcul mental, sous forme de petits défis : trouver l'opération et non pas le résultat, trouver le résultat le plus grand possible, ou travailler sur la multiplication, comme sur cet exemple[2] :

2. Exemple issu de *Le calcul mental au collège*, sous la direction de Bernard Anselmo et Hélène Zuchetta, 2013.

Nombre de départ → ×5 ↓ ×3 ↓ **Nombre d'arrivée** ← ×2

Une série de nombres de départ étant donnés, la consigne est de calculer le plus vite possible, ce qui peut constituer une première approche de certaines propriétés du produit, avant de les institutionnaliser peu à peu.

L'arithmétique est un terreau particulièrement riche pour entretenir au quotidien la compétence « Chercher ». La familiarité des élèves avec les nombres entiers leur permet en effet de s'engager plus facilement dans une démarche d'essais et hypothèses. L'élaboration d'une conjecture utilisant le langage symbolique peut constituer alors l'un des buts de la phase de recherche[3].

En algèbre, un travail sur les variables didactiques peut souvent permettre de transformer une question fermée en une activité mettant en œuvre une véritable recherche. Ainsi, lors d'un travail sur l'utilisation du calcul algébrique pour montrer que deux programmes de calcul donnent le même résultat, on peut remplacer la consigne « *Montrer que les programmes suivants aboutissent tous les deux au même résultat* » par la consigne « *Voici deux programmes de calcul, que peut-on en dire ?* ». L'élève est ainsi amené à expérimenter, à déterminer peu à peu une question, ainsi que les moyens d'y répondre.

En géométrie, les problèmes de construction forment un grand répertoire d'activités de recherche où la découverte progressive des configurations et des transformations outille peu à peu l'élève. L'utilisation d'un même support peut par ailleurs amener des questions qui mettent en jeu une recherche autour des transformations, en variant les niveaux de difficulté.

Considérons par exemple le pavage ci-contre (Mozaïque de l'Alhambra)

- Comment ce pavage est-il construit ? »
- Cette figure étant donnée, comment peut-on construire le pavage ? »
- Quelles transformations reconnait-on ? »
- Comment peut-on construire le pavage à partir de la figure la plus simple possible ? »
- Peut-on construire le même pavage, avec des motifs différents ? »

Source : FreeImages.com /Eric Weijers

Conclusion

Remettre du doute, remettre du jeu pour conserver ce plaisir de l'activité mathématique quotidienne que connaissent les enfants au cycle 3, tout en poursuivant le développement des autres compétences, tels sont les enjeux de l'attention portée au cycle 4 au développement de la compétence « Chercher ».

3. Et ce même si la démonstration de la conjecture n'est pas à la portée des élèves.

Bibliographie

- ASTOLFI,J.-F.(1997). L'erreur, un outil pour enseigner. Paris : ESF.
- PERRIN D. (2007), En mathématiques, que cherche-t-on ? comment cherche-t-on ? conférence donnée au collège de Boussy Saint-Antoine.
- Ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques de 2008 :
  - Géométrie au collège
  - Raisonnement et démonstration
- ANSELMO B. & ZUCHETTA H.(dir.) (2013). Le calcul mental au collège. Paris : SCEREN.
- MANTE M.& ARSAC B.(2007). Les pratiques du problème ouvert. Paris : SCEREN.
- BAUDART F.(2011). Monde de l'oral et monde de l'écrit en mathématiques, Le Français aujourd'hui174,107-118 .
- Document préparatoire à la 16° étude de la CIEM[4] : Challenging Mathematics in and beyond the Classroom (le document est en français).

4. Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Compétences travaillées en mathématiques

Modéliser

La compétence « Modéliser », si on la prend dans son acception la plus large, renvoie pour le mathématicien au fait d'utiliser un ensemble de concepts, de méthodes, de théories mathématiques qui vont permettre de décrire, comprendre et prévoir l'évolution de phénomènes externes aux mathématiques.

Les mathématiques et le monde réel, une longue histoire

La compétence « Modéliser » est, parmi les compétences travaillées, celle qui aborde de front le lien des mathématiques avec un extérieur à la discipline. Définir précisément cet extérieur n'est pas chose aisée, car il n'est pas certain qu'on puisse simplement l'envisager ou le nommer sans disposer déjà d'un minimum de concepts, de théories, de modèles déjà plus ou moins liés aux mathématiques. Ceci étant, quel que soit le terme utilisé (monde naturel, monde empirique, réalité extérieure, monde réel, référence, contexte), la modélisation fait intervenir un élément non mathématique au début et à la fin du processus. On peut en effet décrire de manière schématique le processus de modélisation en distinguant trois temps : la mise au point d'un modèle à partir du réel, le fonctionnement du modèle lui-même à l'intérieur des mathématiques, et la confrontation des résultats du modèle au réel[1].

Ainsi décrite, on peut remarquer que cette compétence de modélisation n'est pas développée qu'à partir du cycle 4. Dès le cycle 2, la simple reconnaissance des formes géométriques dans les objets réels ressortit à la première étape de la modélisation (« le rectangle modélise le terrain sur lequel on veut construire une maison »). Reproduire et transformer les figures obtenues relève alors de la deuxième étape. Quant à la troisième étape, elle est également présente, même si les situations modélisées restent modestes. C'est véritablement aux cycles 3 et 4 que les trois phases de la modélisation vont pouvoir progressivement gagner en ampleur. La première phase devient l'objet d'un véritable choix pour l'élève, qui dispose de différents modèles parmi lesquels il lui revient de déterminer quel est le plus pertinent (« s'agit-il ou non d'une situation où le modèle proportionnel s'applique ? »). Ce qui change est donc en premier lieu la diversité des modèles disponibles que l'élève peut convoquer pour décrire une situation, au travers par exemple de l'apparition des modèles probabilistes et fonctionnels. Mais c'est aussi et surtout la complexification de ces modèles qui va permettre à la deuxième phase de gagner en ampleur. Le rectangle qui modélise le terrain est toujours aussi pertinent, mais le modèle dans lequel il s'insère s'est profondément transformé entre le cycle 2 et le cycle 4. Ce rectangle est à présent lié à des propriétés de figures, à de nouvelles possibilités de calculs (par exemple la longueur de la diagonale par le théorème de Pythagore), à des concepts comme l'aire ou le périmètre qui ouvrent de nouveaux champs de questions,

1. Dans une version plus élaborée, cette dernière phase boucle sur la première, en construisant une version améliorée du modèle.

à une possibilité de faire évoluer le modèle suivant des contraintes par le biais de l'algèbre, puis du langage fonctionnel (« un côté doit être le double de l'autre, l'aire doit être fixée… »). Cette complexification des modèles utilisés rend nécessaire de faire travailler les élèves, dans un premier temps, sur des exercices internes au modèle en tant que tel (exercices de probabilités, exercices sur les fonctions) pour en comprendre la logique interne et en maitriser l'usage avant de l'utiliser comme outil de traitement d'un problème externe.

L'apparent paradoxe du cycle 4 est ainsi que le développement de la compétence « Modéliser » fait passer une compréhension plus fine du réel par un progrès dans les capacités d'abstraction des élèves. Ainsi, c'est par une conceptualisation et une formalisation de la notion naturelle de « chance » en termes de probabilités que l'on parvient à modéliser les situations dépendant du hasard. Paradoxe apparent qui est au cœur du progrès du savoir mathématique, la plus grande abstraction allant de pair avec la plus grande capacité de rendre compte de la complexité du réel. Pour des élèves à qui on demande un effort d'abstraction et de manipulation de concepts, il est important de connaitre et d'éprouver régulièrement l'efficacité des outils qu'ils apprennent à maitriser, au travers en particulier de cette troisième phase de confrontation des résultats du modèle avec la réalité empirique. Entretenir la compétence « Modéliser », c'est aussi entretenir la confiance que les élèves ont dans l'enseignement qui leur est proposé : découvrir qu'un modèle géométrique permet de donner une bonne approximation du rayon de la Terre fait partie de ces expériences qui contribuent à façonner auprès de l'élève de collège une image positive et utile des mathématiques.

Lire le grand livre de l'Univers : mathématiques et sciences

Parce qu'elle a trait au réel, la compétence « Modéliser » rencontre naturellement les disciplines dont le principe même est la compréhension du monde naturel : les sciences, qu'elles soient physiques, technologiques ou sciences du vivant. Mais qu'ont à dire de spécifique les mathématiques dans une affaire où elles peuvent n'apparaitre que comme un outil ? Il faut ici relire la phrase célèbre de Galilée[2] :

> La philosophie est écrite dans ce livre gigantesque qui est continuellement ouvert à nos yeux (je parle de l'Univers), mais on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend pas à comprendre la langue et à connaître les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langage mathématique, et les caractères sont des triangles, des cercles, et d'autres figures géométriques, sans lesquelles il est impossible d'y comprendre un mot. Dépourvu de ces moyens, on erre vainement dans un labyrinthe obscur.

Amener les élèves à comprendre et parler ce langage, voilà l'une des contributions des mathématiques au développement de la pensée scientifique des élèves de collège. Ce langage est d'abord composé de nombres et de figures, présents dès le cycle 2 : « comprendre le système de numération », « reconnaitre des formes dans les objets réels » sont des objectifs du programme de mathématiques. Mais il s'enrichit au cycle 4 des symboles et de la syntaxe algébriques. C'est bien par la part prise par le calcul littéral que le cycle 4 marque une nouvelle étape dans l'apprentissage de la lecture de l'univers. Et avant le calcul lui-même, l'utilisation de l'écriture littérale constitue l'un des enjeux, « Comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant et employant des formules liées aux grandeurs mesurables » indique le programme, qui invite à multiplier les références aux sciences. Quant au calcul

2. Galileo Galilei (1623). Il Saggiatore traduction française de Christiane Chauviré, L'Essayeur, Les Belles-Lettres, Paris, 1980.

algébrique, c'est l'un des objectifs du cycle 4 que de permettre aux élèves d'en découvrir progressivement la puissance en termes d'abstraction, de généralisation et d'automatisation des calculs, en particulier au travers de problèmes du premier degré.

De la quatrième proportionnelle aux fonctions linéaires

Le modèle proportionnel, déjà présent au cycle 3, évolue au cycle 4 dans le sens d'une plus grande abstraction. Les situations à modéliser diffèrent peu, mais c'est le traitement mathématique de la modélisation qui évolue. Au travers d'un plus grand nombre de registres (graphiques, tableaux, coefficient multiplicateur, formule) et au travers d'une utilisation plus fine des propriétés de linéarité sous-jacentes à la situation de proportionnalité, pour aboutir enfin à la notion complètement décontextualisée de fonction linéaire où dans la formule $f(x) = ax$, ni a ni x ne renvoient nécessairement à un élément du monde réel. Dans ce parcours, c'est véritablement l'activité intra mathématique de création de concepts qui est à l'œuvre, permettant de faire naitre un objet, la fonction linéaire, dont le caractère dégagé de tout lien avec un contexte donné multiplie la puissance de modélisation (ne serait-ce que par la capacité d'automatiser les calculs). Faire percevoir aux élèves le gain réalisé au prix de l'effort d'abstraction doit être là encore une préoccupation de l'enseignant face à l'élève qui peut demander pourquoi on ne se contente pas des tableaux qui ont fait leurs preuves.

Probabilités

« Aborder les questions relatives au hasard à l'aide de problèmes simples » est un des objectifs du programme de cycle 4. Pour autant, la simplicité des problèmes ne doit pas cacher la complexité du modèle proposé. Il convient de ne pas précipiter le passage au modèle probabiliste et aux calculs à l'intérieur de ce modèle, et il convient surtout de ne pas prendre les calculs menés à l'intérieur du modèle pour des preuves ou des démonstrations de phénomènes réels. On ne prouve pas que « le dé est truqué », ou qu' « il vaut mieux miser sur l'obtention d'un 7 comme somme de deux dés que sur l'obtention d'un 2 », mais on effectue des calculs à l'intérieur du modèle mathématique qui aboutissent à une conclusion mathématique rigoureuse. Les conclusions que l'on peut en tirer quant aux dés réels ou aux paris réels ne relèvent pas des mathématiques et doivent être considérées avec recul et prudence. Pour reprendre la phrase radicale d'Einstein, *« Pour autant que les propositions de la mathématique se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité »*. L'utilisation du modèle probabiliste est une grille de lecture de la réalité, et son rapport avec le réel n'est pas le même que celui d'une théorie physique. L'affirmation « une pièce équilibrée a autant de chances de tomber sur pile ou sur face » n'est pas de même nature que « l'eau bout à 100 degrés » ou « il se forme un précipité rouge en présence de cuivre ». Une conséquence pratique de cette distinction tient dans la nécessité pour les enseignants de bien marquer la différence entre ce qui tient de l'observation (statistique) et ce qui tient de la modélisation théorique en privilégiant un vocabulaire du type « on décide que », « on modélise par » plutôt que « on voit que ». Parce qu'il rend compte de l'activité humaine, parce qu'il peut appuyer des décisions collectives ou des choix politiques, le modèle probabiliste doit plus que d'autres faire l'objet d'une sensibilisation des élèves à la prudence méthodologique.

Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre !

La géométrie des figures, déjà évoquée, gagne elle aussi en abstraction au cycle 4 en s'éloignant de l'expérience sensible. Ce sont des triangles qu'on tenait auparavant dans la main après les avoir découpés et qui tiennent à présent tout entier dans les trois lettres ABC. Ce sont des solides qu'on va pouvoir décrire par des vues de coupes, des représentations en perspective sans les avoir matériellement sous les yeux. Ce travail progressif d'abstraction,

qui ne peut s'envisager au cycle 4 sans aller-retour avec la matérialité des solides concrets, ouvre non seulement la voie vers le raisonnement déductif, mais aussi vers la modélisation géométrique de l'espace. Cette modélisation de l'espace se manifeste au cycle 4 en particulier dans le repérage sur la sphère terrestre mais aussi au travers des calculs que cette modélisation permet (estimation du rayon de la terre et de la distance de la terre à la lune).

Mais cette géométrie de l'espace marque également profondément l'art, depuis les proportions des temples grecs jusqu'aux architectures contemporaines en passant par la révolution cézanienne : « *Permettez-moi de vous répéter ce que je vous disais ici : traitez la nature par le cylindre, la sphère, le cône [...]* »[3] et au-delà. C'est peut-être au cœur du plaisir esthétique, des notions d'harmonie et de symétrie, que le passage progressif à une géométrie des propriétés et des rapports trouve une de ses récompenses les plus précieuses : au travers de quelques tracés sur une toile de Leonard de Vinci, ou par l'imposition de transformations bien choisies sur une frise du palais de l'Alhambra, les mathématiques apportent leur concours à la compréhension des règles de l'art.

La modélisation au risque du projet

La modélisation, si on souhaite permettre aux élèves d'en comprendre les enjeux, nécessite dans l'idéal de partir d'un problème extra-mathématique, de construire un modèle, de le faire fonctionner et de pouvoir confronter ses résultats à la situation modélisée. Deux écueils apparaissent immédiatement :

- le temps nécessaire pour laisser les élèves réfléchir, émettre et confronter des hypothèses peut dépasser le cadre de la séance ;
- les modèles mathématiques permettant de rendre compte de situations réelles peuvent apparaitre comme hors de portée des élèves de collège.

Face à ces deux difficultés, deux possibilités s'offrent, qu'il convient de combiner car elles ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients.

La première piste consiste pour l'enseignant à prendre en charge une partie de la modélisation en présentant une situation déjà simplifiée, voire en partie modélisée. Cette possibilité a l'avantage de diminuer fortement le temps nécessaire pour appréhender la situation et de proposer un cadre où l'on sait que l'élève a les moyens d'effectuer un travail de modélisation. Elle peut toutefois conduire à des situations tellement artificielles et caricaturales qu'elles finissent par ne plus rien modéliser. Il est donc important de présenter aux élèves les raisons qui ont présidé au choix du modèle, de les amener à le critiquer de manière argumentée, et d'évoquer lorsque cela est possible des outils et des concepts qu'ils rencontreront plus tard et qui permettront d'améliorer le modèle.

La deuxième piste consiste à garder l'idée de la confrontation à la complexité du réel en pariant sur le temps long du projet, que ce soit au sein du cours de mathématiques ou dans le cadre d'un EPI. Si cette modalité constitue pour le développement de la compétence « modéliser » un terrain a priori idéal, il faut cependant garder à l'esprit les risques inhérents à la conduite des projets, que nous rappelle un chercheur comme Jean-Yves Rochex[4] :

3. Paul Cézanne, Lettre à Émile Bernard, 15 avril 1904.

4. Extrait de l'audition au CSE du 6 janvier 2015, reprise dans le rapport de l'Inspection générale Grande pauvreté et réussite éducative (J.P. Delahaye, mai 2015)

> [...] la question n'est pas simplement de savoir si nous sommes en mesure de proposer des projets et des activités attractives pour les élèves, mais aussi de savoir si ces activités sont productrices d'apprentissages et de dispositions durables, qui restent une fois le projet accompli, une fois le spectacle donné [...].Comment veiller à ce que la réalisation d'un projet collectif ne se concrétise pas par une division sociale du travail entre élèves, qui spécialise les élèves les plus faibles dans les tâches les moins intéressantes sur le plan intellectuel, les élèves les plus performants dans les tâches les plus intéressantes ?

Ces points de vigilance étant posés, il apparait indispensable de demander aux élèves un retour réflexif régulier sur les mathématiques rencontrées (quelles notions mathématiques, connues ou inconnues ai-je rencontrées ?) et au moins en fin de projet, de garder un temps de reprise et d'institutionnalisation par l'enseignant des concepts mathématiques à l'œuvre, afin que, pour tous les élèves, les éléments de savoir mathématique qui sous-tendent la modélisation apparaissent clairement, dégagés de la multiplicité d'expériences, de souvenirs, de sensations qui constituent pour eux la trace sensible du projet.

Décrire le monde : un enjeu au carrefour des domaines du socle

La compétence « Modéliser » constitue pour l'élève de cycle 4 un enjeu qui rencontre les 5 domaines du socle : elle illustre la puissance du langage mathématique dans sa capacité de mise en ordre et de description du monde, elle constitue une mise en œuvre des méthodes mathématiques de raisonnement hypothético-déductif, elle participe à la formation d'un citoyen éclairé, elle constitue le langage des grands systèmes scientifiques, et elle représente, notamment au travers de la géométrie et des probabilités, un outil indispensable de compréhension de l'activité humaine.

Cette omniprésence ne rend pas pour autant facile pour les élèves la maitrise de cette compétence, qui peut être cachée dans la diversité des activités mathématiques. Il revient à l'enseignant, au-delà des projets, des EPI, des exercices quotidiens, de mettre au jour les modalités, la puissance et les limites de la modélisation mathématique.

Bibliographie et sitographie

- De la modélisation du monde au monde des modèles (1) et (2) : Le délicat rapport « mathématique-réalité » et Des statistiques aux probabilités - DUPERRET,J.-C. (2012). Bulletins verts de l'AMPEP 484 et 486.
- Site du Projet européen Lema (Learning and Education in and through Modelling and Applications).
- Interdisciplinarité et modélisation, un atout et un défi pour l'enseignement des mathématiques - ARTIGUE, M. (2016), séminaire de l'IREM Paris 7.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Compétences travaillées en mathématiques

Représenter

Donner à voir les objets mathématiques

« Représenter », c'est donner à voir, ou au moins rendre perceptible à la vue et à l'esprit. Cette définition relativement simple recouvre cependant des réalités bien distinctes.
« Représenter » des objets, des visages ou en tout cas des formes ou des solides est un premier niveau de représentation commun entre autres aux mathématiques, à la géographie, aux sciences et aux arts. Mais on peut aussi « Représenter » des relations entre les objets, que ce soit par un croquis de géographie, un codage en géométrie ou un schéma en électricité. Et il arrive enfin qu'on doive « représenter » des entités abstraites, qui n'ont pas d'autre mode d'existence que cette représentation : des nombres décimaux, des fractions, des fonctions, en un mot des objets mathématiques. Leur point commun est de ne pas être accessible par la vue, l'ouïe ou quelque autre sens : on ne peut pas montrer dans le monde extérieur une fonction, pas plus qu'on ne peut en fait montrer un cube, ou un cercle. Pour autant, l'existence de ces objets ne fait de doute pour aucun utilisateur des mathématiques, même occasionnel. Ces objets ne sont pas accessibles en eux-mêmes, seulement par leurs représentations, qui sont comme des chemins vers un objet auquel on ne pourrait pas avoir directement accès. Ces représentations diverses peuvent alors appartenir à différents registres : registre graphique, registre du langage naturel (« un parallélépipède à 6 faces »), registre numérique, registre de l'écriture symbolique, etc.

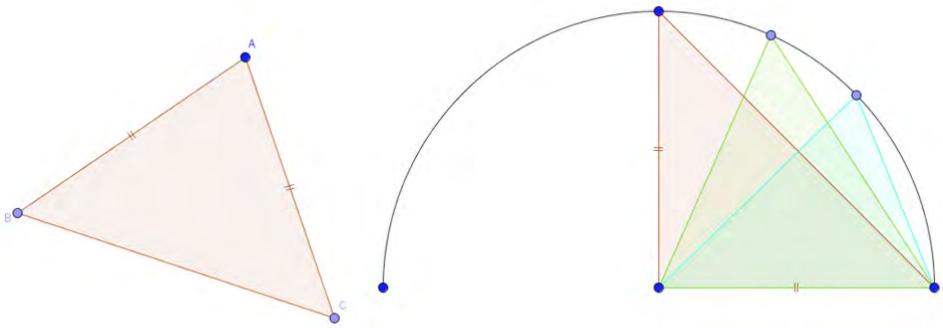
Le développement de la compétence « Représenter » au cycle 4 doit à la fois permettre à l'élève de progresser dans la vision du réel et dans l'appréhension des objets mathématiques abstraits. Comprendre ce qu'est un triangle, ce qu'est une fonction, ce qu'est une fraction, c'est savoir « représenter » ces objets, c'est-à-dire trouver un registre de représentation adéquat, mais aussi savoir varier les représentations et les registres de représentation.
Un élève capable de convoquer dans un exercice mettant en jeu une fonction un graphique, un tableau de nombres, une écriture symbolique, est en train de s'approprier la notion de fonction. Dans cet exercice, on voit que la représentation est aussi pensée de manière dynamique, dans sa capacité à engendrer d'autres représentations, à l'intérieur d'un même registre ou dans un autre registre.

> « Mais surtout, l'activité mathématique de recherche et de preuve consiste à transformer des représentations [...], données dans le contexte d'un problème posé, en d'autres représentations sémiotiques. Et, de ce point de vue, une représentation [...] n'est intéressante que dans la mesure où elle peut se transformer en une autre représentation, et non pas en fonction de l'objet qu'elle représente ».[1]

1. Idées directrices pour analyser les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques – Raymond Duval - 2011.

Si on poursuit l'analyse, on peut remarquer que les différentes représentations de la fonction traitée dans cet exercice ne la concernent pas en tant qu'objet spécifique (la fonction f de l'exercice), mais s'appliquent à une catégorie plus vaste à laquelle elle est rattachée (ici la catégorie des fonctions)[2].

Par ailleurs, si pour cerner un objet mathématique, il est nécessaire de varier les registres, pour résoudre un problème, il est souvent pertinent de se placer dans un domaine mathématique qui n'est pas nécessairement celui de l'énoncé : on parlera alors de changement de cadre. Ainsi, le problème du maximum de l'aire d'un triangle isocèle de côté 6, posé dans le cadre géométrique à partir d'une figure, pourra être traité dans ce cadre géométrique (en considérant un cercle bien choisi), ou dans un cadre fonctionnel, lui-même pouvant être associé à un registre numérique (des valeurs approchées de l'aire étant obtenues à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ou d'un tableur) ou plus tard, au lycée au registre des écritures symboliques.



Le signe et la pensée

Le premier des modes de représentation, avant même la figure est le signe : lettre, symbole, chiffre, cette mise en forme des idées mathématiques est aussi essentielle aux mathématiques que les pièces du jeu le sont aux échecs. Mais ces formes, ces lettres qui constituent la langue des idées ont elles-mêmes une forme, parfois un sens comme le rappelle le logicien Frege[3] :

> « En offrant au regard le signe d'une représentation, elle-même appelée à la conscience par une perception, on crée un foyer stable autour duquel s'assemblent d'autres représentations. Parmi celles-ci, on en pourra de nouveau choisir une et offrir au regard son signe. Ainsi pénétrons-nous pas à pas dans le monde intérieur des représentations, et y évoluons nous à notre gré, usant du sensible nous-mêmes pour nous libérer de sa contrainte ».

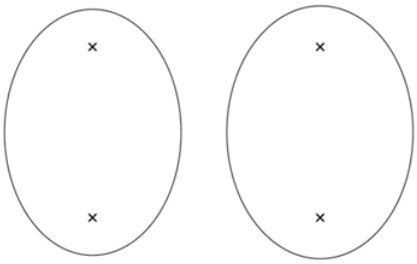
Le philosophe pointe ici la force et le risque du signe : il est utile par les images qu'il convoque et les actions qu'il permet, mais il peut engendrer aussi de fausses images : le nombre a qui

2. Parmi les grandes catégories d'objets mathématiques utilisés au cycle 4, on peut citer les nombres rationnels, les fonctions, les figures géométriques du plan ou de l'espace, les symboles littéraux. Ces grandes catégories sont reliées aux classes de problèmes qu'elles permettent de résoudre (proportionnalité, dépendance d'une grandeur en fonction d'une autre, modélisation géométrique, résolution d'équations, etc.).

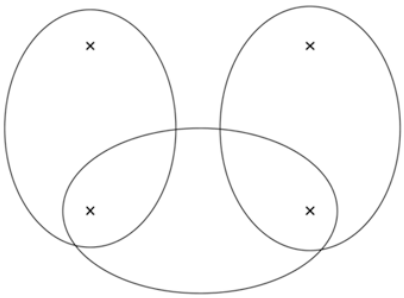
3. Que la science justifie un recours à l'idéographie, 1882, in Ecrits logiques et philosophiques, trad. C. Imbert, Seuil, 1971.

ne peut être que positif, le nombre *n* qui ne peut être qu'entier, la bande numérique où un nombre est toujours plus petit que celui qui est à sa droite. Une représentation peut posséder pour l'élève une logique qui diffère de celle que l'enseignant lui associe. Que l'on pense à ce dialogue imaginaire de L. Wittgenstein[4] :

« Il me suffit simplement de regarder la figure pour voir que 2+2=4 »



« Alors il me suffit simplement de regarder la figure pour voir que 2+2+2=4 »



Un autre problème apparait ici, plus large que celui de la nécessaire variation des représentations, c'est la question de la bonne compréhension de la représentation par l'élève : comment savoir que l'élève a bien compris l'usage de la représentation, par exemple qu'il distingue bien les objets visés par les deux représentations 1,4 et ¼. Une réponse possible consiste à faire verbaliser par l'élève sa perception de la représentation, en passant donc dans le registre du langage naturel : la verbalisation peut alors se faire sous la forme : « 1,4 représente une unité et quatre dixièmes, ou quatorze dixièmes ; on peut également la représenter par 1+ 4/10, ou 14/10 ; ¼ représente le quart de l'unité ». La stabilisation de la compréhension de l'objet mathématique sous-jacent passe par l'utilisation de ses différentes représentations dans des contextes différents, pour résoudre des problèmes variés, et le passage d'un registre de représentation à un autre en précisant l'intérêt de chacun dans la situation proposée (représenter le nombre 1,4 sur une droite graduée, partager un segment en quatre, poser l'équation à trou … x 4 = 1).

Changements de registre : l'apport des outils numériques

L'usage des outils numériques facilite la mise en œuvre concrète des changements de registre de représentation, que ce soit grâce aux tableurs ou aux logiciels de géométrie dynamique : définir une fonction par une formule déclenche aussitôt le tracé des graphiques, ou l'apparition d'un tableau de valeurs. À l'inverse, un tableau de valeurs permet de placer des points, de proposer une interpolation, une ou plusieurs formules.

4. *Remarques sur les fondements des mathématiques*, Paris, Gallimard, coll. Bibliothèque de philosophie.

Ce changement de registre se trouve d'autant facilité qu'il s'effectue immédiatement et sans effort. Mais cette simultanéité ne doit pas conduire à penser que la conversion est limpide pour les élèves. Si les outils numériques permettent d'automatiser des processus mentaux, ceux-ci doivent avoir été auparavant compris et d'une certaine manière éprouvés par les élèves (par le calcul mental ou posé, par le dessin à l'aide d'instruments de géométrie, etc.).

Nombres

Les nombres constituent un des points les plus délicats et les moins immédiatement visibles de l'application des changements de registre. C'est au cycle 4 que ce qui était représenté par des parts de gâteau, un point sur la demi-droite graduée, le résultat d'une opération de division doit pouvoir pour l'élève renvoyer à un même objet : un nombre. Cette possibilité de changement de registre doit être mise en œuvre régulièrement car elle ne revêt pas la même facilité selon qu'il s'agit de 2, de 0,5, de 3/4, de 2/3, de 5/3 (la représentation des parts de gâteau peut être un obstacle à la conception d'une fraction supérieure à 1). La compréhension d'un nombre décimal, plus tard d'un nombre rationnel positif ou négatif ne peut s'envisager sans changement de registre, d'autant que tous les registres ne seront pas aussi pertinents pour un élève : envisager 2/3 comme représentation de deux parts d'un tout partagé en trois est une chose naturelle pour l'élève depuis le cycle 3, mais le cycle 4 va fournir de nouveaux outils permettant de le voir comme un point de la droite graduée. Des calculs de rapports et de proportions, la résolution de l'opération à trou 2 x ... = 3, puis celle de l'équation $2x = 3$, le théorème de Thalès viendront progressivement conforter cette réalité. Les activités de calcul mental, les activités de calcul dans un contexte géométrique ou dans un contexte arithmétique constituent autant d'occasions de rappeler et de consolider la variété de ces représentations du nombre. Comprendre que la notion de nombre rationnel étend celle de nombre décimal, qui elle-même étend celle de nombre entier fait partie des objectifs du cycle 4. Les écritures et les représentations des nombres doivent être revues et mises en jeu tout au long du cycle.

Organisation et gestion de données et fonction

La représentation joue dans l'organisation et la gestion de données un rôle particulier. Il s'agit de représenter des séries de nombres, objets abstraits pour lesquels toutes les représentations sont mathématiquement équivalentes. Mais du fait que ces séries de nombres ont un lien fort avec le monde réel, ces représentations ne sont pas du tout équivalentes dans l'effet qu'elles produisent. Le choix d'une représentation (diagramme en barres ou camembert), comme celui d'une échelle peuvent majorer un minorer un phénomène, exagérer ou minorer un écart, éclairer une décision ou tromper un lecteur. Le nécessaire travail sur les registres prend ici un relief particulier, en ce qu'il rencontre la formation du citoyen et accompagne le développement de l'esprit critique. Dans cet esprit, tout travail engagé sur des données réelles, notamment dans le cadre d'un EPI, permet de mettre en lumière les enjeux des choix de représentation. La notion de fonction, qui nait véritablement pour les élèves au cycle 4, continuera à se mettre en place au lycée et même au-delà. Les fonctions font en effet partie de ces objets mathématiques que les élèves vont être amenés à manier pendant longtemps sans en avoir une définition formelle rigoureuse. Le changement de registre de représentations est donc ici nécessaire pour cerner l'objet fonction. On ne peut pas dire ce qu'est une fonction, *mais on peut dire, grâce à cette formule, j'ai défini une fonction, que je pourrais aussi définir par une courbe.*

Représenter en géométrie

La compétence « Représenter » reste bien entendu centrale dans l'étude de la géométrie. Le thème « Espace et géométrie » propose sous le titre Représenter l'espace une série de contenus dont la maitrise permet à l'élève de collège de continuer à progresser dans la compréhension des objets qu'il a sous les yeux, au travers de la perspective, mais aussi d'objets qu'il ne peut embrasser du regard : c'est tout l'enjeu de la représentation de la Terre, du repérage sur la sphère, dans l'espace ou dans le plan. La circulation entre les différents registres (maquettes, vues de dessus et de profil, croquis, patrons, modélisations 3D issues de logiciels de géométrie, objets conçus à l'aide d'une imprimante 3D) doit être travaillée tout au long du cycle.

La représentation en géométrie ne se cantonne pas à ce lien avec le réel, mais accompagne la maitrise de l'abstraction et les débuts de la démonstration au travers des figures et de leurs codages, et des transformations. On retrouve cet « Art de raisonner juste sur des figures fausses » pour reprendre la formule de Descartes. Un triangle isocèle peut être représenté par une figure représentant un triangle isocèle ou un triangle quelconque bien codé, par l'expression *Soit ABC un triangle isocèle*. Cette possibilité peut être source de difficulté pour des élèves à qui parallèlement on demande de travailler sur la vérité et la justesse des représentations au travers de représentations en perspectives ou à l'échelle. La notion de schéma constitue pour les élèves un pas important à bien marquer, où on s'attache à montrer que la force du schéma réside dans sa capacité à condenser les éléments nécessaires à la démonstration.

Bibliographie

- Idées directrices pour analyser les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques - DUVAL R. (2011).
- Rationnels et proportionnalité, complexité et enseignement au début du collège - ADJIAGE R. (2007). Revue Petit x 74 IREM Grenoble
- Le rôle d'un processus de visualisation géométrique complémentaire du registre numérique - BARRERA R. (2011). Revue Petit x 85 IREM Grenoble
- Représentation des fractions et des nombres décimaux chez les élèves de CM2 et du collège - PERRIN-GLORIAN (1986). Revue Petit x 10 IREM Grenoble

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Compétences travaillées en mathématiques

Raisonner

Le programme de mathématiques du cycle 4 offre une place de choix à la compétence « raisonner » dans laquelle il regroupe les démarches suivantes :

- résoudre des problèmes impliquant des grandeurs variées (géométriques, physiques, économiques) : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions ;
- mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui ;
- démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion ;
- fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.

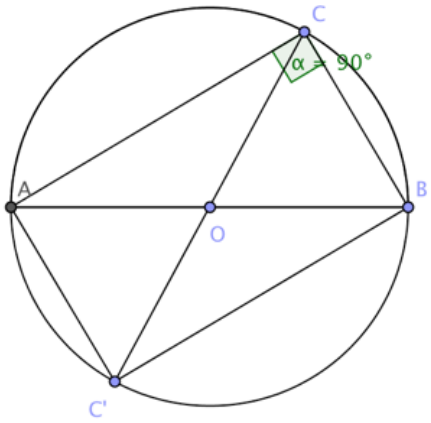
Chacune des étapes de résolution d'un problème (compréhension de l'énoncé et de la consigne, recherche, production et rédaction d'une solution) fait appel au raisonnement, processus mental permettant d'effectuer des inférences. Rappelons qu'une inférence est une opération mentale par laquelle on accepte qu'une proposition soit vraie en vertu de sa liaison avec d'autres propositions. Les phases de recherche, de production et de rédaction de preuve font appel à des raisonnements de différentes natures.

Les raisonnements inductifs et abductifs, essentiellement mis en œuvre dans la phase de recherche, permettent d'aboutir à l'émission de conjectures qu'il s'agira ensuite de valider ou d'invalider. Si la production d'un contre-exemple suffit à invalider une conjecture, sa validation repose sur une démonstration, moyen mathématique d'accès à la vérité. On rappelle que « démontrer », c'est « donner à voir » les différentes étapes d'une preuve par la présentation, rédigée sous forme déductive, des liens logiques qui la sous-tendent.

Le raisonnement inductif consiste à généraliser une propriété observée sur des cas particuliers. Il fonctionne selon le schéma suivant : constatant sur des exemples que, lorsque A est vraie, alors B est vraie, on émet la conjecture que (A implique B) est vraie.

Le raisonnement abductif consiste à présumer une cause plausible d'un résultat observé. Il fonctionne selon le schéma suivant : pour démontrer que B est vraie, sachant que (A implique B) est vraie, on va démontrer que A est vraie. Le raisonnement abductif est notamment utilisé sous forme d'une analyse remontante, encore appelé chaînage arrière, qui consiste, à partir du résultat que l'on veut démontrer, à repérer une ou plusieurs propriétés (conditions suffisantes) qui, si elle(s) étaient établie(s), permettrai(en)t d'atteindre le résultat par application d'un théorème identifié. On substitue alors momentanément au problème de départ un (ou plusieurs) nouveau(x) problème(s) consistant à établir ces conditions intermédiaires.

Exemple : ABC est un triangle rectangle en C. On veut démontrer que C appartient au cercle de diamètre [AB].
On note O le milieu de [AB] et on remplace la proposition à démontrer par l'égalité OA=OB=OC ; pour atteindre ce résultat, on construit le symétrique C' de C par rapport à O. Selon le principe du chaînage arrière, il suffit alors de montrer que AC'BC est un rectangle.



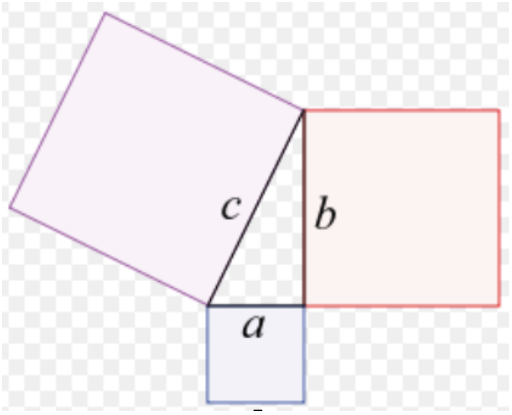
Par la diversité et la multiplicité des situations particulières qu'elle permet d'observer, l'utilisation d'outils logiciels (de géométrie, de calcul, de simulation, de programmation) est un support aux raisonnements inductifs et abductifs et favorise la formulation de conjectures. Il est important de faire comprendre aux élèves le caractère incertain de toute conjecture et la nécessité, soit de l'invalider par la production d'un contre-exemple, soit de prouver sa vérité par une démonstration.

Celle-ci fait appel au raisonnement déductif qui (entre autres) s'appuie sur :

- la **déduction** proprement dite (ou règle de détachement ou *modus ponens*), qui fonctionne selon le schéma suivant : sachant que (A implique B) est vraie et que A est vraie, on conclut que B est vraie. Le premier pas d'une déduction consiste à reconnaître une situation de référence A (une configuration géométrique, une situation de proportionnalité, une propriété de nombres, etc.) ; le second consiste à appliquer le théorème qui stipule que (A implique B) ;
- la **disjonction de cas**, qui fonctionne selon le schéma suivant : pour montrer que (A implique B), on sépare l'hypothèse A de départ en différents cas recouvrant toutes les possibilités et on montre que l'implication est vraie dans chacun des cas ;
- Le raisonnement par **l'absurde** (*reductio ad absurdum*) qui fonctionne selon le schéma suivant : pour montrer que A est vraie, on suppose qu'elle est fausse et par déduction on aboutit à une absurdité.

Afin de convaincre les élèves du rôle de la démonstration en mathématiques comme moyen d'accès à la vérité, il importe de leur apprendre à distinguer une propriété conjecturée ou vérifiée sur des exemples d'une propriété démontrée. Pour ce faire, le terme de « démonstration » ne doit pas être galvaudé et la seule illustration d'un raisonnement ne saurait être désignée comme telle. Par exemple, si l'illustration présentée ci-dessous constitue une image mentale pertinente de l'égalité entre l'aire du carré construit sur l'hypoténuse et la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit, elle ne saurait être présentée comme une démonstration du théorème de Pythagore.

$a^2+b^2 = c^2$



En revanche, certains théorèmes, énoncés de manière générale peuvent être démontrés uniquement sur des exemples choisis parce qu'ils donnent une bonne idée du cas général (on dit alors qu'ils sont « génériques »). Cela peut être par exemple le cas pour la démonstration des propriétés des opérations sur les fractions.

De même, il convient de systématiquement qualifier les énoncés mathématiques selon leur statut, en distinguant définitions, théorèmes admis et théorèmes démontrés. Les théorèmes traduisant une propriété caractéristique pourront être formulés en distinguant dans leur énoncé le sens direct et le sens réciproque.

Les notions mathématiques qui figurent au programme du cycle 4 offrent toutes des possibilités de raisonnement, soit dans l'accès à la preuve d'un énoncé, soit dans son utilisation. Il n'est pas question de démontrer tous les théorèmes ou propriétés figurant au programme, mais de déterminer en équipe pédagogique les démonstrations qui seront retenues sur toute la durée du cycle en raison de leur caractère formateur, de leur accessibilité aux élèves et de l'intérêt qu'elles présentent pour faciliter l'accès au sens des notions mises en jeu.

L'apprentissage du raisonnement et de la démonstration est un processus long et délicat qui doit se faire de manière progressive, dans la durée, et tenir compte des deux contraintes suivantes :

- tout d'abord, la nécessité de séparer les tâches de résolution du problème (recherche et obtention de la preuve) de celle de la rédaction d'un texte qui traduit l'organisation de la démonstration ;
- ensuite, l'apprentissage de la rédaction se fait notamment lorsque l'élève est confronté à l'expérience de la communication de sa solution. L'envie de se faire comprendre associée à la critique de ses pairs est, pour un élève, un levier de progrès certainement plus puissant que la fourniture, par le professeur, d'un modèle de rédaction. Si, pour être communicable et compréhensible, une démonstration mathématique doit respecter des règles syntaxiques, il faut reconnaître que celles-ci ne sont pas naturelles pour les élèves. Des exigences excessives et prématurées d'un modèle de rédaction standardisée peuvent induire de leur part

des comportements relevant de l'imitation plus que de la compréhension. En accordant une place disproportionnée aux activités purement formelles de nature rhétorique (« je sais que… or… donc »), on risque d'éloigner les élèves du raisonnement lui-même et du plaisir de chercher. Afin de ne pas détourner de la résolution de problèmes les élèves ayant des difficultés à entrer dans les codes de rédaction d'une démonstration, il importe de valoriser les productions spontanées, écrites ou orales, issues des phases de recherche et d'expérimentation (calculs seuls, croquis destinés à comprendre l'exercice, idées de preuve, plan de preuve, etc.). Souvent imparfaites et inabouties, elles constituent de véritables objets d'étude pour la classe au cours d'un débat permettant de faire émerger progressivement les critères d'une rédaction performante, sans pour autant modéliser le travail. Progressivement, la phase de rédaction, entamée ou non en classe, sera dévolue aux élèves, en classe ou en dehors de la classe, en veillant à différencier les exigences de formalisme selon l'objectif d'apprentissage (le raisonnement ou la communication) et la capacité des élèves à entrer dans les codes de la démonstration. En particulier, il est tout à fait possible d'exprimer dans le langage naturel un raisonnement mathématique tout en respectant parfaitement les règles logiques d'inférence. De même, si l'on peut faire apparaître, dans certains cas, l'intérêt d'une mise en forme de la démonstration sous forme déductive (en mettant la conclusion à la fin de la démonstration), il est cependant admis de la placer au début, suivie de « car…, parce que… et que… ».

Il importe également de ne pas cantonner la démarche de raisonnement à sa seule forme déductive et de ne pas la limiter à un thème particulier des mathématiques (traditionnellement celui de géométrie), mais bien de la placer au cœur de toute activité mathématique.

Les situations proposées doivent donc ménager à la fois des temps de recherche et d'expérimentation permettant de formuler des conjectures, des temps de mise en commun et d'argumentation permettant de produire une preuve et des temps de mise en forme (démonstrations rédigées). Pour solliciter la curiosité de l'élève, susciter chez lui l'envie de relever un défi intellectuel et motiver sa recherche, il est souhaitable que l'énoncé du problème soit assez bref et facile à comprendre et qu'il n'induise ni une solution ni même une méthode de résolution ; un moyen de laisser à chaque élève l'initiative de sa démarche consiste à limiter les questions intermédiaires ou celles dont l'énoncé mentionne ce qu'il s'agit de trouver (« démontrer que… »). Cette attention particulière devrait permettre à chaque élève de démarrer sa recherche par des tâtonnements, des dessins, des essais numériques, avec ou sans l'aide de logiciels. Les problèmes dont la solution est accessible par plusieurs modes de raisonnement (algébrique, géométrique, etc.) sont particulièrement intéressants.

Exemples de problèmes

Ci-dessous quelques exemples de problèmes sont proposés, rattachés à différents thèmes du programme, et mettant en œuvre des raisonnements de types varié

Ecriture décimale [5e]

Exemple de problème
Dans les écritures décimales de deux nombres entiers, le chiffre des dizaines est 7 et celui des unités est 6. Quels sont les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de leur produit ?

Commentaire
Raisonnement déductif à travers l'utilisation de l'écriture décimale.

Multiples et diviseurs

Exemple de problème
La somme des chiffres de 42 est un multiple de 6 et 42 est un multiple de 6 (idem pour 84). Peut-on affirmer que, si la somme des chiffres d'un nombre entier est un multiple de 6, alors ce nombre est un multiple de 6 ?

Commentaire
Infirmation par production d'un contre-exemple.

Proportionnalité

Exemple de problème

On augmente la longueur d'un rectangle de 10 % et on diminue sa largeur de 10 %. Comment varie son aire ?

Commentaire

L'élève peut raisonner de manière inductive en fixant des valeurs numériques pour la longueur et la largeur et faire varier ces valeurs

Raisonnement déductif par application d'un pourcentage.

Nombres décimaux

Exemple de problème

Existe-t-il un nombre décimal dont le carré est égal à 2 ?

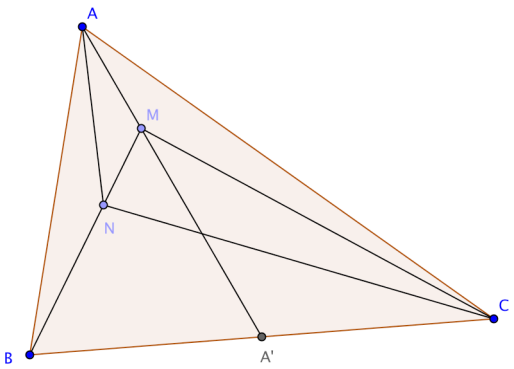
Commentaire

Une démarche inductive basée sur des essais (à la main puis à la calculatrice) permet d'émettre la conjecture qu'il n'existe pas de nombre décimal dont le carré est égal à 2.
Cette conjecture est ensuite démontrée à l'aide d'un raisonnement par l'absurde et disjonction de cas.
On montre d'abord qu'il n'existe aucun nombre entier dont le carré est égal à 2.
Puis, en distinguant les différentes valeurs qu'aurait sa dernière décimale, on montre qu'il n'existe aucun nombre décimal non entier dont le carré est égal à 2.

Utilisation des aires

Exemple de problème

Où positionner le point M à l'intérieur du triangle ABC pour que les triangles AMB et AMC aient la même aire ?



Commentaire

L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet de conjecturer une condition suffisante : l'appartenance de M à la médiane [AA'].

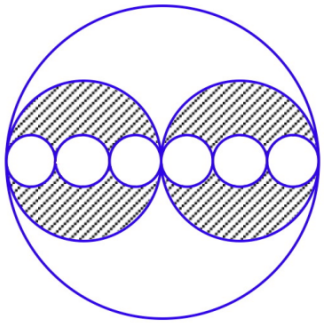
Démonstration par les aires (lemme du chevron).

Démonstration de la condition nécessaire par un raisonnement par l'absurde : on suppose que N n'appartient pas à la médiane [AA'] (en étant par exemple à l'intérieur du triangle ABA'), on note M le point d'intersection de (BN) et (AA') et on compare les aires des triangles ANB, AMB, AMC, ANC.

Fractions, aire du disque

Exemple de problème

A quelle fraction du grand disque correspondent les six petits disques ? A quelle fraction du grand disque correspond la surface hachurée ?



Commentaire

Analyse de figure.

Vitesse

Exemple de problème

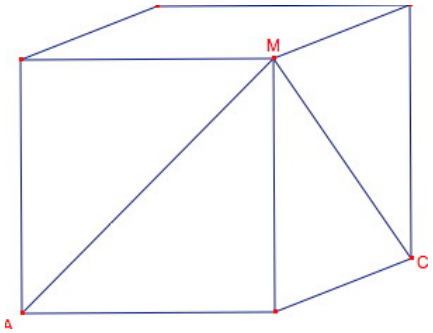
Un funiculaire monte du pied d'une colline à son sommet à la vitesse moyenne de 14 km/h.

Le conducteur peut-il régler la vitesse lors de la descente pour que la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours soit de 28 km/h ?

Géométrie dans l'espace

Exemple de problème

Sur un cube, on a tracé deux diagonales, comme indiqué sur le dessin ci-dessous. Quelle est la mesure de l'angle formé par ces deux diagonales ?



Commentaire

Identification d'une figure plane à l'intérieur d'une configuration de l'espace.

Géométrie, Équations

Exemple de problème

Deux tours, hautes de 30 et 40 mètres sont distantes l'une de l'autre de 50 mètres. Un puits est situé entre les deux tours. Deux oiseaux s'envolent en même temps du sommet de chaque tour et volent à la même vitesse en ligne droite avant de se rejoindre au sol. En quel point se rejoignent-ils ?

Commentaire

Modélisation de la situation.

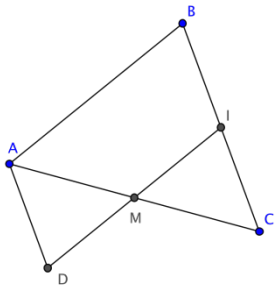
Raisonnement déductif à travers l'utilisation du théorème de Pythagore.

Résolution d'une équation.

Géométrie plane

Exemple de problème

A, B, C sont trois points non alignés, I est le milieu de [BC] et D est le point tel que ABID est un parallélogramme. Pourquoi le milieu M de [ID] est-il également le milieu de [AC] ?



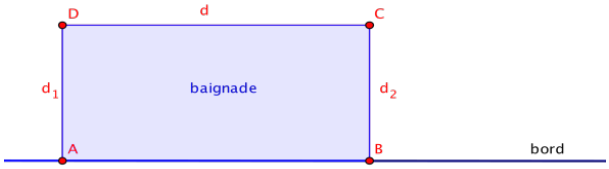
Commentaire

Raisonnement déductif utilisant des propriétés du parallélogramme.

Approche de la notion de fonction

Exemple de problème

Un maître-nageur dispose d'une corde de 160 m de long pour délimiter une zone de baignade surveillée rectangulaire. Où doit-il placer les bouées A et B pour que l'aire de la zone de baignade soit maximale ?



Commentaire

Utilisation d'un tableur ou d'une calculatrice pour une approche numérique.

Modélisation algébrique.

Calcul littéral

Exemple de problème

Peut-on écrire 2016 comme somme de quatre entiers consécutifs ? Et 2018 ? Et ton année de naissance ?

Quels sont les nombres qui peuvent s'écrire comme somme de quatre entiers consécutifs ?

Commentaire

Raisonnement inductif basé sur des essais. Emission de conjectures.

Utilisation du calcul littéral comme outil de démonstration.

Bibliographie

- Raisonnement et démonstration
- Site de l'académie de Bordeaux : Initiation au raisonnement
- IREM de Rennes : L'enseignement de la démonstration
- « Initiation au raisonnement déductif au collège » Gilbert Arsac, Gisèle Chapiron, Alain Colonna, Gilles Germain, Yves Guichard, Michel Mante - Presses universitaires de Lyon, IREM de Lyon
- « Des mathématiques ensemble et pour chacun, 5ème » Jean-Philippe Rouquès, Hélène Staïner - CRDP Pays de la Loire
- « Des mathématiques ensemble et pour chacun, 4ème » Jean-Philippe Rouquès, Hélène Staïner - CRDP Pays de la Loire

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Compétences travaillées en mathématiques

Calculer

La pratique du calcul doit viser un double équilibre : d'une part entre automatisation et raisonnement, d'autre part entre une visée pragmatique (l'obtention d'un résultat) et un accès à la compréhension des objets mathématiques engagés dans le calcul (nombres, symboles, etc.). Par ailleurs, le développement des technologies informatiques a profondément modifié l'appréhension du calcul, tant au niveau des pratiques quotidiennes et sociales qu'à celui des pratiques scientifiques. D'une part, la plupart des algorithmes de calcul dont l'apprentissage occupait autrefois un temps important de la scolarité obligatoire sont aujourd'hui implémentés dans les calculatrices les plus simples, ce qui pose la question de la pertinence du maintien de leur enseignement, d'autre part la puissance de calcul des nouveaux outils modifie profondément l'économie du calcul et pose dans des termes renouvelés celle de la gestion des rapports entre le calcul et le raisonnement puisqu'elle favorise explorations, simulations et expérimentations préalables à la découverte de preuves.

Objectifs

Dans le prolongement du cycle 3, l'apprentissage du calcul au cycle 4 porte d'abord sur les nombres, dont le corpus s'élargit, puis, à travers l'introduction de l'algèbre, sur les symboles littéraux. La variété des objets mathématiques qu'il engage et des formes selon lesquelles il est pratiqué (calcul mental, calcul posé, calcul instrumenté, calcul exact, calcul approché), les liens qu'il permet d'établir avec les autres disciplines, les besoins sociaux, culturels et scientifiques auquel il doit répondre justifient la place essentielle accordée au calcul dans le programme du cycle 4.

Nous rappelons ci-dessous la description qui y est donnée de la compétence « calculer » :

> « Calculer avec des nombres rationnels, de manière exacte ou approchée, en combinant de façon appropriée le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté (calculatrice ou logiciel).
>
> Contrôler la vraisemblance de ses résultats, notamment en estimant des ordres de grandeur ou en utilisant des encadrements.
>
> Calculer en utilisant le langage algébrique (lettres, symboles, etc.) »

Cette description met en avant d'une part le lien entre calcul et raisonnement et d'autre part celui entre calcul mental, calcul à la main et calcul instrumenté.

L'objectif prioritaire de l'enseignement des mathématiques au cycle 4 est de faire faire des mathématiques aux élèves. Or « faire des mathématiques », c'est « résoudre des problèmes ». Pour autant, un élève ne peut pas résoudre de problème s'il ne maîtrise pas un minimum de technique. En effet, sans ce minimum, toute mise en œuvre d'une stratégie de résolution risque de se révéler particulièrement laborieuse, voire impossible à finaliser, ce qui est particulièrement démotivant pour l'élève. C'est la raison pour laquelle le programme du cycle 4 vise à renforcer et à élargir la maîtrise calculatoire des élèves. Cependant, cela ne doit pas se faire au détriment des activités de résolution de problèmes, qui constituent d'ailleurs un puissant levier pour motiver l'acquisition des techniques de

calcul. En particulier, il est indispensable de ne pas limiter l'activité des élèves les plus fragiles à des tâches purement techniques et il est déconseillé d'attendre systématiquement leur maîtrise avant de leur proposer de résoudre des problèmes.

Il est donc important que les activités mettant en jeu des calculs respectent un juste équilibre entre entraînement technique et résolution de problèmes et les mettent en synergie afin de construire progressivement et de façon différenciée l'habileté calculatoire qui permettra à chaque élève de poursuivre ses études avec confiance et succès.

Outre l'acquisition de techniques efficaces et le développement d'automatismes indispensables à la réalisation autonome d'une activité mathématique, l'apprentissage du calcul au cycle 4 vise :

- la familiarisation avec les nombres (notamment leurs différents registres de représentation) et les opérations, mais aussi la découverte de nouveaux nombres (les relatifs) et de nouveaux objets mathématiques engagés dans les calculs (les lettres) ;
- le développement de stratégies de vérification et de contrôle permettant de développer l'esprit critique et de favoriser une utilisation raisonnée des instruments de calcul.

Calcul automatisé et calcul réfléchi

Pour illustrer les liens entre automatisation de procédures de calcul et réflexion engagée pour mener à bien un calcul, nous nous appuierons sur deux exemples :

Premier exemple : un élève qui, ayant à calculer 29×21 le décompose en $29 \times 20 + 29$ est capable d'obtenir le résultat mentalement plus vite et plus sûrement qu'en posant la multiplication. De plus, il mobilise implicitement une propriété essentielle de la multiplication (sa distributivité par rapport à l'addition) qu'il pourra ensuite généraliser. Des raisonnements de ce type (comme d'autres sur les fractions ou les puissances) s'avèrent d'ailleurs nécessaires pour pallier d'éventuels oublis.

Deuxième exemple : un élève qui maîtrise la technique opératoire de l'addition sait qu'il peut l'utiliser pour calculer 998 + 1205. Son calcul est alors automatisé ; mais, considérant les nombres en jeu, il peut trouver plus rapide de raisonner sur ce calcul et se dire que, vu que 998 = 1000 - 2, il lui suffit d'ajouter 1000 et d'enlever 2 au second nombre, pour obtenir le résultat 2203. C'est ici l'associativité qui est mise en jeu.

Seuls les répertoires (au sens de connaissances organisées et hiérarchisées) dont on dispose et les algorithmes que l'on maîtrise permettent l'automatisation d'un calcul. Ce sont eux qui en font la force et en garantissent l'efficacité. Mais dès lors qu'il sort de la routine, le calcul engage nécessairement un raisonnement. Il est essentiel d'insister sur ce point et sur la nécessité de cultiver cette synergie entre automatisation et raisonnement dans l'apprentissage de tout calcul. En particulier, le travail de mémorisation des règles de calcul sur les nombres doit fournir l'occasion d'exercer le raisonnement et de travailler les propriétés des nombres et des opérations qui le fondent. Il est également important d'insister sur le fait que les répertoires enseignés ne sauraient se limiter à des répertoires de composition, comme on comprend malheureusement souvent l'apprentissage des tables d'addition ou de multiplication. Les résultats de la décomposition de nombres (en somme ou en produit) sont aussi importants que ceux de leur composition et, si l'égalité $9 \times 7 = 63$ n'est pas associée à $63 = 9 \times 7$; $9 = 63 \div 7$ et $7 = 63 \div 9$, elle sera d'une utilité bien moindre.

Parmi les automatismes à développer, on peut citer (mais la liste est loin d'être exhaustive) les changements de registre d'écriture (décimale, fractionnaire), l'application d'un opérateur fractionnaire (par exemple prendre les sept tiers de 12), d'un pourcentage, la transformation d'une fraction en pourcentage et vice versa, la multiplication et la division par 10, 100, 1000, 10 000, les conversions d'unités de longueur, d'aire, de volume, de durée, les produits et quotients de puissances de 10, le développement et la simplification d'expressions littérales.

Ces réflexes intellectuels s'acquièrent dans la durée sous la conduite du professeur. Ils se développent en mémorisant et en automatisant progressivement certaines procédures, certains raisonnements particulièrement utiles, fréquemment rencontrés et ayant valeur de méthode. Pour être disponibles, les automatismes doivent avoir été entretenus et régulièrement sollicités.

Toutefois un automatisme n'est pas un moyen pour comprendre plus vite ; il permet simplement d'aller plus vite une fois que l'on a compris. Si l'acquisition d'automatismes nécessite des exercices d'entraînement et de mémorisation, référés à des tâches simples, ces exercices ne sauraient suffire : l'entraînement et la mémorisation ne constituent pas une fin en soi et sont mis au service de la résolution de problèmes plus complexes dans lesquels ils prennent tout leur sens.

Progressivité des apprentissages

Les compétences de calcul numérique travaillées au cycle 3 sont à consolider tout au long du cycle 4. Elles portent sur les nombres entiers et décimaux positifs et les quatre opérations, et concernent aussi bien le calcul automatisé que réfléchi, effectué sous forme exacte ou approchée.

La pratique du calcul commence souvent sur des objets en cours de construction (par exemple, le calcul fractionnaire en 6^{e} ou celui sur les nombres négatifs en 5^{e}). Le rôle du calcul est alors décisif pour familiariser les élèves avec ces objets, leur manipulation étant un moyen d'en construire une représentation efficace. C'est particulièrement vrai lorsque la définition de ces objets n'est pas étudiée, parce qu'inaccessible aux élèves, comme dans le cas de la construction des ensembles de nombres. Le calcul permet alors de mettre en place de façon progressive et implicite les structures qui les régissent.

Pour effectuer des calculs semblables à ceux qui ont été présentés *supra* en lien avec l'associativité et la distributivité, le recours à la calculatrice, s'il permet d'obtenir les résultats, prive l'élève d'une familiarisation avec les propriétés des nombres et des opérations Les modalités d'utilisation de la calculatrice supposent donc une véritable réflexion de la part des enseignants. Un paragraphe de ce document est entièrement dédié au calcul instrumenté.

Concernant le calcul fractionnaire, les élèves ont appris au cycle 3 à additionner, soustraire et comparer des fractions de même dénominateur, en référence à la notion de partage. L'oral a pu jouer un rôle déterminant dans l'automatisation de procédures telles que « 3 septièmes + 5 septièmes = 8 septièmes ». La poursuite, au cycle 4, de l'apprentissage des fractions vise à les appréhender en tant que quotients. Cette notion est sollicitée pour institutionnaliser la technique de l'addition de deux fractions de même dénominateur à partir d'un exemple générique, pour effectuer le produit de fractions simples, comme par exemple $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$ ou pour rechercher l'inverse d'une fraction simple. Ce travail est un préalable indispensable à la bonne compréhension des calculs de portée générale sur des fractions dont les numérateurs et dénominateurs sont des entiers relatifs.

Une bonne connaissance des fractions est une aide précieuse pour traiter les problèmes de proportionnalité. La détermination d'une quatrième proportionnelle peut reposer sur le cœfficient de proportionnalité, des propriétés en lien avec la linéarité ou le produit en croix.

Le calcul algébrique constitue un nouvel espace où va se déployer le raisonnement, en permettant notamment de démontrer en toute généralité des résultats constatés sur des exemples numériques (par exemple les propriétés du calcul fractionnaire). Pour préparer l'introduction du calcul littéral, il importe, dès le début du cycle 4, de renforcer le sens déjà connu du signe « égal » (par exemple dans l'égalité $\frac{3}{4} = 0{,}75$). Il va en effet être élargi à la fois à celui qu'il revêt dans une identité et dans une équation.

La notion d'identité correspond implicitement à la quantification universelle « pour tout », alors que celle d'équation correspond implicitement à une quantification existentielle (« existe-t-il une valeur de la variable pour laquelle deux formules donnent le même résultat ? »).

En fin de cycle 4, l'élève doit être capable de distinguer une identité du type $3(x+2)=3x+6$, valable pour tout x, d'une équation du type $3(x+2)=x+7$.

Une explicitation de « l'environnement » de l'égalité (ne pas hésiter à écrire « l'égalité … est vraie pour tout x » ou « existe-t-il une valeur de x pour laquelle l'égalité …est vraie ? ») est certainement le meilleur levier pour faire comprendre aux élèves ces notions délicates.

Le travail sur le développement et la réduction d'expressions littérales (dans lesquelles on peut, au début, se passer des nombres négatifs) est mené de front avec la consolidation de la maîtrise du calcul sur les nombres relatifs, entiers ou décimaux.

Stratégies d'enseignement

Enseigner les stratégies calculatoires par petites touches

Un enseignement fréquent et régulier permet de donner à chaque élève la possibilité de s'approprier à son rythme les stratégies de calcul. Ainsi est-il plus efficace et moins rébarbatif pour un élève, d'être sollicité de manière régulière à partir de la classe de 4e, sur un petit nombre d'exercices de développement ou de réduction d'expressions littérales (ou de calcul fractionnaire dès la 5e), plutôt que d'y être confronté à haute dose sur un petit nombre de séances.

Pratiquer des activités de calcul mental

Ce que nous appelons « calcul mental » dépasse le cadre du calcul mental traditionnel, puisque nous y englobons le calcul mental faisant appel au raisonnement, qu'il soit numérique ou littéral. Le calcul mental est intéressant en soi, d'abord parce qu'il permet d'acquérir des procédures de calcul utiles pour la vie quotidienne et d'automatiser des savoir-faire qui, une fois disponibles, libèrent la pensée pour d'autres tâches plus complexes. L'entraînement au calcul mental porte sur les techniques opératoires s'appliquant aux nombres relatifs (entiers et décimaux) et aux fractions, mais aussi sur le calcul littéral. Il favorise l'appropriation des nombres et de leurs propriétés et permet d'enrichir leur appréhension dans différents registres.

Ainsi, 25 %, c'est à la fois un quart, la fraction $\frac{1}{4}$ et le décimal 0,25 ; cet automatisme permet par exemple le calcul immédiat de $24 \times 0{,}25$.

De bonnes compétences en calcul mental sont indispensables pour prévoir l'ordre de grandeur d'un résultat, pour permettre une utilisation raisonnée de la calculatrice, pour développer l'esprit critique face à un résultat obtenu autrement.

Le calcul mental aide à la résolution de problèmes, il permet d'expérimenter, de prendre des initiatives, de développer des stratégies à partir d'essais et de tâtonnements, de développer aisance et rapidité dans la gestion de calculs plus complexes. Le calcul mental réfléchi (par exemple le calcul de 998 + 1205 présenté *supra*) est quant à lui le support à de véritables raisonnements.

La pratique régulière du calcul mental favorise la progressivité des apprentissages. Avant la formalisation d'un nouveau savoir, elle permet d'anticiper, de préparer son étude. Pendant la phase d'apprentissage, elle facilite l'appropriation des notions ou des propriétés travaillées. Après l'apprentissage, grâce à un réinvestissement régulier, elle permet l'appropriation pérenne des savoirs et développe la capacité à les mobiliser dans des situations inédites.

Le calcul mental fournit des supports d'évaluation pertinents : c'est une modalité efficace d'évaluation diagnostique. Sur le plan formatif, les temps de mise en commun permettent à la fois de dédramatiser l'erreur et de faciliter le débat participatif et argumenté. Les élèves qui réussissent en calcul mental

n'étant pas toujours exactement les mêmes que ceux qui réussissent dans d'autres activités mathématiques, il importe de reconnaître leurs réussites en prévoyant des situations d'évaluation sommative de calcul mental. Les activités mentales régulières, allant jusqu'à être ritualisées, facilitent la gestion de classe. Elles sont souvent des moments d'intense activité de la part de l'élève, car motivantes et stimulant l'attention.

Utiliser un exemple générique

En parallèle des écritures littérales, le recours à un exemple générique peut permettre de faire comprendre une démonstration à des élèves qui pourraient être déroutés par une approche purement formelle.

Ainsi, dans l'exemple suivant qui détaille le cas du produit de deux quotients, les calculs numériques menés dans la colonne de gauche peuvent être présentés plutôt que ceux de la colonne de droite, à condition toutefois que le résultat soit énoncé dans sa généralité.

	a, *b*, *c* et *d* sont quatre nombres quelconques ; *b* et *d* sont différents de zéro.
$\frac{2}{7}$ est le nombre par lequel il faut multiplier 7 pour obtenir 2 donc $7\times\frac{2}{7}=2$. De même $3\times\frac{5}{3}=5$	$\frac{a}{b}$ est le nombre par lequel il faut multiplier *b* pour obtenir adonc $b\times\frac{a}{b}=a$. De même $d\times\frac{c}{d}=c$
Si on multiplie $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}$ par 7×3 , on obtient en changeant l'ordre des facteurs dans le produit : $7\times\frac{2}{7}\times3\times\frac{5}{3}$ soit, d'après ce qui précède : 2×5	Si on multiplie $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ par $b\times d$, on obtient en changeant l'ordre des facteurs dans le produit : $b\times\frac{a}{b}\times d\times\frac{c}{d}$ soit, d'après ce qui précède : $a\times c$.
On en déduit donc que $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}$ est le nombre par lequel il faut multiplier 7×3 pour obtenir 2×5 .	On en déduit donc que $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ est le nombre par lequel il faut multiplier $b\times d$ pour obtenir $a\times c$.
Donc $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}=\frac{2\times5}{7\times3}$.	Donc $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$.

Anticiper et expliciter

Dès le début du cycle, le recours à une démarche par essais et ajustements et l'utilisation d'un tableur pour tester des valeurs permettent d'introduire progressivement la notion de solution d'une équation. Les limites des méthodes par tâtonnement ou par « remontée » des programmes de calcul permettent de justifier l'étude des techniques algébriques de résolution des équations du premier degré.

La part de raisonnement intrinsèque au calcul, lorsqu'il ne se réduit pas à un geste mécanique, mérite d'être explicitée dans l'enseignement. Il importe par exemple d'apprendre aux élèves à anticiper la forme la plus pertinente sous laquelle il faut écrire un nombre (écriture décimale ou fractionnaire, décomposition en somme ou en produit, etc.) ou une expression selon l'usage que l'on veut en faire. Il revient au professeur de prendre en charge le développement de cette intelligence du calcul chez ses élèves, par des moyens qui sont en partie communs et en partie propres à chaque type de calcul. Parmi les moyens communs, signalons l'organisation des différentes étapes d'un calcul complexe, le

choix des transformations à effectuer pour le simplifier, le contrôle (au moyen d'ordres de grandeur, de considérations de signe ou d'encadrement).

Trouver la juste place du calcul instrumenté

S'agissant de la calculatrice, du tableur ou de logiciels, la pertinence du calcul instrumenté dépend de l'usage que l'on en fait.

Le calcul instrumenté peut être néfaste aux apprentissages lorsque son usage est mal pensé, trop précoce ou exclusif. D'une part, les premiers pas dans l'apprentissage d'une notion calculatoire requièrent souvent une pratique dans laquelle la gestion mentale ou écrite est une aide à sa compréhension. Le recours systématique à la machine peut alors constituer un réel obstacle. D'autre part, l'apprentissage du calcul ne saurait se limiter à la production de résultats. Il comporte aussi tout un travail autour de la réflexion stratégique qu'il engage sur la recherche du calcul le plus approprié, son organisation et son contrôle à travers des allers retours permanents entre le résultat (même lorsqu'il a été obtenu à l'aide d'un instrument) et son interprétation.

Le calcul instrumenté facilite la résolution de problèmes, en permettant notamment aux élèves d'accéder à des sujets motivants sans être bloqués par des difficultés calculatoires. La possibilité d'utiliser des outils numériques (calculatrice, logiciels, etc.) a déplacé les équilibres entre exécution, pilotage et contrôle du calcul, ce qui permet de mettre aujourd'hui l'accent sur les aspects liés à l'intelligence du calcul. Encore faut-il intégrer la technologie de façon adéquate dans l'enseignement, en construisant des situations où pilotage et contrôle sont nécessaires.

Par sa rapidité à effectuer des calculs complexes et les possibilités d'accès à un grand nombre de données, le calcul instrumenté facilite aussi l'émission de conjectures dans des situations variées (résolution d'équations, comportement d'une fonction). Par ailleurs, il permet des changements de registres (numérique, symbolique, graphique) précieux pour l'assimilation.

Le recours au calcul instrumenté n'est pas dépourvu de raisonnement. Ainsi l'exécution d'un calcul sur machine requiert une organisation réfléchie (assimilation des priorités de calcul, conception d'un algorithme).

Son bon usage réside donc souvent dans une utilisation hybride, combinée avec des calculs mentaux ou réalisés à la main, notamment dans la résolution de problèmes.

Différenciation pédagogique

Le calcul mental favorise la différenciation pédagogique par la possibilité qu'il offre de faire vivre différentes procédures, d'accepter différentes réponses plus ou moins abouties. En évitant le passage systématique à l'écrit, il favorise l'entrée de certains élèves dans les apprentissages mathématiques ; il permet à chacun d'eux de développer et d'optimiser le champ de ses procédures, et au professeur de varier les consignes (résultats intermédiaires autorisés pour certains, avec l'objectif de s'en libérer petit à petit, temps variable accordé aux réponses, consignes écrites et/ou orales, forme des énoncés, etc.).

L'instrumentation du calcul a, elle aussi, un rôle à jouer au niveau de la différenciation pédagogique. En effet, pour certains élèves, un manque d'assurance dans le calcul écrit constitue un véritable handicap et une source de blocage. Or, de même qu'une orthographe incertaine ne saurait interdire l'écriture, le manque de dextérité calculatoire ne doit pas constituer un blocage à toute activité mathématique. Dans ces conditions, y compris dans des cas que l'on souhaiterait voir maîtrisés sans recours à la machine, un calcul assisté peut permettre à certains élèves de s'engager dans une activité mathématique présentant un réel enjeu en termes de modélisation ou de raisonnement et d'entrer dans des apprentissages qui leur seraient inaccessibles sans cette assistance.

Afin de faire face à l'hétérogénéité des élèves en termes de maîtrise calculatoire, la différenciation peut porter sur les nombres engagés dans un problème si l'on veut mettre l'accent sur sa mise en équation ou sa résolution plutôt que sur les techniques opératoires portant sur ces nombres. Par exemple, proposer à certains élèves des agrandissements dans lesquels « le côté qui mesure 8 cm devra mesurer 16 cm », à d'autres « le côté qui mesure 8 cm devra mesurer 12 cm », à d'autres encore « le côté qui mesure 7 cm devra mesurer 12 cm », permet d'adapter la situation à différents niveaux de maîtrise de la notion de quotient sans nuire à l'objectif de formation s'il est de faire comprendre le caractère multiplicatif de la situation. De même, pour faire comprendre la notion de solution d'une équation, avant d'automatiser la méthode algébrique de résolution d'une équation du premier degré, on pourra traiter des équations à coefficients entiers dont la solution peut être « devinée » sans peine, avant de passer à des équations dont la solution peut être trouvée ou approchée à l'aide d'un tableur.

Interdisciplinarité

Si le calcul est omniprésent dans l'apprentissage des mathématiques, il est également au cœur des interactions avec d'autres disciplines.

Le calcul numérique sur les mesures de grandeurs se prête à des interactions avec de nombreuses disciplines (physique, chimie, sciences de la vie et de la Terre, technologie, EPS, etc.). Le calcul littéral est particulièrement sollicité à travers l'exploitation des formules qui traduisent les lois physiques ($P = UI$, $P = mg$, relation liant l'énergie, la puissance électrique et la durée) au programme de physique-chimie du cycle 4. Le calcul lié à la proportionnalité et aux statistiques permet d'élargir ces interactions à une discipline comme la géographie et les nombres négatifs permettent de repérer des températures, des profondeurs, des dates, des créances, autant de notions qui dépassent le cadre de la seule discipline mathématique.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Communiquer à l'écrit et à l'oral

Communiquer efficacement dans le cadre d'une activité mathématique est un objectif de formation essentiel, recouvrant plusieurs champs de compétences : comprendre des énoncés, produire des textes aux finalités diverses, s'exprimer oralement.

C'est aussi par la médiation d'échanges que le professeur apprécie le niveau de maîtrise de l'élève. Cette double fonction de la communication, objet de formation et moyen d'apprécier la réussite de l'élève, a son importance. S'il convient que l'élève apprenne à s'exprimer avec un maximum de rigueur et de clarté, il ne faut pas pour autant considérer que celui qui s'exprime avec peine a nécessairement des difficultés mathématiques. Il s'agit avant tout d'ouvrir le champ de la résolution de problèmes au plus grand nombre d'élèves, y compris à ceux qui ont des difficultés à entrer dans les codes de la rédaction d'une démonstration.

Prendre en compte les spécificités de la langue utilisée dans l'activité mathématique

Toutes les difficultés des élèves ne sont pas imputables à des problèmes de langue et tous les problèmes de langue ne résultent pas d'un déficit lexical. Des malentendus peuvent naître d'énoncés ambigus, d'un déficit d'explications ou de la difficulté à gérer les interactions entre plusieurs registres de langue.

Le domaine 1 du socle commun, *les langages* pour penser et communiquer, vise à prendre en compte, au-delà de la maîtrise de la langue française, la spécificité de certains langages. Ainsi, la communication mise en œuvre en mathématique se caractérise par la coexistence d'un langage précis et codifié pouvant faire intervenir des symboles, et d'une langue plus proche de la langue naturelle qui permet d'échanger des idées ou de donner des explications. L'utilisation simultanée de ces deux niveaux d'expression et d'une gamme de niveaux intermédiaires, avec leurs règles propres qui peuvent varier, mérite un accompagnement particulier. Cet accompagnement doit notamment éveiller l'élève à l'idée que le débat scientifique est soumis à des spécificités.

En mathématiques, le sens d'une phrase est sensible à l'ordre des mots, ainsi qu'à la signification des connecteurs logiques ou de quantificateurs plus ou moins explicites.

> Le sens de la phrase « Tout multiple de 15 est multiple de 5 » est modifié si on intervertit les entiers mentionnés.
> La phrase « *On sait que ABCDE est un pentagone régulier, donc 360/5 = 72* (...) » n'est pas correcte, bien que l'élève ait sans doute correctement analysé la figure.
> Dans la phrase « Un carré a quatre angles droits », il faut comprendre que ce qui est dit vaut pour n'importe quel carré. Si l'on donne comme définition : « Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits », cette phrase apparemment proche de la précédente fournit une double information permettant de caractériser un rectangle.

En mathématiques, la concision des énoncés peut être source de malentendus.

> La même phrase « Tout multiple de 15 est multiple de 5 » peut être comprise à tort comme une équivalence.

La concision est par ailleurs un objectif, non pour sa dimension esthétique, mais pour la cohérence de la solution. Ainsi, la rédaction d'une démonstration relève d'une pratique très codifiée où par exemple il convient de ne pas multiplier les arguments si un seul peut suffire.

Bien entendu, un tel objectif doit faire l'objet d'une réflexion pédagogique afin d'adapter les attentes aux possibilités des élèves de collège, pour lesquels l'appropriation de cette contrainte est en cours d'acquisition.

En mathématiques, des tableaux, des graphiques ou d'autres modes de représentation, peuvent se substituer efficacement à des phrases qui seraient nettement plus difficiles à comprendre.

> Au même titre que l'on ne saurait remplacer les panneaux des gares affichant les horaires des trains par des phrases, la puissance des notations mathématiques permet de condenser un nombre important d'informations. Au lycée, un tableau de variation ou un arbre de probabilités sont porteurs de conventions que l'on peut mobiliser pour démontrer. De même au collège, un tableau de proportionnalité, le recours au calcul littéral, ou une figure codée permettent une économie de pensée.

De nombreux termes utilisés en mathématiques proviennent de la langue courante, mais prennent un sens différent. Une liste de termes polysémiques rencontrés en mathématiques au collège peut être portée à la connaissance des élèves [liste de termes polysémiques rencontrés en mathématiques].

En mathématiques, la structure d'une phrase ne renseigne pas toujours sur le statut de l'énoncé. On peut notamment distinguer : la donnée d'une information (énoncé d'un problème), l'institutionnalisation (définition, propriété), la démonstration, la consigne donnée par le professeur, les commentaires émis par l'élève (narration de recherche) ou par le professeur (annotations sur une copie).

> Par exemple, les phrases suivantes figurant dans un même cahier d'élève sont construites de la même façon, mais ont une fonction différente : « La somme des angles d'un triangle est égale à 180°. », « La longueur totale du trajet est de 60 km », « I milieu de $[AB]$ est équidistant des points A et B ».

Plus généralement, la part importante d'implicite constitue un obstacle dont il faut prendre acte.

L'accumulation de ces difficultés potentielles montre à quel point la compréhension d'un texte mathématique et, a fortiori, la production d'un texte tel qu'une démonstration recèlent de nombreux obstacles. En avoir conscience doit permettre au professeur d'adapter ses exigences pour mieux former les élèves.

Il va de soi que la détection de telles difficultés ne peut s'opérer à partir d'un catalogue préétabli. Une démarche d'entretien avec l'élève concerné est indispensable.

Placer les élèves en situation de production écrite

Garantir la compréhension des énoncés et des consignes est un préalable essentiel.

Certaines habitudes de travail instaurées au cycle 3 peuvent être avantageusement prolongées au cycle 4, comme par exemple : ménager un temps de lecture silencieuse des énoncés, faire expliciter le vocabulaire spécifique, lui donner du sens en précisant éventuellement son étymologie, s'assurer de la compréhension des textes lus.

En vue de renouveler l'activité de lecture pour solliciter l'attention et l'esprit critique, se sont développées certaines activités : construction par les élèves d'un énoncé de problème à partir de quelques données, ou présence dans un énoncé des données superflues. Cette dernière pratique peut présenter un intérêt dès l'instant où elle ne vise pas à tendre des pièges mais s'apparente au traitement de données réelles.

Au-delà de ces considérations, en vue d'étendre leurs compétences dans le domaine de la lecture, il convient d'inciter les élèves à lire en dehors de la classe d'autres textes que ceux du cours ou des exercices (articles, revues, livres, etc.) et de réinvestir ces lectures en classe.

Le passage au cycle 4 s'accompagne d'exigences plus importantes en matière de production écrite, avec à la fois un volume plus conséquent et un niveau de complexité plus élevé.

Cette évolution doit être progressive sur la durée du cycle et s'accompagner d'un certain nombre de précautions d'ordre pédagogique.

On peut distinguer plusieurs modalités :

- les écrits de la classe avec le professeur ;
- les écrits personnels ;
- les écrits de groupe.

Les écrits rédigés par la classe avec le professeur ont généralement pour objet d'institutionnaliser et de structurer ce qui est à retenir.

Une organisation efficace des supports utilisés (cahier, ordinateur, tablette, etc.) doit contribuer à la qualité des traces écrites conservées. Il est important de :

- définir l'organisation du cahier, en prenant appui sur un plan clairement affiché et sur d'autres éléments structurants ;
- préciser à chaque séance la place de la trace écrite (cours, exercices, écrits personnels, etc.) ;
- relever régulièrement les cahiers et si nécessaire les faire corriger par les élèves ;
- prévoir durant la séance des moments où l'élève copie ce qui est écrit au tableau ;
- s'assurer systématiquement de la compréhension du texte copié.

Parallèlement, un entraînement à la prise de notes est à instaurer très progressivement en concertation avec les professeurs des différentes disciplines.

Mais bien entendu, la pratique d'écriture en classe ne saurait se réduire à la copie de ce que le professeur écrit au tableau. L'enjeu majeur à ce niveau consiste à procurer aux élèves une marge d'initiative suffisante pour leur permettre de progresser dans l'écriture de textes mathématiques.

Il est donc primordial d'accorder très régulièrement un temps significatif à la production d'écrits personnels. Ce temps d'écriture doit être clairement identifié et bénéficier de conditions propices (silence, durée suffisante). Cette production peut consister à exposer des idées, à décrire une démarche, ou à exposer une solution.

Ménager une certaine difficulté est nécessaire, mais on évitera de fractionner artificiellement les difficultés dans l'espoir que l'élève saura ensuite réunir des savoir-faire exercés séparément. Ainsi, l'usage de fiches à trous à compléter ne permet pas de le placer en situation d'expression écrite et ne présente donc pas d'intérêt pour sa formation dans ce domaine.

Il faut accepter la production d'écrits intermédiaires, forcément imparfaits, par exemple au moyen d'un cahier de brouillon qui permet de « *prôner l'imperfection pour exiger in fine la perfection* »[1].

Une activité intéressante peut consister à comparer les différentes versions d'un texte, par exemple les solutions données par plusieurs élèves ou par un même élève à différents moments.

Ces recommandations correspondent parfaitement à la consigne donnée aux candidats lors des épreuves d'examen (DNB, baccalauréat) : « Toute trace de recherche sera prise en compte dans l'évaluation », invitant les élèves à s'engager dans une activité de recherche et à faire part de leur cheminement.

Le travail d'écriture à l'initiative de l'élève doit lui permettre de prendre conscience des exigences particulières du discours mathématique. Plutôt habitué à raconter qu'à expliquer, le plus souvent selon une logique d'exposition chronologique, l'élève doit passer de la narration à un mode d'exposé scientifique où l'auteur ne s'implique pas de la même façon.
Par exemple, une démonstration est rédigée selon un mode neutre, en mettant en évidence les enchaînements logiques.

De ce point de vue, la pratique dite des « figures téléphonées » où l'élève doit décrire à un camarade, qui ne la voit pas, une figure donnée dans le but qu'il la reproduise, est particulièrement formatrice. Cet exercice, qui peut également se concevoir à l'oral, demande à l'élève prise de recul et rigueur d'expression, tout en l'obligeant à apprécier correctement le degré d'explicite attendu.

S'inscrivant dans le cadre de travaux collectifs, les écrits de groupe peuvent déboucher sur la synthèse de propositions individuelles. Ils sont un moyen d'apprendre à travailler ensemble à travers la mise en commun des idées ou la confrontation des démarches.

Quelle que soit la modalité adoptée, la place de la production écrite dans la séance gagne à être méthodiquement programmée. L'un des enjeux est d'éviter de superposer les difficultés. Ainsi il vaut mieux ne pas confondre le temps de la réflexion, où émergent les idées, celui de la mise en forme des idées, où l'on tend vers une formalisation de la solution, et celui de la rédaction de celle-ci sous une forme aboutie. Accepter de différer le moment de la production écrite plutôt que de demander immédiatement un texte irréprochable, peut également libérer la recherche. Dans le même esprit, l'évaluation ne peut reposer uniquement sur la production du produit fini.

1. D'après La maîtrise de la langue au collège, page 92 – voir bibliographie.

Développer les compétences d'expression orale

Si l'enseignement est devenu moins magistral, la répartition du temps de parole entre le professeur et les élèves demeure parfois déséquilibrée. Plus que la durée des interventions, c'est la nature des prises de parole qui doit être examinée. Il arrive que la participation de l'élève se limite à répondre à des questions fermées appelant des réponses très brèves. Le professeur, soucieux d'aboutir rapidement, ne donne pas toujours l'occasion ni le temps d'élaborer une réponse construite. L'échange peut alors consister en la succession de séquences : question du professeur - réponses d'élèves - commentaires du professeur.

Cette pratique résulte d'un double malentendu à propos de la participation orale :

- penser que son seul objectif est d'entretenir une « classe vivante », pour créer une ambiance qui devrait être favorable à l'apprentissage ;
- considérer qu'elle doit conduire à tout prix à « la » bonne réponse pour ensuite ne conserver qu'elle.

Or, la maîtrise de l'expression orale, au même titre que celle de l'écrit, constitue un objectif de formation à part entière.

Cette maîtrise ne s'acquiert pas spontanément. Elle a ses spécificités et ne se limite pas à une transposition des compétences relevant de l'écrit.

Pour atteindre ces objectifs, il peut être utile de veiller à :

- réunir de bonnes conditions d'écoute ;
- privilégier des questions appelant une réponse structurée ;
- exiger des réponses par phrases complètes ;
- solliciter tous les élèves ;
- enrichir le lexique ;
- faire mémoriser des écrits de référence (définitions, théorèmes, etc.).

Mais au-delà des aspects linguistiques, qui sont essentiels, la maîtrise de l'oral gagnera à s'intégrer dans une perspective de communication. Aussi s'acquiert-elle par une pratique régulière dans des situations pertinentes.

En effet, la pratique de l'oral n'est formatrice que si elle répond à un véritable besoin de s'exprimer. En d'autres termes, une pédagogie de l'oral passe par des situations de communication offrant de vrais enjeux pour les interlocuteurs : s'expliquer, décrire, argumenter, convaincre, décider, etc.

Par conséquent, il est souhaitable de diversifier les situations de communication :

- échanges pour s'assurer de la compréhension d'un énoncé ;
- organisation d'un débat entre élèves ou groupes d'élèves pour confronter des pistes de résolution d'un problème ;
- présentation d'une solution ;
- compte rendu de l'avancée d'un travail réalisé en petits groupes ;
- exposé d'un travail de recherche sur un thème donné, pouvant être à dimension historique ou culturelle, ou concerner une notion non encore étudiée ;
- aide à d'autres élèves dans le cadre d'un tutorat.

Par ailleurs, si l'une et l'autre recouvrent des compétences spécifiques, la maîtrise de l'oral et celle de l'écrit sont liées entre elles et le travail réalisé en faveur de l'une peut être réinvesti au service de l'autre.

Une organisation structurée des séances doit permettre de bien articuler le temps consacré à l'oral et celui de l'écrit, en les identifiant clairement. De plus, on sait que l'élève en difficulté a souvent du mal à se situer entre les différentes phases d'une séance. Il ne perçoit pas forcément à quel moment on passe de l'exploration à l'institutionnalisation, ou de la conjecture à la démonstration. Des transitions explicites doivent le guider dans le suivi du cours et faciliter sa participation.

Enfin, dans le registre de la maîtrise de la langue, une concertation étroite entre les professeurs des différentes disciplines est nécessaire pour la mise en place d'actions cohérentes et complémentaires.

Bibliographie

- La maîtrise de la langue au collège (direction des lycées et collège, CNDP, 1997 – ouvrage diffusé dans tous les CDI en 1997-1998)
- Site de l'académie d'Aix-Marseille : « Maîtrise de la langue dans toutes les disciplines »
- Site de l'académie de Bordeaux : « Maîtrise de la langue »
- Site de l'académie de Créteil : « Enseignement des mathématiques et maîtrise de la langue »
- IREM de Rennes : « L'enseignement de la démonstration »
- Les dimensions linguistiques de toutes les matières scolaires, un guide pour l'élaboration des curriculums et pour la formation des enseignants (Conseil de l'Europe, 2015)

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

Objectifs

Au cycle 3, l'élève a découvert la notion de multiple et diviseur d'un entier naturel d'usage courant et les critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9 et 10. Il a résolu des problèmes en mobilisant la division euclidienne selon deux approches :

LA DIVISION – GROUPEMENT	LA DIVISION – PARTAGE
Exemple La maîtresse a 12 jetons. Elle les distribue à un groupe d'élèves. Chaque élève reçoit 3 jetons. Combien y a–t–il d'élèves ?	Exemple La maîtresse a 12 jetons. Elle les distribue à 4 élèves. Chaque élève a le même nombre de jetons. Combien de jetons a chaque élève ?
Résoudre un problème de division-groupement revient à calculer le nombre de paquets identiques que l'on peut faire dans une collection connaissant la valeur d'un paquet.	Résoudre un problème de division-partage revient à calculer la valeur d'un paquet connaissant le nombre de paquets identiques que l'on peut faire dans une collection.

Au cycle 4, la division euclidienne continue à être mobilisée ; les notions de multiple et de diviseur sont étendues à l'ensemble des entiers naturels. Progressivement, l'élève découvre les notions de diviseur commun et de nombre premier. Il mobilise ces connaissances pour résoudre des problèmes.

L'apprentissage du raisonnement est un objectif central auquel contribue de façon spécifique le travail en arithmétique. L'activité mathématique proposée aux élèves doit prendre appui sur des situations variées.

Il s'agit d'amener les élèves à élaborer des raisonnements de divers types :

- **par disjonction de cas :** « Si deux entiers naturels ne sont pas multiples de 3, alors leur produit n'est pas multiple de 3 » (disjonction de cas suivant les restes de la division euclidienne par 3).
- **par l'absurde :** « n désigne un entier qui n'est pas premier. Montrer que n a un diviseur plus petit que $\sqrt{n}$. » ; « Irrationalité de $\sqrt{2}$. »
- **à l'aide d'un contre-exemple :** « Vrai-Faux : quel que soit l'entier naturel n, le nombre $n^2 - n + 11$ a exactement 2 diviseurs. ($n = 11$ fournit un contre-exemple.)

Liens avec les domaines du socle

La recherche de diviseurs ou de multiples d'un entier naturel ou communs à deux entiers naturels, la simplification de fractions, la décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers conduisent à effectuer avec discernement des calculs mentaux, posés ou instrumentés (domaine 1).

De façon générale, l'analyse des erreurs, le travail par « essais/ajustements » et le travail collaboratif, en groupe ou en équipe et, plus spécifiquement, la reconnaissance du caractère irréductible d'une fraction, l'identification ou la production de nombres premiers conduisent à s'engager dans des démarches de recherche, y compris algorithmiques, à produire des exemples ou des contre-exemples (domaine 2).

La résolution de problèmes mettant en jeu des entiers naturels (comme les problèmes de conjonction, voir par exemple l'activité « Ça roule »), qui conduit à observer, manipuler et argumenter, et le travail de la preuve (critères de divisibilité, par exemple) permettent de rencontrer et de produire des raisonnements spécifiques (par l'absurde, par disjonction de cas, à l'aide de contre-exemples notamment), ce qui favorise l'apprentissage du raisonnement (domaines 3 et 4).

Progressivité des apprentissages

La division euclidienne est travaillée sur toute la durée du cycle. Les critères de divisibilité, les notions de diviseur et de multiple d'un entier naturel sont à réinvestir dès le début du cycle. Dans la perspective de l'apprentissage du raisonnement, les nombres premiers peuvent être introduits dès le début du cycle et travaillés tout au long du cycle. La notion de fraction irréductible est introduite en classe de 3e, donnant une occasion d'aborder la notion de diviseur commun à deux entiers naturels. Dans la mesure où cette approche met en jeu des entiers de taille raisonnable, la fraction irréductible s'obtient par simplifications successives et ne nécessite pas le calcul du PGCD.

Stratégies d'enseignement

Les questions flash (*Multiples, diviseurs et critères de divisibilité* et *Nombres premiers*) contribuent à la construction du sens « multiple/diviseur » et à l'appropriation des critères de divisibilité. Proposées régulièrement sur la durée du cycle, elles permettent de réactiver ces savoirs et savoir-faire ; elles peuvent concourir à une évaluation diagnostique.

Le travail sur l'erreur s'appuie sur un retour au sens, en lien avec la définition de diviseur et de multiple ainsi que la production d'exemples et de contre-exemples. L'arithmétique est un domaine dans lequel l'élève est amené à mettre en œuvre différents types de raisonnement.

L'oral constitue une aide à la compréhension et participe du traitement de l'erreur.

Différenciation

Dans ce thème, la différenciation peut notamment consister en :

- un accompagnement spécifique que ce soit pour des travaux en classe ou hors la classe ;
- l'élaboration de la preuve d'un résultat général, d'une propriété (critère de divisibilité par 3 par exemple) ou la résolution d'un problème (voir par exemple le prolongement proposé dans la tâche intermédiaire « Un petit nombre ») à l'aide d'un exemple générique ; la démonstration dans le cas général pouvant faire l'objet d'un approfondissement proposé à certains élèves.

Exemples de situations d'apprentissage

Les tâches proposées peuvent notamment consister en des activités mentales, conduire à l'élaboration d'algorithmes et de programmes et exiger la mise en œuvre de raisonnements.

Exemples d'activités

Exemples de questions flash
- Multiples, diviseurs et critères de divisibilité
- Nombres premiers

Exemples de tâches intermédiaires
- Qui suis-je ?
- Un habile partage
- Un petit nombre
- Une grande lectrice

Exemples d'activités avec prise d'initiative
- Ça roule
- Système monétaire
- Conjecture de Syracuse

Interdisciplinarité

Les entiers naturels interviennent principalement dans la résolution de problèmes internes aux mathématiques relevant de la divisibilité et de la primalité. L'étude de tels problèmes permet aux élèves de s'approprier des connaissances et d'acquérir des compétences qui favorisent tout particulièrement l'apprentissage du raisonnement.

De façon complémentaire, l'étude de problèmes d'engrenages, de conjonction de phénomènes périodiques, issus de la physique et de la technologie, participent de la formation des élèves.

Des EPI portant sur les thématiques « Information, communication, citoyenneté » (stockage de l'information, cryptage) ou « Langues et cultures de l'Antiquité » (prédiction des éclipses solaires et lunaires, nombres parfaits) seront l'occasion de construire l'attendu de fin de cycle « Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers ».

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder les notions de divisibilité et de nombres premiers avec les élèves :

- Du numérique au littéral
- Raisonnement et démonstration

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

Exemple d'activité avec prise d'initiative : ça roule

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers :

- multiples et diviseurs ;
- déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

Énoncés

Énoncé-vidéo 1 : Les deux roues

Voir la vidéo arithmetique-initiative-ca-roule-video1.

Énoncé-vidéo 2 : Inséparables

Voir la vidéo arithmetique-initiative-ca-roule-video 2.

Énoncé-vidéo 3 : Les pastilles

Voir la vidéo arithmetique-initiative-ca-roule-video3 .

Énoncé 4

Le grand-bi de Jules est constitué d'une roue circulaire de longueur 450 cm (avant), et d'une roue circulaire de longueur 135 cm (arrière). On a peint un repère rouge sur chaque roue.

Un observateur remarque qu'à 13 h 51 min, les deux repères rouges sont en contact avec le sol.

Quelle longueur doit parcourir Jules sur son grand-bi pour que les deux repères soient à nouveau en contact avec le sol au même instant ?

Pistes pédagogiques

Ces activités s'appuient sur une « question ouverte ». On étudie ici des problèmes d'engrenages et de conjonction de phénomènes périodiques. L'élève peut résoudre ces exercices en travaillant sur les multiples des nombres mis en jeu ou développer d'autres stratégies (proportionnalité, ...).

Des activités de ce type permettent de confronter différents raisonnements produits par les élèves (déductifs ; essais-ajustements, ...) et de réinvestir les notions de multiples et diviseurs.

L'étayage est ici crucial à la fois pour susciter l'engagement de tous les élèves et favoriser l'émergence de diverses démarches. Cet étayage peut prendre différentes formes comme, par exemple :

- visualisation d'une simulation (animations , algorithmes , vidéos), comme sur cet exemple ou celui-ci.
- manipulations d'engrenages.

La mise en œuvre d'une différenciation pédagogique (changement de variable didactique : nombre de dents des roues, par exemple) peut utilement être envisagée.

L'intérêt de présenter ces activités sous forme de vidéos ou de proposer une manipulation est de favoriser l'appropriation du problème en autonomie (répétition à volonté du visionnage).

L'étude de problèmes du même type, de difficulté graduée, favorise la construction d'une image mentale modélisante.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

Exemple d'activité avec prise d'initiative : conjecture de Syracuse

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers :

- multiples et diviseurs ;
- déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier ;

Ecrire, mettre au point et exécuter un programme simple :

- écrire, mettre au point (tester, corriger) et exécuter un programme en réponse à un problème donné.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, modéliser, raisonner, calculer

Énoncé

On choisit un nombre entier naturel n. Si n est pair, on le divise par 2 ; si n est impair, on calcule $3n+1$ puis on recommence avec le nombre obtenu et ainsi de suite. Que remarque-t-on ?

Pistes pédagogiques

On favorise ici la production d'exemples puis une mutualisation des travaux qui conduit à une conjecture. Une telle mise en œuvre permet de valoriser le travail de groupes.

Il convient de mettre en évidence que la proposition à laquelle on aboutit a le statut de conjecture et qu'il n'est pas demandé d'apporter une preuve. Une telle situation étant assez inédite dans le cadre scolaire, il sera intéressant de signaler aux élèves à titre culturel qu'en dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture n'a pas à ce jour été démontrée par les mathématiciens.

On peut envisager d'amener tout ou partie de la classe à créer un algorithme permettant de déterminer la suite de nombres ainsi obtenus. Les élèves peuvent programmer l'algorithme à l'aide de logiciels mis à disposition. Cela nécessite qu'au préalable, le professeur ait fait travailler la classe avec ces logiciels, en en identifiant les fonctionnalités propres, pour produire des algorithmes simples.

Ce type de tâche peut-être proposé aux élèves dès le début et tout au long du cycle.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

Un exemple de tâche intermédiaire : une grande lectrice

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers :

- multiples et diviseurs ;
- division euclidienne (quotient, reste) ;
- déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, raisonner, calculer, communiquer

Énoncé

Charlotte adore la lecture et possède entre 400 et 450 romans. Elle décide de revendre ses livres sur internet pour en acheter d'autres. Lorsqu'elle regroupe ses livres par 3, par 4 ou par 5, il en reste toujours 1.
Combien de romans Charlotte possède-t-elle exactement ?

Pistes pédagogiques

Un premier temps de travail individuel est nécessaire pour que chaque élève s'approprie l'énoncé. Un travail en groupes peut ensuite être envisagé pour amener les élèves à débattre, argumenter et préparer une restitution du travail.

L'apport d'aides (indices, « coups de pouce »), éventuellement de façon différenciée, en vue de relancer la réflexion des élèves est à prévoir. Ainsi, par exemple :

- poser la division euclidienne de 13 par 3, par 4 puis par 5 et indiquer quels sont les quotients et restes de ces divisions ;
- faire un essai sur un nombre de livres pris au hasard entre 400 et 450 ;
- à l'aide d'un calcul instrumenté (utilisation du tableur, par exemple), enlever 1 à chacun des nombres de livres que peut posséder Charlotte. Que se passe-t-il lorsqu'elle les regroupe par 3, par 4 ou par 5 ?

Ce type de tâche peut-être proposé aux élèves dès le début et tout au long du cycle.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

Un exemple de tâche intermédiaire : un habile partage

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers :

- multiples et diviseurs ;
- division euclidienne (quotient, reste).

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, raisonner, calculer, communiquer

Énoncé

Hugo et ses 11 amis ont récupéré 109 chocolats pour son anniversaire. Les 12 amis se disputent pour le partage.

Hugo dit alors : « Je me sacrifie, partagez-vous les chocolats équitablement, je prendrai ce qu'il reste ».

Que penser de son sacrifice ?

Pistes pédagogiques

La déclaration d'Hugo doit permettre d'instaurer un débat puis d'engager la classe dans la recherche à partir des propositions des élèves.

On pourra profiter de cet exercice pour travailler sur la notion de multiple : « Combien aurait-il fallu de chocolats pour que le partage se déroule sans reste ? », par exemple.

Ce type de tâche peut-être proposé aux élèves dès le début et tout au long du cycle.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

Exemple de question flash : multiples, diviseurs et critères de divisibilité

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers :

- multiples et diviseurs ;
- déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier ;
- simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, raisonner, calculer

Énoncé

voir le diaporama associé

Diapositive 1
2 075 est-il divisible par 5 ? Justifier.
Diapositive 2
3 est-il un diviseur de 546 ? Justifier.
Diapositive 3
Vrai ou faux ? 456 est un multiple de 9. Justifier.
Diapositive 4
Lister les diviseurs de 12.
Diapositive 5
Quel est le plus petit entier positif multiple de 3 et de 11 ?
Diapositive 6
Quel est le plus petit entier positif multiple de 6 et de 8 ?
Diapositive 7
Quel est le plus petit entier positif divisible par 2 et 7 ?
Diapositive 8
Quel est le plus petit entier positif divisible par 2 et 14 ?
Diapositive 9
Quels sont les diviseurs communs de 12 et 18 ?
Diapositive 10
51/27 est-elle une fraction irréductible ? Justifier.

Pistes pédagogiques

Cet exercice mobilise principalement les notions de diviseur et de multiple d'un nombre entier. Il permet l'appropriation des critères usuels de divisibilité. Les différentes diapositives amènent progressivement l'élève de la mise en œuvre d'une capacité à l'élaboration d'un raisonnement simple.

Dans cet esprit, ce diaporama peut prendre place dans des temps de calcul mental afin de construire ou renforcer l'agilité calculatoire des élèves. Il peut conduire à un travail sur l'erreur et concourt à l'apprentissage du raisonnement.

Ce type de diaporama peut être utilisé dès le début et tout au long du cycle 4 ; seule la dernière diapositive n'est à proposer qu'en classe de 3e.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

Un exemple de question flash : nombres premiers

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers :

- multiples et diviseurs ;
- déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier ;
- notion de nombres premiers.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, raisonner, calculer.

Énoncé

1. Trouver trois nombres premiers entre 18 et 35.
2. 51 est-il un nombre premier ? Justifier.
3. Décomposer 24 en produit de facteurs premiers.
4. Décomposer 180 en produit de facteurs premiers.
5. Vrai ou faux : Quel que soit l'entier n, $2n-1$ est un nombre premier. Justifier.

Pistes pédagogiques

Cet exercice mobilise principalement la notion de nombres premiers. Il favorise l'acquisition de connaissances (mémorisation des premiers nombres premiers), la construction d'automatismes (mise en œuvre de critères usuels de divisibilité, contrôle du caractère premier ou non d'un nombre entier) et l'apprentissage du raisonnement (preuve du caractère premier d'un nombre entier, production d'un contre-exemple).

Cet exercice peut prendre place dans des temps d'activités mentales, notamment au début d'une séance. Il peut donner lieu à un travail sur l'erreur et concourt à l'apprentissage du raisonnement.

Un tel exercice peut être proposé dès le début et tout au long du cycle 4.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

Un exemple de tâche intermédiaire : un petit nombre

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers :

- multiples et diviseurs ;
- déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier ;
- notion de nombres premiers.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, représenter, raisonner, calculer

Énoncé

Quel est le plus petit nombre possédant exactement 5 diviseurs ?

Pistes pédagogiques

Une démarche par essais / ajustements est ici à favoriser. L'élaboration, voire la description argumentée, d'une stratégie de résolution est à susciter (étude du nombre de diviseurs des premiers entiers jusqu'à l'obtention de la solution ; exploitation de la décomposition de nombres entiers en produits de facteurs premiers, par exemple).

Après un premier temps d'appropriation et de recherche individuelle, un travail en groupes peut être envisagé.

Le travail sur l'erreur, en lien avec l'apprentissage du raisonnement, est à conduire (détermination du nombre de diviseurs d'un nombre entier à partir de sa décomposition en produit de facteur premiers, par exemple).

Ce type de tâches peut-être proposé aux élèves dès le début et tout au long du cycle.

En guise d'approfondissement, notamment dans le cadre du travail « hors du temps de classe » ou de l'accompagnement personnalisé, on pourra amener la classe ou certains élèves à chercher le plus petit nombre possédant exactement un nombre impair donné de diviseurs. La tâche devient alors une activité avec prise d'initiative. Son traitement algorithmique peut conduire à conjecturer une caractérisation des nombres entiers ayant un nombre impair de diviseurs (aucun facteur premier de leur décomposition en produit de facteurs premiers ne peut y figurer avec un exposant impair).

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

Un exemple de tâche intermédiaire : qui suis-je ?

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers :

- déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier ;
- division euclidienne (quotient, reste) ;
- multiples et diviseurs.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, raisonner, calculer.

Énoncé

Je suis un nombre à trois chiffres non nuls. Je suis divisible par 94.
Changez l'ordre de mes chiffres et je deviens divisible par 49.
Qui suis-je ?

Pistes pédagogiques

Dans cet exercice, on travaille sur la notion de multiple. La recherche débute par un inventaire des multiples de 94 ayant 3 chiffres. L'élève peut ensuite raisonner en recherchant les multiples de 49. On peut aussi prévoir l'utilisation d'un tableur.

Ce type de tâche peut-être proposé aux élèves dès le début et tout au long du cycle.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

Un exemple de tache avec prise d'initiative : système monétaire

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers :

- multiples et diviseurs ;
- division euclidienne (quotient, reste) ;
- déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier.

Écrire, mettre au point et exécuter un programme simple :

- écrire, mettre au point (tester, corriger) et exécuter un programme en réponse à un problème donné.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, modéliser, raisonner, calculer

Énoncé

Dans un pays où le système monétaire n'est constitué que de pièces de 3 et de 5, il s'agit d'aider les habitants en créant un programme qui donne le nombre de pièces nécessaires à tout achat d'un montant entier supérieur ou égal à 8.

Source : d'après PISA, items libérés

Pistes pédagogiques

L'utilisation d'un tableur permet de se convaincre que l'on peut obtenir tous les nombres supérieurs ou égaux à 8. La création d'un programme s'avère particulièrement performante pour la résolution du problème. L'expérimentation sur certaines valeurs permet de mettre en place le raisonnement sous-jacent ; c'est également un élément de différenciation.

Pour les valeurs 1 ; 2 ; 4 et 7 en entrée, l'algorithme renvoie des valeurs dans Z. Ces montants ne peuvent pas être obtenus autrement mais, dans un contexte monétaire où l'appoint n'est pas obligatoire, on peut les obtenir par échange. Par exemple, 7 est obtenu en donnant deux pièces de 5 et en recevant une pièce de 3.

Ce type de tâche peut-être proposé aux élèves dès le début et tout au long du cycle.

On peut envisager un prolongement, notamment dans le cadre du travail « hors du temps de classe » ou de l'accompagnement personnalisé, en conduisant l'ensemble de la classe ou certains élèves à :

• analyser les réponses fournies par l'algorithme pour les montants inférieurs ou égaux à 7 ;
• modifier l'algorithme pour résoudre le même problème dans un système monétaire dans lequel on ne dispose que de pièces de 2 et de 4 ;
• proposer un autre système monétaire « viable ».

Algorithme possible

Dans le cas d'un système monétaire constitué de quelques pièces, comme dans l'énoncé précédent, l'algorithme pour réaliser un achat d'un montant S consiste à :

• payer le maximum possible avec la plus grosse pièce dont le montant ne dépasse pas S (en procédant par soustractions ou par division euclidienne) ;
• puis à continuer ainsi indéfiniment pour le montant restant à payer jusqu'à atteindre la somme souhaitée.

Travaux d'élèves (avec le logiciel Scratch) :

• Niveau 5e : Camille
• Niveau 4e : Lilian

Ces productions diffèrent essentiellement par le calcul du reste et de l'utilisation d'instructions conditionnelles : « si … » – « si … sinon … ».

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser le calcul littéral

Objectifs

Au cycle 3, l'élève a fait fonctionner de manière implicite les propriétés des opérations dans le champ des nombres, mais sans les avoir formalisées en tant que propriétés générales. Il a rencontré des formules littérales dans le cadre des apprentissages liés aux mesures de grandeurs ; la lettre y avait essentiellement valeur d'abréviation ; ainsi, la formule $A = L \times l$, est une abréviation de l'expression « aire du rectangle = longueur fois largeur » utilisée par l'élève pour effectuer directement le produit des nombres donnés pour la longueur et la largeur, sans identification explicite du processus de substitution des lettres par des valeurs numériques. L'élève a aussi appris à compléter des égalités à trou, notamment à l'occasion du travail sur les notions de différence et de quotient. Il a résolu des problèmes du premier degré sans avoir recours à la résolution d'équations, mais en agissant par tâtonnements, en ayant recours à des étapes intermédiaires avec ou sans l'aide d'outils numériques (tableur, calculatrice).

Au titre de l'entrée dans l'algèbre, l'enseignement du calcul littéral au cycle 4 vise les objectifs suivants:

- traduire le résultat de la suite des opérations d'un programme de calcul sous la forme d'une expression littérale et établir le lien entre l'aspect « procédural » et l'aspect « structural » de cette expression : ainsi, le résultat du programme de calcul « multiplier un nombre par 2 et ajouter 3 au résultat » se traduit par l'expression $2x + 3$ dont la structure est celle de la somme de 3 et du double de x ;
- décrire une propriété générale de nombres (par exemple « être la somme de deux entiers consécutifs » ou « être un multiple de 3 ») ;
- démontrer qu'une propriété est vraie dans un cadre général (par exemple les règles du calcul fractionnaire) ;
- modéliser et résoudre des problèmes à l'aide d'équations ou d'inéquations du premier degré ;
- introduire les concepts de variable et de fonction.

Liens avec les domaines du socle

Le langage algébrique permet de formuler des propriétés mathématiques et de résoudre des problèmes. À travers la pratique du calcul littéral, son apprentissage contribue donc de façon essentielle à l'objectif « comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques, scientifiques et informatiques » du domaine 1 du socle.

Les outils algébriques (lettres, fonctions) sont également utilisés pour représenter des systèmes naturels et techniques et fournir des preuves aux problèmes qu'ils engagent. Leur utilisation participe à la mise en œuvre de la démarche scientifique, en complément de l'observation, la manipulation et l'expérimentation. Le calcul littéral contribue donc fortement à l'atteinte des objectifs du domaine 4 du socle.

Progressivité des apprentissages

Ces repères de progressivité sont explicités ci-dessous selon les principaux enjeux d'apprentissage du calcul littéral au cycle 4.

Formules et expressions littérales pour généraliser, modéliser ou démontrer

Le travail initié au cycle 3 sur la production et l'utilisation de formules devient, en classe de 5e, un objectif de formation. Une formule (expression d'une relation entre des variables) ou une expression littérale (résultat d'un programme de calcul) permettent de décrire une situation générale, le recours à la lettre étant un moyen de s'abstraire de valeurs numériques particulières.

La résolution de problèmes issus de contextes variés permet de motiver la production de formules. On pourra se référer avec profit aux exemples figurant dans le document « Du numérique au littéral » publié sur Éduscol : carrés bordés, somme de multiples de 7, etc. Parallèlement à la production et à l'utilisation de formules, la familiarisation précoce avec la notion de fonction (sans faire appel à son formalisme) permet de modéliser la dépendance d'une grandeur en fonction d'une autre. La notation symbolique d'une fonction n'est introduite qu'en 3e. Elle est accompagnée de la présentation des différents registres de représentation (symbolique, numérique, graphique) et des passages de l'un à l'autre.

Transformation d'expressions littérales

Dès le début du cycle 4, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est implicitement mobilisée lors de calculs sur des nombres, en particulier en calcul mental, par exemple pour calculer 29×21.

L'intérêt, apparu à travers la résolution de problèmes, de transformer une expression numérique pour la simplifier ou l'écrire sous une forme adaptée motive d'institutionnaliser la distributivité simple sous forme littérale. Celle-ci peut s'appuyer sur l'image mentale de l'aire d'un rectangle de longueur $a + b$ et de largeur k décomposé en deux rectangles de largeur k et de longueurs respectives a et b.

Le recours à la distributivité permet ensuite de valider la réduction d'une expression littérale.

Avant d'être automatisées, les stratégies de transformation sont explicitées (par exemple $x = 1 \times x$; $-x = (-1) \times x$), pour aboutir progressivement à des calculs du type :

> $x - 2{,}7\,x = 1 \times x + (-2{,}7) \times x = \big(1 + (-2{,}7)\big) \times x = (-1{,}7) \times x = -1{,}7x.$

La transformation d'expressions littérales (d'une somme en produit ou vice versa) s'effectue dans le même esprit, à partir de la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition.

Le travail technique de développement ou de factorisation est accompagné d'une réflexion sur le choix de la forme de l'expression (somme ou produit) la mieux appropriée au problème à résoudre.

De manière générale, les tâches d'exécution (développement, factorisation, réduction) sont articulées avec des activités qui développent l'intelligence des stratégies de calcul comme l'anticipation, l'organisation, le contrôle. Les stratégies de contrôle peuvent s'appuyer sur des arguments de signe, d'homogénéité, des tests sur des valeurs numériques adéquates, etc.

Résolution d'un problème du premier degré

Pour anticiper la notion d'équation, l'élève apprend, dès le début du cycle 4, à tester une égalité à la main ou à l'aide d'un outil numérique (tableur, calculatrice), en attribuant des valeurs numériques au nombre désigné par une lettre qui figure dans l'égalité. Il apprend à compléter des opérations à trou. Il est initié aux programmes de calcul à partir de programmes dont les opérations sont réversibles et permettent de « remonter » le programme en commençant par la dernière opération. C'est le cas dans l'exemple suivant, extrait du document *Du numérique au littéral* publié sur Éduscol :

> Je pense à un nombre, je le multiplie par 3. Si je retranche 12 au résultat obtenu, j'obtiens 7,5.
> A quel nombre ai-je pensé ?

Progressivement, la recherche d'efficacité face à des problèmes plus résistants (correspondant par exemple à des programmes de calcul non réversibles), l'insuffisance de la démarche numérique face à des problèmes du type $ax + b = cx + d$, avec $a - c$ non nul et des valeurs des paramètres a, b, c, d conduisant à des solutions non entières, ou encore la nécessité d'obtenir les valeurs exactes des solutions de certaines équations motivent l'introduction de la lettre et la modélisation d'une situation par une équation ou une inéquation.

On pourra se référer à la situation *« Alice et Bertrand »* empruntée à Gérard Combier, Jean-Claude Guillaume et André Pressiat, (« Les débuts de l'algèbre au collège » publication de l'INRP) et proposée comme tâche intermédiaire.

La méthode algébrique de résolution des équations et inéquations du premier degré est explicitée en classe de 3e, en s'appuyant sur les propriétés de l'égalité ou de l'inégalité, par exemple l'invariance des solutions d'une équation par l'ajout d'une même expression à chacun de ses membres. L'utilisation du tableur et la programmation d'algorithmes permettent la résolution, au moins approchée, d'équations d'autres types.

Calcul littéral pour démontrer

Dès le début du cycle, le travail mené sur les nombres conduit à émettre des conjectures, notamment sur les propriétés des opérations entre nombres rationnels. Celles-ci peuvent être démontrées dès la classe de 5e à partir d'exemples génériques, dans des situations simples. On rappelle qu'un exemple est dit « générique » lorsqu'une propriété qu'il permet de mettre en évidence peut être étendue au cas général ; ainsi, on passe de l'exemple générique $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$ traité dès le cycle 3 à sa généralisation littérale $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ qui consiste à substituer une lettre à une valeur numérique.

Dans le cadre de la différenciation, la démonstration de l'identité $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, qui mobilise la notion de quotient, pourra être présentée aux élèves les plus à l'aise (ou en demande de justification).

Pour l'approche et la démonstration d'autres propriétés des opérations, on consultera avec profit les pages 10 à 20 du document *Le calcul numérique au collège* publié sur Éduscol.

Progressivement, l'élève perçoit les limites du calcul numérique et la nécessité de passer au calcul littéral pour prouver qu'une propriété est vraie pour toutes les valeurs de la variable (par exemple, que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3).

Stratégies d'enseignement

Le passage du numérique au littéral constitue pour l'élève une rupture importante : d'une part les symboles du calcul littéral (lettres, signe égal et ses différents statuts, signes opératoires, etc.) diffèrent de ceux du langage des nombres ; d'autre part, les types de problèmes que l'algèbre permet de résoudre sont différents de ceux résolus jusque-là. Pour résoudre un problème de ce type, l'élève avait l'habitude de progresser pas à pas depuis les données connues jusqu'à la quantité à trouver. En algèbre, il s'agit au contraire d'établir des relations entre des données connues et un résultat à trouver (l'inconnue), puis de traiter ces relations jusqu'à obtenir le résultat cherché. Il y a là un véritable renversement de pensée qui, pour être compris et assimilé par l'élève, suppose de la part de l'enseignant une vigilance particulière. Celle-ci peut notamment s'exercer à travers la vérification que la solution trouvée convient bien.

Pour motiver le recours au calcul littéral et aider les élèves à accepter une approche autre que numérique, il est essentiel qu'ils soient confrontés à des situations révélant les limites des procédures dont ils disposent déjà, basées sur des tâtonnements, des essais-erreurs ou l'utilisation d'un tableur. Ils doivent aussi prendre conscience de l'intérêt de désigner des quantités ou des grandeurs par les lettres qui leur sont traditionnellement attribuées (n pour une quantité discrète, x pour une longueur, V pour un volume) plutôt que par leur nom complet.

Les programmes de calcul constituent à la fois un moyen pertinent pour introduire la notion d'expression littérale puis d'équation, et un intermédiaire entre le volet procédural et le volet structural du calcul littéral.

Le tableur, qui permet le passage du nombre à la cellule, peut constituer un intermédiaire pertinent pour introduire la lettre et pour appréhender les notions de variable et de fonction, tout en précisant que les usages sont différents. L'algorithmique et la programmation offrent également des opportunités didactiques intéressantes.

La seule application de « règles » techniques ne permet pas de comprendre l'origine des propriétés qui les sous-tendent. La compréhension d'une formule littérale s'acquiert d'autant plus facilement qu'elle aura été anticipée sur des exemples numériques ou prendra appui sur des images mentales, par exemple celle de l'aire de deux rectangles accolés ayant une dimension en commun pour illustrer la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Le nombre de « règles » calculatoires formalisées exigibles des élèves doit rester limité. Parmi elles, la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition est utilisée dans les deux sens de lecture et invoquée aussi bien pour le développement que la factorisation d'expressions algébriques. La double distributivité, qui permet par exemple de développer une expression du type $(2x + 3) \times (4x - 7)$, est abordée dans des situations simples en mobilisant deux fois la distributivité, et les résultats sur les puissances ; cette initiation ne vise pas le développement d'automatismes.

Si certaines stratégies peuvent se révéler opérantes, il convient d'être conscient des obstacles qu'elles peuvent provoquer. Il en est ainsi de la règle des signes « moins par moins donne plus » qui confond le sens opérationnel de la soustraction et la notion d'opposé. Elle peut aussi engendrer des conceptions erronées (par exemple que $-(-x)$ est toujours un nombre positif). A contrario, la formulation explicite des propriétés utilisées (par exemple « soustraire un nombre revient à ajouter son opposé ») permet aux élèves de comprendre les manipulations qu'ils effectuent sur des expressions littérales.

Il ne suffit pas qu'une stratégie calculatoire ait été comprise pour qu'elle soit installée et mobilisable. Pour passer de la compréhension d'une propriété à la construction d'un automatisme, il est indispensable que la stratégie ait été régulièrement entretenue, par petites touches, à travers un rite d'activités rapides (questions flash, activités mentales) menées en classe dans la durée, en respectant une gradation progressive de la difficulté (qui pourra être arrêtée collectivement au sein d'un collège),

et en développant des démarches de contrôle (arguments de signe, d'homogénéité, recherche de contre-exemples, etc.).

Les exerciseurs et banques d'exercices en ligne peuvent être utilisés par les élèves en classe ou hors de la classe, de manière différenciée. Favorisant le réinvestissement et l'automatisation, ces outils peuvent aider les élèves à élaborer des stratégies mentales efficaces, à condition qu'ils permettent un traitement intelligent des erreurs, et que leur utilisation entre dans le cadre d'une planification et d'un suivi régulier par le professeur. Si des activités à prise d'initiative sont essentielles pour aider l'élève à comprendre la puissance du langage algébrique et les opportunités qu'il offre pour résoudre des problèmes d'un type nouveau, elles ne permettent pas à elles seules de construire l'habileté calculatoire attendue en fin de cycle 4. On veillera donc à maintenir un équilibre entre la construction d'automatismes (à travers un entraînement fréquent et régulier en classe ou hors de la classe) et la résolution de problèmes conduisant à mobiliser des stratégies et des techniques de calcul littéral.

Retour sur quelques obstacles

Le passage à l'algèbre correspond à un accès à l'abstraction dont on ne doit pas minimiser la difficulté. L'apprentissage du calcul littéral se heurte de façon naturelle à un certain nombre d'obstacles. Les professeurs aideront d'autant mieux leurs élèves à les surmonter qu'ils en auront une connaissance fine.

Les différentes significations du signe « égal »

Les élèves rencontrent le signe « $=$ » très tôt dans leur scolarité, mais à l'école élémentaire le signe « $=$ » est l'annonce d'un résultat. Ainsi, dans l'égalité $8 + 5 = 13$, le signe « $=$ » est lu comme « cela donne » ou « cela fait ». Il est alors orienté de la gauche vers la droite et n'est pas perçu comme le symbole d'une relation symétrique et transitive. Cette signification correspond à celle de la touche « ENTER » des calculatrices. Dès le cycle 2, à travers des activités de calcul mental ou en ligne, les élèves sont amenés à utiliser le signe « $=$ » dans l'autre sens, par exemple $5 \times 36 = 5 \times 2 \times 18$ ou $21 = 4 \times 5 + 1$. Les décompositions additives ou multiplicatives sont choisies en fonction de leur intérêt pour résoudre une classe spécifique de problèmes. Ainsi, la décomposition additive du nombre 42 sous la forme $42 = 30 + 12$ facilite le calcul de $42 - 12 + 3$, alors que sa décomposition multiplicative $42 = 3 \times 2 \times 7$ permet de factoriser l'expression littérale $3a + 42$. L'incapacité de certains élèves à factoriser cette dernière expression peut provenir, non pas d'une méconnaissance du processus de la factorisation, mais d'un manque d'habitude à écrire des décompositions numériques.

À travers la pratique du calcul littéral, le signe « $=$ » acquiert trois autres significations :

- il est utilisé pour rendre compte de l'universalité d'une égalité, traduisant que, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, les valeurs retournées par les expressions figurant de part et d'autre du signe « $=$ » sont égales. On parle alors d'identité ;
- il est utilisé comme symbole d'affectation, comme en informatique, lorsqu'on se propose de calculer l'expression $(a + 2b)^2$ pour $a = 1$ et $b = -0{,}5$;
- en rupture avec chacune de ces significations qui sous-entendent qu'une certaine propriété est vraie (même si c'est dans des conditions différentes), le signe « $=$ » acquiert un statut tout autre dans l'écriture d'une équation. Au lieu d'être utilisé pour écrire des égalités vraies, le signe « $=$ » apparaît alors dans des énoncés dans lesquels, en remplaçant la lettre par un nombre, on obtient une égalité qui, selon la valeur de ce nombre, est soit vraie, soit fausse. Le but de la résolution est de trouver toutes les valeurs (et rien qu'elles) qui, substituées à l'inconnue, rendent l'égalité vraie.

Les différents statuts de la lettre

Au cycle 3, la lettre est utilisée pour différentes finalités :

- symboliser une unité (m, g, h, s, etc.) ;
- désigner un objet mathématique (le point A, le nombre π) ;
- désigner dans une formule la mesure d'une grandeur ($A = L \times l$; $P = 2\pi\ R$).

Au cycle 4, la lettre acquiert de nouveaux statuts qu'il convient de bien différencier :

- le statut de variable, qui apparaît à la fois dans les formules (ainsi, dans l'égalité $P = 2\pi\ R$, la valeur du périmètre P dépend des valeurs attribuées à la variable R) et dans l'expression symbolique $x \to f(x)$ d'une fonction. L'utilisation du tableur peut faciliter la compréhension de la notion de variable dans la mesure où, dans l'édition d'une formule, ce sont les adresses des cellules (et non leur contenu) qui sont prises en compte. La modification du contenu d'une cellule désignée dans une formule modifie le contenu de la cellule où est implantée la formule, ce qui permet d'appréhender les notions de variable et de fonction ;
- le statut d'indéterminée, qui apparaît dans des identités où la lettre représente des nombres quelconques. Il importe que la valeur d'universalité de ces identités apparaisse dans l'environnement de l'égalité, sous une forme accessible aux élèves, par exemple, en écrivant : « Pour toutes valeurs des nombres k, a, b l'égalité $k(a + b) = ka + kb$ est vraie » ;
- le statut d'inconnue, qui heurte l'habitude de penser qu'une égalité est « toujours » vraie. La compréhension de ce qu'est une solution d'une équation nécessite de recourir à des tests de la valeur de vérité de l'égalité en affectant à l'inconnue différente valeur numériques. Dès le début du cycle, le recours à une démarche par essais et ajustements et l'utilisation d'un tableur pour tester des valeurs permettent d'introduire progressivement la notion de solution d'une équation. Les limites des méthodes par tâtonnement ou par « remontée » des programmes de calcul permettent de justifier l'étude des techniques de résolution des équations du premier degré ;
- le statut de paramètre, qui conserve une valeur fixe, mais de portée générale. C'est par exemple le rôle de la lettre a lorsqu'elle représente le coefficient de la fonction linéaire $\mathrm{x} \mapsto \mathrm{ax}$. De même en physique, pour exprimer à partir de la formule $\mathrm{P} = \mathrm{UI}$ la puissance P en fonction de l'intensité I pour une tension U donnée, la lettre U a le statut de paramètre alors que la lettre I a celui de variable.

Il convient donc d'attirer régulièrement l'attention des élèves sur le statut du signe « $=$ » ou des lettres utilisées, selon la situation considérée.

Les parenthèses

Les parenthèses sont des séparateurs de blocs de calcul qui jouent un rôle essentiel dans la construction d'expressions numériques ou littérales. Des parenthèses redondantes, par exemple dans une expression du type $(2\mathrm{x} + 1) + (3 \times (-\mathrm{x}))$, peuvent aider l'élève à comprendre la structure de l'expression et l'ordre dans lequel les opérations sont à effectuer. La maîtrise des règles de priorité des opérations lui permettra progressivement de s'en affranchir. En 3e s'ajoute un nouveau rôle des parenthèses, dans l'écriture symbolique d'une fonction.

Rôle des logiciels

L'utilisation de logiciels, dans le cadre de la résolution de problèmes, favorise la construction progressive des notions de variable et de paramètre. Ainsi, la référence absolue ou non à une cellule dans l'écriture d'une formule sur le tableur permet de distinguer ce qui varie de ce qui est fixé ; les variables utilisées dans les algorithmes, en particulier dans les boucles, participent du même objectif, de même que l'utilisation d'un curseur en géométrie dynamique.

L'utilisation raisonnée d'un logiciel de calcul formel peut aider à mettre en évidence le rôle des parenthèses dans l'expression d'une fonction.

Enfin, l'utilisation de logiciels, en classe ou en dehors de la classe, est un levier majeur pour la recherche et l'émission de conjectures que le calcul littéral permettra ensuite de démontrer.

La résolution algébrique d'un problème est souvent articulée selon trois phases : une phase de recherche et de modélisation de la situation, une phase de traitement formel (transformation, résolution) sans lien avec le contexte initial, une phase de communication pour restituer la solution et la vérifier. Assumer successivement les deux premières phases constitue une charge de travail importante pour un débutant. L'utilisation d'un logiciel de calcul formel par les élèves n'ayant pas une habileté technique suffisante, peut leur permettre de différer le travail technique, si l'objectif est de mettre l'accent sur l'usage de l'algèbre comme outil de mathématisation de l'énoncé.

Rôle de l'oral

L'écriture mathématique est très condensée et contient souvent des procédures implicites que seule la formulation orale, véritable « dépliement de la pensée », permet de mettre en évidence.

Illustrons cette affirmation sur l'exercice suivant, qui consiste à développer et réduire l'expression $3x(2x-1)-(x^2-7)$.

Le traitement, qui pourrait être écrit dans un cahier d'élève, tient en quelques lignes :

$$3x(2x-1)-(x^2-7)=6x^2-3x-(x^2-7)=6x^2-3x-x^2+7=5x^2-3x+7.$$

Or, pour aboutir au résultat, il est nécessaire :

- de comprendre la structure de l'expression initiale ;
- de savoir que $3x(2x-1)=3x\times(2x-1)$;
- de reconnaître les blocs de calcul intermédiaires ;
- d'appliquer la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction ;
- de savoir que $3x\times 2x=3\times x\times 2\times x=3\times 2\times x\times x$;
- que $x\times x=x^2$;
- de connaître la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction ;
- la priorité des opérations
- de comprendre pourquoi on ne peut pas réduire davantage $5x^2-3x+7$, etc.

On mesure sur cet exemple tout le profit qu'il pourrait y avoir à compléter la trace écrite par une trace orale, par exemple sous forme d'enregistrements audio mis à la disposition des élèves.

De même, la résolution d'une équation du type $2x=6$ sera plus accessible pour un élève fragile si elle est formulée en langage naturel (« trouver une quantité dont le double vaut 6 »).

Différenciation

Permettre à tous les élèves d'accéder à la fin du cycle 4 aux connaissances et aux compétences fixées par le programme est une exigence du socle commun. Les apprentissages liés au calcul littéral requièrent de ce point de vue une attention particulière. En effet, l'accès au formalisme et à l'abstraction constitue une marche particulièrement élevée pour les élèves fragiles. Cependant, leur activité algébrique ne saurait se résumer à l'acquisition de techniques calculatoires. Il importe qu'ils soient confrontés à la résolution de problèmes, même s'ils ne maîtrisent pas toutes les techniques intervenant dans leur résolution. La différenciation pourra alors reposer sur des choix particuliers de variables didactiques (solutions entières, décimales ou fractionnaires, programmes de calcul réversibles ou pas, attribution de valeurs numériques à certains paramètres, etc.). L'acquisition des techniques calculatoires et leur automatisation seront d'autant plus efficaces qu'elles seront adossées à des représentations porteuses de sens, souvent issues de la résolution de problèmes.

Il convient aussi de laisser vivre, de façon différenciée et aussi longtemps que nécessaire pour certains élèves, des procédures de tâtonnement ou faisant appel à la manipulation, l'expérimentation, la schématisation ainsi que les formulations intermédiaires, même maladroites ou peu rigoureuses, tout en indiquant les limites de ces formulations.

Pour permettre l'accès de tous les élèves à l'abstraction de la démarche algébrique, il est essentiel de les amener à exprimer ce qu'ils ont compris et de repérer ce qui les met en difficulté. La déstabilisation des conceptions erronées se fait en cherchant des contre-exemples. La reconstruction des connaissances visées passe ensuite par l'explicitation orale des procédures mises en œuvre, leur comparaison, l'analyse des erreurs, etc.).

Symétriquement, et toujours dans le cadre d'une différenciation pédagogique, les élèves les plus habiles peuvent être confrontés à des problèmes qui ne sont pas du premier degré, mais qui s'y ramènent, par exemple en factorisant des équations produits à l'aide d'identités remarquables.

Exemples de situations d'apprentissage

Classes de problèmes

- modélisation de situations d'origine arithmétique ou géométrique ;
- modélisation de situations faisant intervenir des grandeurs physiques ;
- résolution de problèmes se ramenant à des équations ou des inéquations du premier degré ;
- généralisation de propriétés des nombres rationnels ;
- démonstration de propriétés générales portant sur les nombres rationnels ;
- programmes de calcul.

Exemples d'activités

- Exemples de questions flash : Activités mentales
- Exemples de tâches intermédiaires :
  - Le nombre d'Alice et Bertrand
  - Le magicien
- Exemples d'activités avec prise d'initiative
  - Les carrés bordés
  - Le calendrier

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder le calcul littéral avec les élèves. Certains de ces documents ont été produits dans le cadre de l'accompagnement de programmes de mathématiques antérieurs. À ce titre, ces ressources s'inscrivent dans un contexte pédagogique désormais ancien. Néanmoins, elles proposent des éléments toujours pertinents sur le calcul littéral.

- Rapport d'étape sur le calcul - commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques
- Du numérique au littéral
- Le calcul numérique au collège
- Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée
- Les débuts de l'algèbre au collège, par Gérard Combier, Jean-Claude Guillaume et André Pressiat, publication de l'INRP
- Sur la place de l'oral en mathématiques

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser le calcul littéral

Exemples de questions flash
Activités mentales

ATTENDU DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Utiliser le calcul littéral.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Représenter, calculer, communiquer

Énoncés

1. Répartir si possible les expressions suivantes dans le tableau (x est un nombre quelconque) :

$A = x^2 + 4$ $\quad B = (2x + 3)^2$ $\quad C = 4x^2$ $\quad D = 1 + x^2$ $\quad E = (5x)^2 + 3^2$

CARRÉ D'UNE SOMME	CARRÉ D'UN PRODUIT	SOMME DE CARRÉS	PRODUIT DE DEUX CARRÉS

2. Lorsque cela est possible, écrire plus simplement les expressions suivantes (*x, y, a* et *b* sont des nombres quelconques ; dans la troisième série, *a* est différent de zéro) :

1ERE SÉRIE	2E SÉRIE	3E SÉRIE
a) $0 + x$	a) $x + x$	a) $a^3 \times \frac{a}{3}$
b) $1 \times x$	b) $y - y + y$	b) $a \times b \times a \times b$
c) $0 \times x + x \times 1$	c) $x^2 + x^2$	c) $\frac{x}{1} + \frac{0}{1}$
d) $(x + y) \times (0 + 1)$	d) $\frac{a}{4} \times \frac{a}{4}$	d) $x \times x \times 1 \times x$
e) $0 \times x \times x^2$	e) $a \times b + b \times a$	e) $2 \times \frac{a^2}{a}$
f) $y \times 1 - x \times 0$	f) $\frac{x}{3} \times \frac{y}{5}$	f) $\frac{a^3}{3 \times a^2}$

3. Vrai ou faux ?
Chaque situation proposée sans quantification pourra ouvrir sur un débat dans la classe. On peut aussi modifier la consigne en ajoutant devant chaque égalité « Quel que soit le nombre x (ou a, b, t, y, etc.) »

1ERE SÉRIE	2E SÉRIE	3E SÉRIE
a) $x \times 0 = 0$	a) $a \times 2 \times b = a2b$	a) $x \times \frac{1}{7} \times x = \frac{x^2}{7}$
b) $x \times x = 2x$	b) $3 \times t = 3t$	b) $3 - (x + 2) = 3(x + 2)$
c) $2 + 2x = 4x$	c) $5 + x = 5x$	c) $7 \times (x - 8) = 7x - 8$
d) $x + x = x^2$	d) $\frac{3}{4} \times x = \frac{3x}{4}$	d) $(1 + x)^2 = (1 + x) \times (1 + x)$
e) $x \times 1 = x$	e) $(5x)^2 = 5x^2$	e) $(7 + x) \times (8 + y) = 7x + 8y$
	f) $-2x + 4x = -6x$	

4.

a) Que montrent les écritures suivantes du nombre 36 ?
- $36 = 18 \text{ x } 2$
- $36 = 2^2 \times 3^2$
- $36 = 17 + 19$
- $36 = 3 \times 12$

b) Donner une écriture du nombre 27 montrant que :
- c'est un nombre impair
- c'est un multiple de 3
- c'est la somme de deux entiers consécutifs
- c'est le produit de deux sommes
- c'est la somme de deux produits

c) n et k sont des nombres entiers. Que peut-on dire d'un nombre entier qui s'écrit sous la forme :
- $2n$?
- $2k + 1$?
- $n^2 + k^2$?
- $7k$?

5.

LORSQUE CELA EST POSSIBLE, ÉCRIRE SOUS LA FORME D'UNE SOMME :	LORSQUE CELA EST POSSIBLE, ÉCRIRE SOUS LA FORME D'UN PRODUIT :
a) $3(2+a)$	a) x^2-5x
b) $5x(1-x)$	b) $3+2x$
c) $\frac{4p+3}{7}$	c) $a-7a^2$
	d) $6t^2+3t$

6. Compléter les égalités suivantes
   a) $3\times \ldots = 8$
   b) $12-\ldots = -3$
   c) $7\times \ldots + 4 = 46$
   d) $32-3\times \ldots = 11$
   e) $29+4\times \ldots = 3$

7. Résoudre les équations suivantes
   a) $7x = 11$
   b) $\frac{3}{x} = \frac{7}{8}$
   c) $x+4 = -3$
   d) $5x-8 = x$
   e) $2x-5 = 8$
   f) $x+3 = 1-2x$

8. Pour résoudre un problème, on a effectué successivement les opérations suivantes. Remplacer ces calculs séparés par une seule expression donnant le même résultat final.

   a) $4\times 7 = 28$
   $28-5 = 23$
   $23\div 2 = 11{,}5$

   b) $3+4 = 7$
   $40-7 = 33$
   $33\times 5 = 165$

   c) $7+12 = 19$
   $13{,}5-5 = 8{,}5$
   $19\times 8{,}5 = 161{,}5$

9. *Programmes de calcul.* Les programmes A et B peuvent être résolus mentalement ; C nécessite une recherche écrite.

PROGRAMME A	PROGRAMME B	PROGRAMME C
• Choisir un nombre. • Le multiplier par 7. • Ajouter (-5) au résultat. • On obtient 9, de quel nombre est-on parti ?	• Choisir un nombre. • Lui retrancher 4. • Multiplier le résultat par 3. • On obtient 15, de quel nombre est-on parti ?	• Choisir un nombre. • Lui ajouter (-2). • Multiplier le résultat par le nombre de départ. • Ajouter 3 au nouveau résultat. • On obtient 11, de quel nombre est-on parti ?

Pistes pédagogiques

Les situations proposées ci-dessus donnent un aperçu de la variété des exercices qu'il est possible de proposer sous forme d'activités mentales. Les énoncés sont donnés successivement ; les élèves sont invités à n'écrire que la réponse, la démarche nécessaire à la résolution de l'exercice étant gérée mentalement. Une phase de mise en commun permet ensuite, lors d'un débat dans la classe, de valider ou d'invalider les réponses fournies.

Via les activités mentales, on peut aisément travailler des situations qui nécessitent des changements de registres (langagier, numérique, algébrique, etc.). Une pratique régulière, sur toute la durée du cycle 4, de situations articulant ces différents registres, favorisera la compréhension des objets du calcul littéral.

Les temps de mise en commun succédant à la recherche individuelle fourniront aux élèves l'occasion de formuler leurs démarches et contribueront au repérage et au traitement des erreurs liées à une compréhension non aboutie.

Dans ce type d'activité, une différenciation peut aisément s'opérer en faisant varier les types de nombres (entiers, relatifs, décimaux, fractions) mis en jeu, mais aussi le nombre et la difficulté des procédures algébriques dont la mobilisation est nécessaire.

La pratique régulière d'activités mentales sur toute la durée du cycle 4 permet de construire des automatismes de calcul littéral. Ces automatismes ont vocation à être mis au service de la résolution de problèmes ou de la démonstration, et non à être une fin en soi.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

Utiliser le calcul littéral

Un exemple de question à prise d'initiative

Le calendrier

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser le calcul littéral.

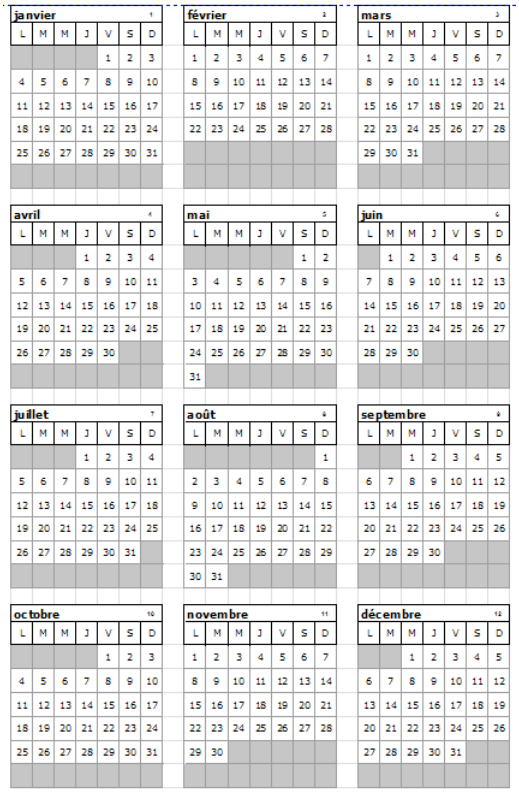
- Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, modéliser, représenter, raisonner.

Énoncé

On peut grouper les cases de chaque mois de ce calendrier en carrés de différentes tailles (voir image agrandie en fin de document).



janvier						
L	M	M	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

février						
L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

mars						
L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

avril						
L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

mai						
L	M	M	J	V	S	D
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

juin						
L	M	M	J	V	S	D
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

juillet						
L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

août						
L	M	M	J	V	S	D
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

septembre						
L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

octobre						
L	M	M	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

novembre						
L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

décembre						
L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

En dessiner quelques uns de taille donnée (on pourra commencer par des carrés de 3 jours sur 3 jours). Pour chacun d'eux, calculer la différence entre les produits des deux nombres situés aux extrémités des diagonales.
Que constate-t-on ? Démontrer le résultat observé.

Pistes pédagogiques

Les élèves font plusieurs essais, sur des carrés d'une même taille pouvant être pris dans des mois différents ; les deux valeurs possibles (selon l'ordre dans lequel on effectue le calcul) émergent facilement. La démonstration passe par la modélisation et la réduction de l'expression algébrique correspondant à la différence entre les produits des nombres situés aux extrémités des diagonales. La simplification de l'expression obtenue requiert une double attention : d'une part, le développement du produit des deux sommes suppose deux utilisations successives de la distributivité simple, d'autre part, les produits sont séparés par un signe « moins ». Cette difficulté peut nécessiter de revenir à ce que signifie « soustraire une somme ».

Quelques pistes de différenciation

- travailler sur des carrés de taille 4 × 4, puis 5 × 5 ;
- généraliser en cherchant la valeur du résultat pour des carrés de taille $a \times a$;
- travailler sur des carrés dont les côtés ne sont pas parallèles au bord de la feuille, ou sur des rectangles ;
- travailler sur un tableau de nombres de même type mais plus grand, par exemple à 50 colonnes et 50 lignes.

janvier 1

L	M	M	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

février 2

L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

mars 3

L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

avril 4

L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

mai 5

L	M	M	J	V	S	D
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

juin 6

L	M	M	J	V	S	D
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

juillet 7

L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

août 8

L	M	M	J	V	S	D
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

septembre 9

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

octobre 10

L	M	M	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

novembre 11

L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

décembre 12

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser le calcul littéral

Un exemple de question à prise d'initiative

Les carrés bordés

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser le calcul littéral.

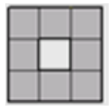
- Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

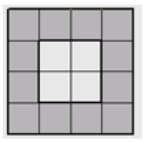
Chercher, représenter, raisonner, calculer, communiquer

Énoncé

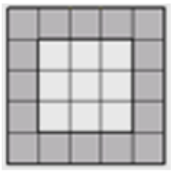
Pierre joue avec des carreaux de mosaïque. Il dispose ses carreaux gris autour de différents carrés formés de carreaux blancs. En voici quatre.



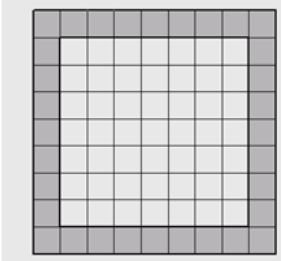
Carré Taille 1



Carré Taille 2



Carré Taille 3



Carré Taille 7

1. Combien y a-t-il de carreaux gris entourant le carré blanc de taille 1 ? Celui de taille 2 ? Celui de taille 3 ?
2. Produire un calcul qui donne le nombre de carreaux gris entourant un carré blanc de taille 7, puis de taille 56.
3. Expliquer par une phrase ou par un programme de calcul comment on peut calculer le nombre de carreaux entourant un carré de n'importe quelle taille.
4. Si on double le côté du carré blanc, double-t-on le nombre de carrés gris de la bordure ? Toujours ? Jamais ? Dans certains cas ? Si oui, lesquels ?
5. Peut-on obtenir des bordures de 100, 150, 200, 250 carreaux ?
6. Etant donné un nombre de carreaux gris, peut-on savoir s'il correspond au nombre exact de carreaux d'une bordure ?

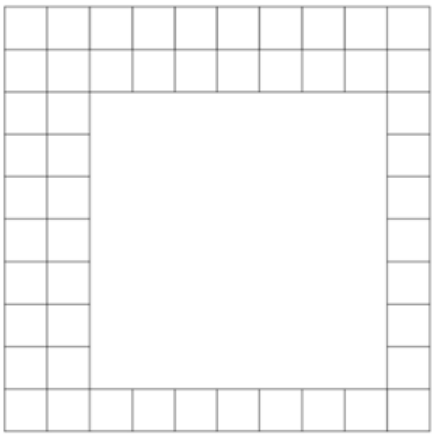
Pistes pédagogiques

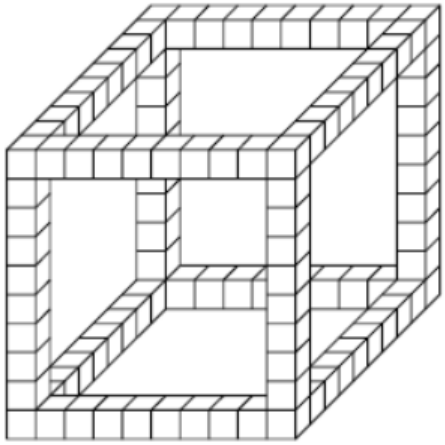
Les questions 1) et 2) peuvent être proposées dès la classe de 5e, la question 2) étant un travail numérique permettant l'anticipation de l'introduction d'une lettre.
La suite de l'activité peut être soumise aux élèves à partir de la classe de 4e.
Dès le carré blanc de taille 7, les élèves vont être conduits à remplacer le simple comptage par des stratégies de dénombrement qui donneront lieu aux généralisations.
La question 3) vise à produire des formules (aspect fonctionnel du calcul formel par opposition avec la mise en équation) correspondant à différentes stratégies de dénombrement. La variété des formules produites au sein de la classe crée le besoin de s'assurer de leur validité en transformant leurs écritures à partir de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Si n désigne la taille du carré blanc et N le nombre de carreaux gris, citons, parmi les formules possibles :

- $N = 4\,n + 4$;
- $N = 2n + 2(n + 2)$;
- $N = 2(n + 1) + n + n + 2$;
- et en classe de 3e $N=(n + 2)^2 - n^2$.

Cette situation offre des possibilités de différenciation (destinée aux élèves les plus rapides), par exemple en utilisant l'une ou l'autre des deux figures de base ci-dessous :





Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser le calcul littéral

Un exemple de tâche intermédiaire

Le nombre d'Alice et Bertrand

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Utiliser le calcul littéral.
- Mettre un problème en équation en vue de sa résolution ;
- Développer une expression algébrique.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Modéliser, calculer.

Énoncé

Deux élèves, Alice et Bertrand, ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur leur calculatrice. Alice multiplie le nombre affiché par 2,1 puis retranche 0,4 au résultat obtenu. Bertrand, lui, multiplie le nombre affiché par 1,3 puis ajoute 0,1 au résultat obtenu. Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

Pistes pédagogiques

Inspirée d'une activité extraite de l'ouvrage « Les débuts de l'algèbre au collège », INRP 1996, cette situation, centrée sur la mise en équation d'un problème du premier degré, a deux objectifs :

- modéliser un problème à l'aide d'une équation du type $ax + b = ax + d$. Il s'agit de repérer la grandeur (le nombre d'Alice et Bertrand) qui va être remplacée par une lettre et donner lieu à l'égalité de deux expressions.
- développer et réduire une expression littérale contenant des nombres décimaux.

Cette situation permet une différenciation pédagogique par la modification possible des variables didactiques (les coefficients a, b, c, d de l'équation à résoudre) selon l'objectif fixé et les aptitudes des élèves.

Ainsi, pour $a = 3$, $b = 4$, $c = 2$, $d = 7$, la solution (3) est facilement accessible par essais et ajustements.

Pour $a = 7$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 15$, la solution (2,4) est accessible en procédant par essais et ajustements, mais plus difficilement.

Pour $a = 26$, $b = 22$, $c = 6$, $d = 149$, la recherche à la main de la solution (6, 35) par essais et ajustements devient plus problématique. Elle est possible à l'aide d'un tableur, à condition de bien gérer les essais.

Pour $a = 11$, $b = 5$, $c = 4$, $d = 9$, la solution 4/7 est inaccessible à la main, et un tableur ne pourra en donner qu'une valeur décimale approchée.

Si on veut mettre l'accent sur la modélisation, tout en conservant les nombres de l'énoncé, on pourra utiliser un logiciel de calcul formel pour la transformation de l'équation et sa résolution technique.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser le calcul littéral

Un exemple de tâche intermédiaire

Le magicien

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Utiliser le calcul littéral
- Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture
- Mettre un problème en équation en vue de le résoudre.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Représenter, raisonner, calculer

Énoncé

Le magicien : « Pensez à un nombre, multipliez-le par 2, enlever 3, multipliez le résultat par 3 et enlevez le nombre de départ. Quel est le nombre que vous obtenez ? »
Un spectateur : « 31 »
Le magicien : « Le nombre pensé au départ est ... »
Un spectateur : « C'est exact »

Quelle était la réponse du magicien ?

Pistes pédagogiques

Il s'agit, par cette activité, de permettre aux élèves de dépasser le travail sur le calcul numérique et de saisir l'intérêt du calcul littéral comme représentation de calculs numériques équivalents. L'usage du tableur permet dans un premier temps de passer d'une suite d'instructions à une expression numérique puis littérale.

La forme réduite de l'expression pourra être obtenue dans un premier temps en observant la régularité des résultats produits.
Le développement et la réduction de l'expression reposent essentiellement sur la distributivité.

La résolution de l'équation ne pose pas de difficulté particulière.

Prolongement possible : comment le magicien procède-t-il ?

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les fractions

Objectifs

Au cycle 3, l'élève a découvert la notion de fraction en explorant progressivement différentes conceptions possibles et différents contextes : partage de l'unité, partage de grandeurs, repérage sur une demi-droite graduée, encadrement entre deux entiers consécutifs, expression d'une part d'une quantité, mesures (longueurs, aires). Il a été amené à donner du sens aux nombres décimaux à partir de leur désignation sous forme de fractions décimales ou de somme de fractions décimales. Il a perçu la fraction comme le quotient de deux nombres entiers. Il a utilisé la fraction pour résoudre des problèmes.

Au cycle 4, on s'intéresse au quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres a et b, $b \neq 0$, quelconques, défini comme le nombre dont le produit par b vaut a. Le professeur prendra conscience que cette définition n'est pas d'accès facile, et pourra proposer aux élèves de chercher comment la reformuler.

La « vision-partage » de la fraction continue à être mobilisée. Le terme « vision-partage » est à comprendre au sens où, par exemple, la fraction $\frac{7}{4}$ évoque ce qui est obtenu en partageant l'unité en 4 parts égales et en reportant 7 de ces parts, ce qui correspond d'ailleurs à la lecture sept quarts ($\frac{7}{4}$ c'est 7 fois le quart de l'unité).

L'articulation entre nombres décimaux et fractions est renforcée afin d'assurer la maîtrise de l'écriture de position et des différentes désignations d'un nombre. Progressivement, l'élève est amené à mobiliser la « vision-nombre » de la fraction pour résoudre des problèmes, en lien notamment avec la proportionnalité, pour effectuer des calculs et des comparaisons sur les fractions et les quotients, pour exprimer une fréquence ou une probabilité, pour donner un ordre de grandeur d'un résultat.

Le terme « vision-nombre » est donc à comprendre au sens où, par exemple, le quotient $\frac{7}{4}$ est le nombre dont le produit par 4 vaut 7 et peut être mobilisé, par exemple, pour prouver que $\frac{7}{4} = 7 \times \frac{1}{4}$.

Le document « Le calcul numérique au collège » proposait, pages 11 et 12, de démontrer, dans le cas général, la propriété relative à la somme de deux quotients de même dénominateur, à savoir $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$, pour tous nombres a, b et c, $c \neq 0$. Une telle démonstration ne peut être travaillée dans sa forme générale qu'avec certaines classes ou certains groupes d'élèves, dans une perspective d'approfondissement. Mais l'élaboration d'un raisonnement utilisant des exemples génériques peut venir en appui d'une remédiation.

La mise en place de techniques de calcul s'appuie en permanence sur le sens et la résolution de problèmes, notamment en liaison avec les autres disciplines scientifiques.

La définition d'un nombre rationnel comme nombre pouvant s'écrire comme quotient d'entiers permet de travailler simultanément sur des entiers, des décimaux, des relatifs et des fractions, sans ordre

particulier entre eux, en construisant ainsi les attendus de fin de cycle 4 relatifs à la notion de divisibilité et aux nombres rationnels.

Liens avec les domaines du socle

La production et l'utilisation de différentes représentations d'une fraction (décompositions additives, multiplicatives, cas des fractions décimales, repérage sur une droite graduée) permettent de conduire intelligemment un calcul mental, posé ou instrumenté (domaine 1). L'explication d'un tel calcul, à l'oral ou à l'écrit, pour valider la démarche qui lui correspond ou montrer son efficacité conduit à argumenter pour convaincre (domaine 3).

La résolution de problèmes issus des sciences et techniques mettant en jeu des fractions (reconnaissance d'une situation de proportionnalité, évaluation d'une proportion, d'un pourcentage, traitement de données statistiques, contrôle de la vraisemblance de résultats) favorisent la compréhension du monde (domaines 4 et 5).

Progressivité des apprentissages

Tout au long du cycle 4, on entretient la « vision-partage » de la fraction. La « vision-nombre » de la fraction est progressivement construite et mobilisée :

- dès le début du cycle, l'élève calcule et compare des proportions, des fréquences ;
- dès le début du cycle, l'élève est entraîné à reconnaître des fractions égales, à raisonner pour justifier que des quotients sont égaux, qu'un quotient est un nombre rationnel ou non, qu'une fraction est décimale ou non ;
- dès le début du cycle, l'élève est conduit à additionner, soustraire et multiplier par un entier des fractions de signe quelconque ;
- progressivement, l'élève est conduit à additionner, soustraire, multiplier et diviser des quotients ; à identifier, exprimer sous différentes formes et/ou justifier qu'un nombre est l'inverse d'un autre ; la progressivité repose principalement sur la nature des nombres mis en jeu ;
- en classe de troisième, l'élève aborde la notion de fraction irréductible.

Stratégies d'enseignement

Les « activités mentales » (calcul mental, autres types de questions flash) contribuent à la construction du sens (« vision-partage » et « vision-nombre » de la fraction) et des automatismes sur les opérations et les comparaisons. Ainsi, il convient, tout au long du cycle 4, de :

- développer la capacité à comparer des nombres sans recourir à une technique chaque fois qu'une comparaison raisonnée peut être réalisée : positionnement des fractions par rapport à des entiers, ordre de grandeur, simplification des fractions pour les rendre facilement comparables ;
- mettre en place la technique de comparaison liée à la réduction au même dénominateur ;
- faire prendre conscience du fait qu'il est possible d'intercaler une infinité de nombres rationnels entre deux nombres rationnels donnés.

Sur la durée du cycle, les activités mentales permettent aussi de réactiver des savoirs et savoir-faire ; elles peuvent concourir à une évaluation diagnostique.

Ainsi, par exemple, dès le début du cycle, avant la première séquence sur les fractions, un « Vrai ou Faux » du type suivant permet de réactiver les attendus de fin de cycle 3 :

- $\frac{3}{11}+\frac{8}{11}=1$;
- $\frac{2}{9}+\frac{8}{9}<1$;
- il existe plus de 100 quotients, compris entre 1 et 2, ayant 6 comme dénominateur ;
- sept segments de longueurs respectives $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{7}$; ... ; $\frac{7}{7}$ alignés bout à bout forment un segment de longueur 4.

Un tel exercice, à vocation diagnostique, peut utilement être intégré dans une « stratégie » d'évaluation et exploité au service de la formation de tous les élèves, par exemple selon le « schéma » suivant :

1. passation du « vrai ou faux » ;
2. collecte des réponses des élèves (en classe ou « hors du temps de classe » au collège via l'ENT en utilisant un l'outil « formulaire », par exemple) ;
3. traitement statistique des réponses et identification des erreurs ;
4. remédiation différenciée ;
5. nouveau temps d'évaluation diagnostique (on répète les étapes$1.$ à $3.$, le $1.$ pouvant prendre une forme différente : calcul mental, autre type de question flash) ;
6. test dans le devoir bilan suivant, entre autres, de ce qui a fait l'objet de l'évaluation diagnostique puis d'une remédiation ;
7. réactivation, au long de l'année, en fonction des besoins des élèves.

Le travail sur l'erreur s'appuie sur un retour au sens, en lien avec la définition du quotient, les ordres de grandeur, la production d'exemples et de contre-exemples et l'apprentissage du raisonnement.

L'oral constitue une aide à la compréhension et participe du traitement de l'erreur (verbalisation de décompositions additives ; mise en œuvre de la définition du quotient ; identification, explication puis rectification d'une erreur).

Ainsi, par exemple, à l'occasion de la résolution d'un problème de partage, quelques élèves ont écrit : « $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{3}{7}$ ». Un travail sur l'erreur doit alors être conduit et porter sur le sens. Il peut consister en :

- *un contrôle du résultat*
  modalité pédagogique : question/relance (doute, usage de la calculatrice) du professeur lors de la production écrite ;
- *un questionnement sur la vraisemblance du résultat* (comparaison de $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{7}$ puis question : « en ajoutant un nombre positif à $\frac{1}{2}$, est-il raisonnable de trouver $\frac{3}{7}$? »)
  modalité pédagogique : débat en classe ;
- *l'élaboration de la preuve* du fait que $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\neq\frac{3}{7}$ (mise en œuvre de la définition du quotient de deux nombres, par exemple en faisant calculer le produit de l'un et l'autre des deux membres de l'égalité par 70 – lien avec l'arithmétique)
  modalité pédagogique : production écrite individuelle hors du temps de classe ;

- *un approfondissement* : « peut-on trouver une fraction $\frac{a}{b}$ telle que $\frac{1}{2}+\frac{a}{b}=\frac{1+a}{2+b}$? » (production d'exemples)
  modalité pédagogique : en classe, réflexion individuelle, travail en groupes, à l'oral : présentation des résultats du groupe par un rapporteur.

Différenciation

Dans ce thème, la différenciation peut notamment consister en :

- un accompagnement spécifique que ce soit pour des travaux en classe ou hors la classe ;
- une action sur les variables didactiques dans le cadre de la résolution de problèmes (exemple : s'il s'agit de calculer le complément à 1 de la somme de deux fractions, selon que l'on choisisse $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ ou encore $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}$, le degré de technicité varie ce qui peut conduire à proposer tel ou tel cas à différents élèves en fonction de leurs besoins) ;
- l'élaboration de la preuve d'un résultat général, propriété (somme, produit ou quotient de deux fractions, par exemple) ou solution d'un problème (voir la tâche intermédiaire « Vitesse moyenne lors d'un aller-retour », par exemple), à l'aide d'un exemple générique ; la démonstration dans le cas général pouvant faire l'objet d'un prolongement proposé à certains élèves.

Exemples de situations d'apprentissage

Classes de problèmes

- Activités mentales
- Programmes de calcul
- Problèmes de partage, de repérage
- Calcul sur les mesures de grandeurs (longueurs, aires, volumes, angles, durée, vitesse, masse)
- Problèmes de construction
- Reconnaissance de situations de proportionnalité

Exemples d'activités

- Exemples de questions flash :
  - Exemple 1 : « Vision-partage » de la fraction
  - Exemple 2 : Calcul avec les fractions
  - Exemple 3 : sens du quotient
  - Exemple 4 : travail sur l'erreur
- Exemple de tâche intermédiaire : Vitesse moyenne lors d'un aller-retour
- Exemple d'activité avec prise d'initiative : Âge moyen

Interdisciplinarité

L'interdisciplinarité donne du sens et constitue un levier pour l'apprentissage.

L'emploi des fractions dans les modèles de proportionnalité, le traitement statistiques de données, le calcul de probabilités et le champ des grandeurs et mesures doit conduire à placer les élèves devant des problèmes relevant de ces champs et issus des disciplines scientifiques ainsi que du monde économique et de la vie quotidienne.

Des EPI portant sur les thématiques « Monde économique et professionnel », « Transition écologique et développement durable », « Sciences, technologie et société » et « Corps, santé, bien-être et sécurité » seront l'occasion de construire l'attendu de fin de cycle « Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes ».

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder la notion de fraction avec les élèves. Certains de ces documents ont été produits dans le cadre de l'accompagnement de programmes de mathématiques antérieurs. À ce titre, ces ressources s'inscrivent dans un contexte pédagogique désormais ancien. Néanmoins, elles proposent des éléments toujours pertinents pour aborder le thème des fractions.

- Le calcul numérique au collège
- Les nombres au collège
- Raisonnement et démonstration
- Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée
- Quotients, proportionnalité, grandeurs , André Pressiat, (décembre 2002).

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les fractions

Un exemple d'activité avec prise d'initiative

âge moyen

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes.

- pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté ;
- vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur ;
- calculer avec des nombres relatifs, des fractions ou des nombres décimaux (somme, différence, produit, quotient).

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, raisonner, calculer, communiquer.

Énoncé

Si 2/5 des habitants d'un pays ont au moins 50 ans et 1/3 des habitants de ce pays ont moins de 20 ans, est-il possible que l'âge moyen de la population soit de 40 ans ?

D'après le cadre d'évaluation « PISA 2006 » :
items libérés Mathématiques OCDE/DEPP – janvier 2011

Pistes pédagogiques

Cette activité peut être développée dans le cadre d'un EPI avec la géographie.

L'activité est ici induite par une « question ouverte ». L'enjeu est de produire un exemple.

Le fait que l'effectif de la population considérée et les âges moyens correspondant aux tranches d'âges « plus de 50 ans » et « moins de 20 ans » soient inconnus est un obstacle pouvant dissuader de nombreux élèves de s'engager dans l'activité.

L'étayage est ici crucial à la fois pour susciter l'engagement de tous les élèves et favoriser l'émergence de diverses démarches. Cet étayage peut prendre différentes formes.

Ainsi, par exemple, après un premier temps de recherche individuelle des élèves, on peut :

- mettre en débat des idées (travaux de groupes),
- apporter des aides et relancer, éventuellement de façon différenciée en :
  - aiguillant certains élèves (ou groupes) vers un choix possible d'âges moyens pour les tranches d'âges « plus de 50 ans » et « moins de 20 ans », susciter le calcul de la proportion d'habitants de la tranche d'âges intermédiaire, aiguiller vers un calcul de moyenne ;
  - amenant les élèves à critiquer le résultat obtenu (comparaison de l'âge moyen de la tranche intermédiaire avec 30) ;
  - suscitant diverses démarches : essais-erreurs (emploi du tableur), calculs numériques, mise en équation en jouant sur les paramètres « âges moyens » des tranches d'âges « plus de 50 ans » et « moins de 20 ans »).

Une préparation en amont (exploitation du site http://www.insee.fr) facilitera l'entrée dans la recherche (calcul des âges moyens des différentes tranches d'âges concernées pour ce qui concerne la France, par exemple).

Un prolongement en aval via, par exemple, le lien http://www.ined.fr/fr/tout-savoir-population/graphiques-cartes/population_graphiques/ conduisant au site de l'Ined (Institut national d'études démographiques) permettra d'illustrer la vraisemblance des solutions trouvées en recherchant des pays dans lesquels les indicateurs de tranches d'âges sont proches de ceux de l'exercice.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : Les fractions

Un exemple de question flash

« Vision-partage » de la fraction

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

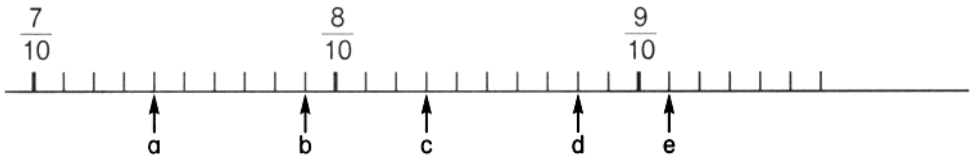
Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes :

- utiliser diverses représentations d'un même nombre ; passer d'une représentation à une autre ;
- repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée ;
- calculer avec des nombres rationnels, de manière exacte ou approchée, en combinant de façon appropriée le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté (calculatrice ou logiciel).

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Représenter, calculer.

Énoncé 1



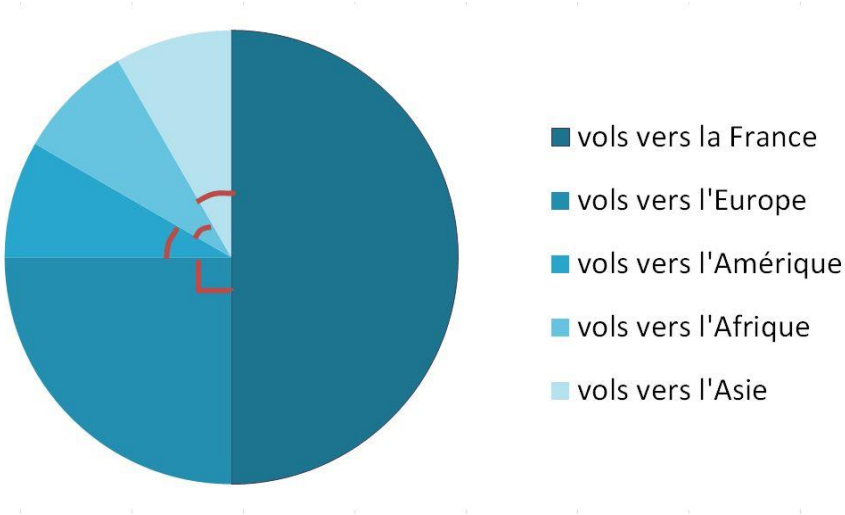
a. Placez les nombres ci-dessous sur la ligne graduée.

$\frac{75}{100}$ $\quad 0,92 \quad$ $\frac{730}{1000}$ $\quad 0,8100 \quad$ $\frac{80}{100}+\frac{6}{100}$

b. Trouvez les fractions qui correspondent aux repères indiqués par une flèche. Donner pour chacune d'elle l'écriture décimale.

Enoncé 2

On a représenté sur le diagramme suivant les vols du mois de février d'une compagnie aérienne.



Dans chaque cas, indiquer quelle fraction représentent les vols vers :

a. la France
b. l'Europe
c. l'Asie

Au mois de février, cette compagnie a affrété 576 vols. Calculer le nombre de vols vers :

a. la France
b. l'Europe
c. l'Asie

Pistes pédagogiques

Ces questions peuvent être posées dès le début et tout au long du cycle 4. Les proposer au début d'une séance concourt à un renforcement et/ou permet une remédiation.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les fractions

Un exemple de questions flash

Calcul avec les fractions

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes :

- utiliser diverses représentations d'un même nombre ; passer d'une représentation à une autre ;
- calculer avec des nombres rationnels, de manière exacte ou approchée, en combinant de façon appropriée le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté (calculatrice ou logiciel).

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Représenter, calculer.

Énoncé 1

1. Donner le quart de 24.
2. Donner les deux tiers de 24
3. Compléter : $\frac{3}{4}$ d'heure = … min
4. $\frac{9}{3} = \cdots$; $\frac{40}{10} = \cdots$
5. Quelle fraction de l'année représente un trimestre ? un mois ? une semaine ?
6. Quelle fraction d'une journée représente 30 min ? 6 h ? 36 h ?

Pistes pédagogiques

Ces questions peuvent être posées dès le début et tout au long du cycle 4. Elles contribuent à des évaluations diagnostiques. Elles permettent d'entraîner et de réactiver des connaissances et des capacités en lien avec les grandeurs et mesures.

Énoncé 2

Calculer $\frac{2}{5}-\frac{3}{4}$; $\frac{-3}{7}+\frac{5}{7}$; $-\frac{3}{2}\times\frac{7}{2}$ et $\frac{4}{-3}\times\frac{-9}{8}$.

Pistes pédagogiques

Ces questions peuvent être posées à partir de la classe de 4e notamment en calcul mental.

Elles mettent en jeu des sommes et des produits de fractions de signe quelconque ; des exemples similaires mettant en jeu des inverses et des quotients de telles fractions sont à proposer régulièrement à partir de la classe de 4e.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les fractions

Un exemple de questions flash

Sens du quotient

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes :

- utiliser diverses représentations d'un même nombre ; passer d'une représentation à une autre ;
- pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté ;
- vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.

COMPETENCES TRAVAILLÉES

Représenter, calculer, raisonner, communiquer.

Énoncé 1

Trouver, si possible, les nombres manquants dans les égalités suivantes :

8 × … = 96	2 × … = 5	5 × … = 4	0 × … = 6
7 × … = 4,2	8 × … = 17.	4 × … = 3.	

Pistes pédagogiques

Ce type de questions peut être posé dès le début et tout au long du cycle 4. Au début d'une séance et en calcul mental, cela concourt à renforcer les acquis du cycle 3 relatifs aux attendus « Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux » et « Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux » et permet une remédiation.

Énoncé 2

Dans chacune des cinq questions ci-dessous, une seule réponse est correcte. Laquelle ?

1. l'inverse de $\frac{2}{7}$ est :

supérieur à 7	égal à 3,5	inférieur à 2

2. $\frac{1}{15}$ est égal à :

0,0666666667 $\quad\quad \frac{2}{5} \div \frac{1}{6} \quad\quad \frac{2}{30}$

3. Dans un ruisseau, il s'écoule, en moyenne, 120 m^3 d'eau en 45 mn.
Le débit de ce ruisseau, en m^3/h, est égal à :

$120 \div \frac{3}{4} \quad\quad 120 \times \frac{3}{4} \quad\quad 120 \times 0{,}45$

4. La fraction $\frac{143}{132}$ est :

irréductible $\quad\quad$ comprise entre 1 et 1,1 $\quad\quad$ décimale

Pistes pédagogiques

Ce type de questions peut être posé à partir de la classe de 4e.
Leur pratique régulière – entrainement, réactivation – contribue à l'appropriation du sens du quotient, en lien avec d'autres thèmes du programme (proportionnalité, grandeurs et mesures, arithmétique…) ainsi qu'à l'apprentissage du raisonnement par une mise en œuvre de la définition du quotient pour comparer et calculer.

Énoncé 3

« Vrai », « Faux » ou « On ne peut pas savoir »

1. $\frac{3333333337}{1111111112} = 3$

2. f est la fonction linéaire telle que f(5) = 2.
   a. Le coefficient de la fonction f est $\frac{5}{2}$.
   b. 4 est l'image de 10 par la fonction f.

3. Trois personnes se partagent une somme d'argent. La 2e en a 2 fois plus que la 1re et la 3e en a 2 fois plus que la 2e.
   a. La 3e personne a plus d'argent que les deux autres réunies.
   b. La 1re personne n'a un cinquième de la somme totale.
   c. Si la 2e personne a 30 €, les trois personnes se sont partagé 105 €.

4. Dans un sac se trouvent 2 billes jaunes, 3 billes bleues et 4 billes vertes.
On tire au hasard une bille.
   a. La probabilité de tirer une bille bleue est $\frac{1}{3}$.
   b. On ajoute une bille de chaque couleur dans le sac. La probabilité de tirer une bille bleue augmente.
   c. On ajoute trois billes dans le sac. Chacune peut être jaune, bleue ou verte. La probabilité de tirer une bille bleue diminue.

Pistes pédagogiques

Ce type de questions peut être posé en classe de 3e. Leur pratique régulière – entraînement, réactivation, évaluation diagnostique – contribue à l'apprentissage du raisonnement, en lien avec d'autres thèmes du programme (proportionnalité et fonctions linéaires, probabilités…).

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les fractions

Un exemple de questions flash
Travail sur l'erreur

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes :
- pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté ;
- vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Calculer, raisonner, communiquer.

Énoncé

« D'accord ou pas d'accord ? »

$$\frac{6+2}{6+4} = \frac{\cancel{6}+2}{\cancel{6}+4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Pistes pédagogiques

Ce type de questions peut être posé dès le début et tout au long du cycle 4. Sa pratique régulière, notamment dans le cadre d'un débat argumenté en classe, favorise l'appropriation des notions, l'apprentissage du raisonnement et l'acquisition de méthodes.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les fractions

Un exemple de tâche intermédiaire

Vitesse moyenne lors d'un aller-retour

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes :
- pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté ;
- vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur ;
- calculer avec des nombres relatifs, des fractions ou des nombres décimaux (somme, différence, produit, quotient).

Utiliser le calcul littéral :
- résoudre des équations ou des inéquations du premier degré ;
- utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, raisonner, calculer, communiquer.

Énoncé

Lors d'un entraînement, un cycliste effectue à plusieurs reprises l'aller-retour suivant :

- ascension d'un col à une vitesse moyenne de 10 km/h,
- redescente immédiate, par la même route, vers le point de départ à une vitesse moyenne v.

On admet que la vitesse moyenne V du cycliste sur l'aller-retour est donnée par la formule :

$$\frac{2}{V} = \frac{1}{10} + \frac{1}{v}.$$

1. Quelle est la vitesse moyenne du cycliste sur l'aller-retour s'il redescend à la vitesse moyenne de 10 km/h ? de 30 km/h ?
2. À quelle vitesse moyenne le cycliste devrait-il redescendre pour que sa vitesse moyenne sur l'aller-retour soit de 18 km/h ?
3. La vitesse moyenne du cycliste sur l'aller-retour peut-elle être de 20 km/h ?

Pistes pédagogiques

Cette activité peut être développée dans le cadre d'un EPI avec la physique-chimie.

Cette tâche intermédiaire peut être proposée à partir de la classe de 4e lorsque l'on dispose des notions de vitesse moyenne et d'inverse d'un nombre non nul.

Le fait que les distances parcourues ne soient pas données peut accentuer la difficulté liée au caractère « non naturel » de la relation entre v et V. Un travail préalable aura pu être conduit afin d'amener les élèves à constater et à montrer que la vitesse moyenne sur un aller-retour n'est pas, en général, la moyenne arithmétique des vitesses moyennes à l'aller et au retour.

Des relances visant à aider les élèves à expliciter des démarches calculatoires sont à prévoir.

Une démarche par « essais-erreurs » est possible aux questions 2 et 3 Le tableur peut utilement être employé pour sa mise en œuvre.

La question 3 est l'occasion de raisonner par l'absurde. Cela pourra être identifié et consigné dans la trace écrite des élèves afin de concourir à l'apprentissage du raisonnement.

La preuve du résultat général (moyenne harmonique) peut être envisagée en guise de prolongement et en différenciant le travail proposé :

- preuve à l'aide d'un exemple générique (la distance aller ou la vitesse moyenne à l'aller peuvent être données) ;
- démonstration dans le cas général.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes: les nombres décimaux

Objectifs

Au cycle 3, les nombres décimaux sont introduits à partir des fractions décimales. L'écriture à virgule est ensuite présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales. Cette notation permet la mise en place des règles de comparaison et de calcul. Les quatre opérations sur les décimaux sont étudiées, mais la division est limitée au cas où le diviseur est un entier.

Même si les décimaux ont été introduits à partir des fractions décimales, beaucoup d'élèves, à l'entrée du cycle 4, associent encore la nature d'un nombre à son écriture. Pour eux, un nombre s'exprime toujours par une suite de chiffres et les nombres décimaux se différencient des nombres entiers par la présence de la virgule. Ils ne perçoivent pas, par exemple, 17 ou $\frac{5}{2}$ comme des nombres décimaux.

La poursuite, au cycle 4, du travail sur les nombres décimaux vise plusieurs objectifs :

- Amener tous les élèves à différencier la nature d'un nombre (notamment décimal) de son écriture et à passer de l'une de ses désignations à une autre. Concevoir, par exemple, $3{,}5$; $3{,}50$; $\frac{35}{10}$; $\frac{7}{2}$; $3+\frac{1}{2}$ comme des désignations différentes d'un même nombre ;

- Poursuivre le travail sur la comparaison des nombres décimaux. Il permet notamment de faire prendre conscience aux élèves de la possibilité d'intercaler un nombre décimal entre deux nombres qui pourraient être perçus à tort comme des nombres consécutifs (par exemple $7{,}24$ et $7{,}25$) ;

- Consolider les techniques opératoires étudiées au cycle 3 sur les nombres décimaux, notamment la priorité de la multiplication sur l'addition et la soustraction ;

- Introduire la division par un nombre décimal ;

- Utiliser les nombres décimaux pour exprimer des mesures de grandeurs et repérer des points autres qu'entiers sur la droite graduée.

Le travail mené tout au long du cycle sur les nombres relatifs concerne non seulement les entiers, mais aussi les décimaux et plus généralement les rationnels ; il viendra à ce titre compléter l'étude des décimaux dont l'introduction au cycle 3 porte uniquement sur les décimaux positifs.

Liens avec les domaines du socle

La compréhension et l'utilisation de différentes écritures d'un nombre décimal, sa représentation sur la droite graduée, les passages entre ses différents modes de représentation contribuent à l'acquisition du langage mathématique pour penser et communiquer (domaine 1).

La pratique du calcul (mental et écrit, exact et approché) engageant des nombres décimaux, l'utilisation de valeurs approchées décimales pour modéliser et résoudre des problèmes scientifiques et d'ordres de grandeurs pour contrôler des résultats contribuent à l'étude des systèmes naturels et des systèmes techniques (domaine 4).

Progressivité des apprentissages

La division par un nombre décimal est introduite dès la classe de 5e, parallèlement à la consolidation des techniques opératoires déjà étudiées au cycle 3. La maîtrise de ces techniques, en lien avec la compréhension des nombres et des opérations, est entretenue tout au long du cycle 4.

Le travail sur l'écriture décimale, initié au cycle 3 et poursuivi tout au long du cycle 4, est un point d'appui pour l'étude des puissances de 10 qui est formalisée dès la classe de 4e.

Parallèlement à la maîtrise des techniques calculatoires sur les nombres décimaux, les élèves sont amenés, tout au long du cycle, à résoudre des problèmes faisant intervenir des nombres décimaux.

Stratégies d'enseignement

Pour beaucoup d'élèves, à l'entrée en 5e, la conception d'un nombre décimal comme un objet mathématique et non comme une écriture est encore en cours de construction, le sens des opérations et les techniques opératoires sur les nombres décimaux sont encore en cours d'acquisition. De plus, certains élèves se sont forgé des représentations fausses qui, si elles peuvent s'avérer performantes dans des situations particulières, constituent des obstacles pour la suite des apprentissages. Il est donc indispensable que le professeur identifie les conceptions erronées afin de développer les stratégies d'enseignement qui permettront de les déstabiliser.

Quelques conceptions erronées

- **Assimilation de la virgule à un trait de fraction ;** c'est ainsi que, pour certains élèves $\frac{14}{10}$ = 14,10.
- **Difficulté à concevoir qu'un même nombre puisse avoir plusieurs désignations ;** ainsi, 1+ $\frac{4}{10}$; 1,4 ; 1,40 ne sont pas perçus comme différentes écritures d'un même nombre .
- **Le « nombre à virgule » vu comme un « entier déguisé », comme si la virgule n'existait pas.** Ce rôle « fantôme» de la virgule conduit certains élèves à écrire $4{,}3 < 4{,}06 < 4{,}249$ en le justifiant par le fait que $43 < 406 < 4249$, ou à percevoir 2,47 comme « le » successeur de 2,46, au même titre que 247 est celui de 246 .
- **Le « nombre à virgule » vu comme l'accolement de deux entiers, la virgule jouant le rôle de « frontière » entre les deux.** Cela conduit par exemple à écrire : $4{,}3 < 4{,}06 < 4{,}249$ (avec comme justification : « 3 est plus petit que 6, lui-même plus petit que 249 ») ;ou encore : $2{,}6 \times 3{,}4 = 6{,}24$; $15{,}7 + 12{,}6 = 27{,}13$ ou encore à percevoir $5{,}100$comme « le » successeur de $5{,}99$.
- **Une connaissance mal installée du système décimal** peut conduire un élève, dans le nombre $234{,}678$, à percevoir le chiffre 7 comme le chiffre des dixièmes en raison de

la position supposée des dixièmes comme symétrique de celle des dizaines, ou encore à écrire $4{,}249 < 4{,}16 < 4{,}1$en justifiant que les millièmes sont « forcément» plus petits que les centièmes, eux-mêmes plus petits que les dixièmes.

- **Des techniques mal automatisées et non contrôlées** peuvent aboutir à une confusion sur la position de la virgule dans le résultat d'une addition posée ou d'une multiplication posée comme dans la multiplication ci-dessous :

$$\begin{array}{r} 2{,}3 \\ \times\ 5{,}5 \\ \hline 1\,1\,5 \\ 1\,1\,5 \\ \hline 1\,2\,6{,}5 \end{array}$$

- **L'application de règles au-delà de leur domaine de validité** *;* c'est ainsi que l'extension aux décimaux de la règle du déplacement de la virgule ou de l'ajout de zéros pour la multiplication des entiers par des puissances de 10 contribue à des erreurs du type :
  - 1,4×10 = 1,40 ; 1,4 : 0,1 = 0,14
  - 12×0,5 > 12; $\frac{12}{0{,}5}$ < 12 (car « multiplier augmente un nombre et diviser le diminue »).
- **L'usage social des nombres décimaux à l'oral peut être à l'origine de confusions,** comme dans les exemples suivants : « un kilo cinq » s'écrit en fait $1{,}5$ kg alors que « un euro cinq » s'écrit en fait $1{,}05$ €.

La pratique régulière du calcul réfléchi doit permettre de « déconstruire » ces représentations erronées et parfois résistantes.

La construction d'automatismes

S'il permet d'aller plus vite une fois qu'on a compris, un automatisme ne permet pas de comprendre plus vite ; avant d'être institutionnalisée puis automatisée, une « règle » (comme celle, déjà citée, du déplacement de la virgule vers la droite ou vers la gauche) doit avoir été justifiée par le professeur et comprise par les élèves pour ne pas être employée en dehors de son cadre de validité.

La pratique régulière du calcul réfléchi permet à la fois de comprendre l'origine des règles et d'ancrer dans la durée la construction des mécanismes opératoires. Pratiqué en amont de la formalisation de ces mécanismes, le calcul réfléchi peut être mis en œuvre sur des exemples génériques. Pratiqué juste après l'institutionnalisation, sur des exemples assez proches de la situation d'introduction, il permet l'appropriation de la notion en cours d'étude. En aval, une pratique régulière, sur le long terme, permet d'automatiser les procédures et les propriétés des nombres engagés dans le calcul et s'avère nécessaire pour garantir la pérennité des acquisitions. L'analyse collective, sous la conduite du professeur, des différentes stratégies mises en œuvre et des éventuelles erreurs commises contribue à donner du sens aux objets mathématiques mis en jeu et aux techniques à automatiser.

Dans le cadre de l'apprentissage des nombres décimaux, on entretiendra de façon régulière les automatismes liés à la somme, à la différence, au produit de nombres décimaux, au quotient d'un nombre décimal par un entier, notions abordées au cycle 3, sur des exemples présentant de véritables enjeux. L'un de ces enjeux est de permettre d'identifier une erreur liée à l'incompréhension de l'écriture à virgule ; par exemple, un calcul du type $1{,}4 + 0{,}15$ permet d'identifier l'erreur liée à la conception de la virgule frontière par les élèves qui fournissent $1{,}19$ comme réponse, alors que le même calcul, posé sous la forme $1{,}40 + 0{,}15$ ne permet pas de débusquer l'erreur.

La compréhension de l'erreur peut s'appuyer sur différents registres d'expression : celui de la langue naturelle (on ajoute 1 dixième plus 5 centièmes à 1 unité plus 4 dixièmes), mais aussi celui des fractions décimales.

L'introduction de la division d'un décimal par un décimal pourra se faire dans le cadre de cette pratique, sur une durée suffisamment longue, à petites doses et de manière progressive.

La consolidation des priorités opératoires

La consolidation des priorités opératoires introduites au cycle 3 est indispensable car ces priorités sont à la base de la compréhension et de la production d'expressions, qu'elles soient numériques ou littérales. L'écriture en ligne d'une succession de calculs simples engageant des nombres décimaux, notamment prescrits par des programmes de calcul, est une stratégie d'enseignement possible.

> **EXEMPLE :**
> Prendre un nombre ;
> lui ajouter 1,8 ;
> multiplier le résultat par 3,2.
>
> Écrire l'expression numérique traduisant ce programme en prenant 10 comme nombre de départ.

Il pourra s'avérer fructueux de comparer les résultats obtenus avec une calculatrice scientifique et avec une calculette, ces deux outils ne respectant les mêmes règles de priorité entre opérations.

Le choix du nombre d'instructions d'un programme de calcul et des nombres auquel il s'applique permet une différenciation au sein de la classe.

Parallèlement au travail sur les programmes de calcul qui concernent l'aspect procédural d'un calcul, les élèves seront amenés à travailler sur sa forme structurale (somme, différence, produit, quotient).

Par exemple identifier $12{,}3 + 2{,}5 \times 7{,}1$ comme une somme: celle de $12{,}3$ et du produit de $2{,}5$ par $7{,}1$.

L'utilisation de la droite graduée

Le recours à la droite graduée permet de travailler la compétence « représenter » décrite dans les programmes des cycles 3 et 4 par les passages dans les deux sens qu'elle permet de réaliser entre le registre symbolique de l'écriture du nombre et le registre graphique de sa représentation.

Plusieurs situations d'enseignement se prêtent à l'utilisation de la droite graduée.

- **Mesurer des grandeurs et encadrer des mesures, notamment en variant les unités.** Effectuer des mesures « qui ne s'expriment pas en un nombre entier d'unité » permet de revenir à l'utilité première des décimaux (résoudre des problèmes pour lesquels les entiers sont défaillants) et de travailler l'intercalation des décimaux.
- **Repérer des points sur une droite graduée.** Les activités de repérage peuvent être très variées au niveau des situations et des questionnements proposés, mais aussi des types de graduation et des outils utilisés (droite graduée, papier millimétré, sous unités partiellement ou non représentées, présentation « en zoom ») et de la nature de l'écriture des nombres à repérer (désignation orale, écritures fractionnaires, décimales, décompositions diverses, etc.). On pourra se reporter à l'activité développée au paragraphe VI.
- **Intercaler des décimaux.** « Donner dix nombres entre 4,67 et 4,68 » est une situation classique qui peut être enrichie par la question de savoir s'il peut y en avoir 100, 1000, 10 000, etc.

Dans le cadre d'une différenciation pédagogique, on pourra remplacer $4{,}67$ et $4{,}68$ par 4 et $4{,}01$.

L'utilisation de valeurs approchées et le contrôle des résultats

La résolution de problèmes permet aux élèves de prendre conscience que les nombres décimaux ne permettent souvent que d'y apporter des réponses approchées.

Conformément à l'écriture du domaine 4 du socle (paragraphe « démarches scientifiques »), les ordres de grandeurs sont utilisés pour estimer et contrôler les résultats.

Points de vigilance

La rigueur et la précision de la dénomination orale des nombres décimaux contribuent à leur bonne compréhension. Le professeur doit avoir conscience du caractère modélisant de sa propre pratique et du fait que la dénomination d'usage social du type « 3 virgule 08 » peut renforcer les fausses représentations, notamment celle de la « virgule frontière ». Les échanges en classe offrent l'occasion de manipuler mentalement les changements de registres, ce que facilitent les formulations du type « 308 centièmes » ou « 3 unités plus 8 centièmes ». Attendre cette rigueur de la part des élèves les aide à établir les liens entre les différentes désignations et contribue à la compréhension des nombres décimaux. La maîtrise, par tous les élèves, des techniques opératoires sur les nombres décimaux est un objectif de fin de cycle. Un travail spiralé, mené sur toute la durée du cycle, sous forme de calcul mental ou réfléchi doit permettre de l'atteindre. Mais la technique s'acquiert aussi à travers la résolution de problèmes et nombreux sont ceux qui sollicitent les nombres décimaux; leur résolution contribue à consolider la compréhension de ces nombres. Ces problèmes peuvent relever de la vie courante, d'autres disciplines ou d'autres champs des mathématiques : calculs de coûts, coefficients de proportionnalité ou de linéarité, d'échelles ou de moyennes, mesures de grandeurs, conversions d'unités, etc.

Différenciation

Pour les élèves qui n'ont pas encore acquis une compréhension automatisée des décimaux, il est nécessaire de recourir à des outils de manipulation permettant de visualiser les rapports entre unité, dixième, centième pour asseoir le sens des désignations. Parmi ces outils on peut citer la droite graduée, mais aussi le carré ou le cube unité partagés en sous-unités, les tangrams, etc. On pourra se reporter à l'activité développée au paragraphe VI.

Une bonne connaissance de faits numériques comme les multiples de 25 et leur relation avec 100, les divisions par $10, 100, 1000$, etc. est indispensable à la bonne compréhension des nombres décimaux. Un travail routinier sur ces prérequis permet de dépasser certaines difficultés.

Pour certains élèves, un manque d'assurance dans le calcul écrit constitue un véritable handicap et une source de blocage. Or, de même qu'une orthographe incertaine ne saurait interdire l'écriture, le manque de dextérité calculatoire ne doit pas constituer un blocage à toute activité mathématique. Il est donc indispensable de ne pas limiter l'activité des élèves les plus fragiles à des tâches purement techniques et il est déconseillé d'attendre systématiquement leur maîtrise avant de leur proposer des problèmes à résoudre, ce qui peut d'ailleurs constituer un puissant levier pour motiver l'acquisition des techniques.

Dans le cadre d'un approfondissement, l'étude de quelques cas de non décimalité pourra être traitée.

Exemples de situations d'apprentissage

Contrôle de la vraisemblance du résultat d'un calcul sur les nombres décimaux

Exemple de la division par un nombre décimal

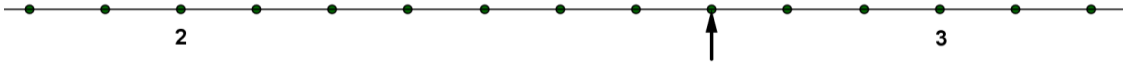
On propose aux élèves de calculer $\frac{0,6}{0,2}$. On peut s'attendre à ce que certains proposent comme résultat $0,3$ ou $0,03$. Ils effectuent en effet la division de 6 par 2 et mettent soit un chiffre après la virgule en appliquant l'algorithme de l'addition, soit deux chiffres après la virgule en appliquant l'algorithme de la multiplication.
La référence au quotient permet d'identifier $\frac{0,6}{0,2}$ comme étant le nombre par lequel il faut multiplier $0,2$ pour obtenir $0,6$. L'invalidation des résultats $0,3$ et $0,03$ repose alors sur les opérations $0,3 \times 0,2 = 0,06$ et $0,03 \times 0,2 = 0,006$.
Pour certains élèves, la compréhension de l'erreur passe par la verbalisation de la notion de partage en « Combien de fois $0,2$ entre-t-il dans $0,6$? » ou en sa formulation équivalente « Combien de fois 2 dixièmes entrent-ils dans 6 dixièmes ? ». Ces formulations permettent d'amener les élèves à prendre conscience «qu'il y a plus d'une fois $0,2$ dans $0,6$ », et donc que $\frac{0,6}{0,2}$ ne peut valoir ni $0,3$ ni $0,03$.
Il convient également d'insister sur le fait que le résultat de la division par un nombre décimal inférieur à 1 est plus grand que ce nombre. Cela doit faire partie des automatismes de contrôle.

Utilisation de la droite graduée

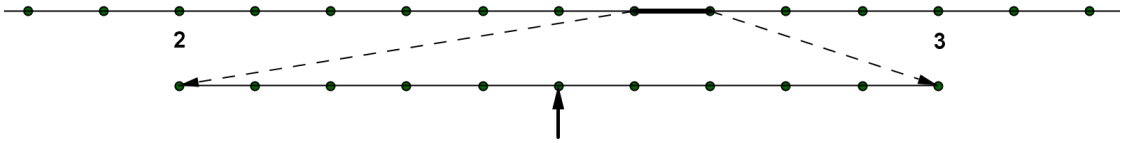
L'activité ci-dessous utilise des zooms à différentes échelles.

Source : académie de Rennes

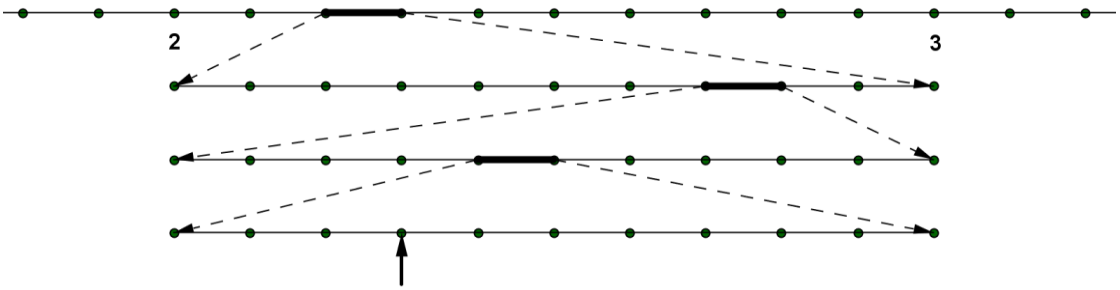
1. Quel est le nombre indiqué par la flèche sur la droite graduée ci-dessous ?



2. On a représenté un agrandissement d'une partie de la droite graduée.
Quel est le nombre indiqué par la flèche sur l'agrandissement ?

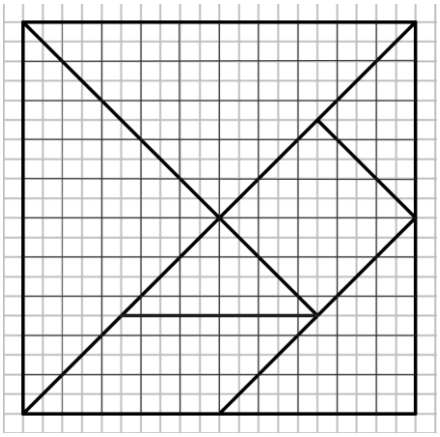


3. On a représenté des agrandissements successifs d'une partie de la droite graduée.
Quel est le nombre indiqué par la flèche sur le dernier agrandissement ?



Cette activité peut être complétée par l'exercice inverse, qui consiste par exemple à représenter 2,472 sur la droite graduée.

Mesure de grandeurs



La mesure de la surface des pièces d'un Tangram permet de faire le lien entre écritures décimales, fractions décimales et fractions non décimales puisqu'on peut utiliser comme unité d'aire soit le plus petit des triangles, dont l'aire est égale à un seizième de l'aire totale, soit le centimètre carré, en utilisant le quadrillage.

Autres exemples d'activités

- Des exemples de questions flash
- Un exemple de tâche intermédiaire : un problème de coûts
- Un exemple de tâche avec prise d'initiative : Épaisseur d'une feuille de papier

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder la notion de nombre décimal avec les élèves :

- Le nombre au cycle 3 SCEREN - CRDP, septembre 2012
- Les nombres au collège
- Le calcul numérique au collège
- Découvrir de nouveaux nombres au collège - brochure IREM de Strasbourg 2012
- Des maths ensemble et pour chacun - Rouquès, J.-P. & Staïner, H.(2010) - Cinquième. Nantes : CRDP des Pays de la Loire
- Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège BLOLON J. 1996, Identifiant BU : 96PA05H050
- Banque des exercices de Mathématiques sans Frontières Junior
- Enseigner et apprendre les nombres décimaux : dispositif d'évaluation diagnostique Decival sur le site du Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Louvain (Belgique)
- La sixième entre fractions et décimaux - Brochure de l'IREM de Lyon

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes: les nombres décimaux

Exemples de questions flash : calculs sur les décimaux, conversions entre système décimal et système sexagésimal

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
En développant le calcul mental sur des nombres décimaux et en se prêtant au contrôle de la vraisemblance des résultats, cette situation d'apprentissage participe à la construction de l'attendu de fin de cycle « utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes ».

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Calculer, représenter.

Énoncé

Q1	Calculer 0,3 × 0,2	Q4	Convertir 0,2 h en minutes	Q7	Exprimer 36 minutes en heure
Q2	Calculer 1,1 × 0,4	Q5	Convertir 0,5 h en minutes	Q8	Exprimer 20 minutes en heure
Q3	Calculer 1,2 × 0,06	Q6	Convertir 0,25 h en minutes	Q9	Exprimer 1h 45 min en heure

Pistes pédagogiques

C'est l'analyse et le traitement des erreurs qui donneront du sens aux automatismes visés.

Questions Q1 à Q3

Des élèves peuvent proposer 0,6 comme réponse à la question Q1, en appliquant un algorithme lié à l'addition. On renverra ces élèves au calcul 0,3 × 2 dont le résultat est 0,6 car « deux fois trois dixièmes est égal à six dixièmes ».

Comme 0,2 est dix fois plus petit que 2, le produit 0,3 × 0,2 est dix fois plus petit que 0,3 × 2, il est donc égal à 0,06.

Une autre approche peut être mise en avant. Elle consiste à raisonner à partir du produit des entiers : 3 × 2 = 6. Comme 0,3 est dix fois plus petit que 3 et 0,2 dix fois plus petit que 6, le produit 0,3 × 0,2 est cent fois plus petit que 6.

L'entretien de telles démarches se fera sur la durée, avec un calcul de ce type par séance comme par exemple Q2 et Q3.

Questions Q4 à Q9

Les rencontres avec le système sexagésimal permettent aux élèves d'appréhender un autre système de numération et de s'interroger sur les liens entre les deux systèmes. Le passage de l'écriture décimale à l'écriture sexagésimale des durées gagne à être travaillé dans la durée, pour une meilleure appropriation. Ces calculs pourront ensuite être réinvestis dans divers problèmes.

Convertir des durées inférieures à 1h

En réponse à la question Q4, des élèves peuvent proposer 2 min ou 20 min, considérant que 0,2 h = 0,20 h = 20 minutes. Après avoir fait remarquer que 20 minutes, c'est $\frac{1}{3}$ d'heure et que $\frac{1}{3}$ n'est pas égal à 0,2, on s'intéresse au sens du nombre 0,2 : c'est deux dixièmes et deux dixièmes d'heure, c'est 12 min. Une autre procédure pourra être mise en évidence, en lien avec la proportionnalité : 1 h = 60 min ; 2 h = 120 min ; 0,2 h = 120 min ÷ 10 ou 0,2 × 60 min.

Les questions suivantes permettent de revoir le lien entre 0,5 et $\frac{1}{2}$, et entre 0,25 et $\frac{1}{4}$.

0,5 h, c'est une demi-heure, c'est donc aussi 30 minutes. De nombreux élèves, en début d'apprentissage, pensent que 0,25 h = 25 min. Le lien entre les écritures décimale et fractionnaire de 0,25 permet de mettre en évidence que 0,25 h c'est un quart d'heure, donc 15 min.

On pourra entretenir régulièrement ces types de raisonnements, en ajoutant progressivement des conversions de durées supérieures à 1h telles que 2,1 h = ….h ….min ou 1,75 h = ….h ….min.

Passer du système sexagésimal au système décimal

Beaucoup d'élèves pensent qu'il n'est pas possible d'exprimer 36 minutes en heure. Deux procédures peuvent être envisagées. La première est liée à la division : pour passer des heures aux minutes, on multiplie par 60, donc pour passer des minutes aux heures, on divise par 60.

La deuxième est liée aux fractions, une minute étant égale à $\frac{1}{60}$ d'heure, 36 min = $\frac{36}{60}$ h = 0,6 h.

Certains élèves peuvent proposer 0,3 h comme expression de 20 minutes en heure. Le travail précédent permet de leur faire comprendre que la réponse est erronée, puisque 0,3 h étant la moitié de 0,6h, c'est 18 min. La procédure liée aux fractions ou à la langue naturelle (20 c'est le tiers de 60) permet de conclure.

On pourra poursuivre régulièrement ce travail en demandant de convertir en heure 15 min, 1h 45 min, 3h 12 min, etc.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les nombres décimaux

Un exemple de question à prise d'initiative : épaisseur d'une feuille de papier

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les nombres décimaux pour résoudre des problèmes :

- calculer avec les grandeurs mesurables, exprimer le résultat dans une unité adaptée ;
- estimer un ordre de grandeur.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, raisonner, calculer, communiquer.

Énoncé

Environ 800 classes sont inscrites cette année au concours « Mathématiques sans Frontière Junior ». Les organisateurs de la compétition ont prévu de distribuer un sujet par participant. John affirme que, si on empilait la totalité des sujets, la pile serait aussi haute qu'une montagne. Pour savoir s'il a raison, donner une estimation de la hauteur de cette pile. Expliquer le raisonnement.

Cette activité est issue de la compétition « Mathématiques sans Frontière Junior », 2015

Pistes Pédagogiques

Les tâches dans lesquelles il manque certaines données permettent de développer les prises d'initiative. L'activité ci-dessus, qui peut être proposée dès la classe de 5e, permet aux élèves de faire évoluer leurs représentations des nombres décimaux, tout en nécessitant de l'imagination et la mise en place d'un raisonnement.

Deux éléments sont à relever :

- l'épaisseur d'une feuille de papier est inférieure à un millimètre ; un tel intervalle de mesure est en général peu familier des élèves, pour lesquels la plus petite sous-unité connue à ce niveau est le millimètre. Il est donc ici impossible de se référer à une sous-unité permettant de transformer un décimal en un entier (comme par exemple lorsqu'on écrit 0,152 m = 152 mm), passage dont on sait qu'il est un obstacle didactique à la compréhension des décimaux ;
- la façon la plus pertinente d'évaluer l'épaisseur d'un sujet est de mesurer l'épaisseur d'une pile importante de sujets ou de trouver le nombre de sujets à superposer pour obtenir une pile d'1 cm d'épaisseur par exemple. Cette activité permet donc de trouver un nombre décimal comme résultat d'un quotient.

Cette situation peut être scénarisée de différentes manières, qui doivent favoriser les démarches personnelles des élèves.
Deux préconisations pour la mise en œuvre de cette situation :

- inciter les élèves à utiliser ce qu'ils ont sous la main pour effectuer l'extrapolation des données. Il peut s'avérer nécessaire de débloquer le travail des élèves en leur suggérant de calculer l'épaisseur d'une ramette de papier ou d'un cahier afin de contourner la difficulté d'une épaisseur trop petite pour les instruments de mesure couramment utilisés dans une classe de collège ;
- une mise en commun des démarches et surtout des procédures de détermination de l'épaisseur d'un sujet permettra de mettre en relief certains attendus du cycle 4: explicitation de la démarche et des résultats, mise en évidence et justification des extrapolations, calcul d'ordres de grandeurs.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les nombres décimaux

Un exemple de tâche intermédiaire : un problème de coûts

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Résoudre des problèmes de proportionnalité :

- reconnaître une situation de proportionnalité ;
- utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes ;
- calculer le produit de deux nombres décimaux.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, raisonner, calculer.

Énoncé

Des pommes sont vendues 2,6 € le kg. Calculer le prix de 700 g de ces pommes et celui de 2,3 kg.

Pistes Pédagogiques

Le problème amène l'élève à se poser la question « combien de fois 1 kg la quantité donnée représente-t-elle ? ». La détermination du « nombre de fois » étant de difficulté croissante suivant le statut du nombre exprimant la quantité, ce type de problème, déjà abordé au cycle 3, peut être proposé tout au long du cycle 4.

La résolution est accessible à la plupart élèves lorsque la quantité est exprimée par un nombre entier.

Elle est déjà moins accessible lorsque ce nombre est un décimal non entier supérieur à 1 (le prix de 2,3 kg est 2,3 fois celui de 1 kg).

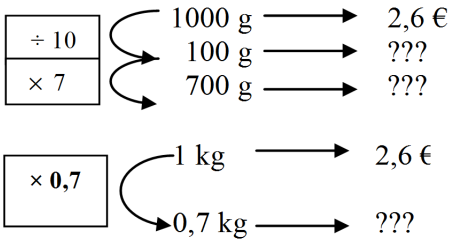
Elle devient difficile pour de nombreux élèves lorsque le nombre est un décimal inférieur à 1 (le prix de 0,7 kg est 0,7 fois celui de 1 kg). Les élèves pour qui la multiplication ne peut qu'agrandir les nombres pensent que l'opération à mobiliser pour trouver le prix de 700 g de pommes ne peut être qu'une division.

Cette situation permet de faire le point sur les procédures mises en œuvre par les élèves et de les amener vers la méthode visant à multiplier 2,6 € par le nombre de kg.

Le calcul du prix de 2,3 kg permet la confrontation de deux procédures :

- celle consistant ajouter les prix de 2 kg et de 300 g. Cette procédure est souvent majoritaire en début d'apprentissage ;
- celle consistant à considérer que 2,3 kg c'est 2,3 fois 1 kg et, ainsi, le prix de 2,3 kg est 2,3 fois celui de 1 kg, soit 2,3 × 2,6 €.

Deux des procédures possibles pour calculer le prix de 700 g sont schématisées ci-dessous :



Ces deux schémas permettent de faire le lien entre multiplier un nombre par 0,7 et diviser ce nombre par 10 puis multiplier le résultat par 7. La comparaison des deux procédures permet de mettre en avant la plus grande efficacité de la deuxième procédure, celle-ci ne nécessitant qu'un seul calcul. Cependant, il faudra un certain temps pour que certains élèves se l'approprient, se sentant plus en sécurité avec une procédure qui leur était auparavant familière.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les nombres relatifs

Le statut et l'usage des nombres évoluent au cours de la scolarité. Au cours du cycle 3, les nombres positifs (entiers, décimaux ou rationnels) ont été principalement utilisés pour :

- compter des objets ;
- mesurer des grandeurs ;
- graduer une demi-droite ;
- jouer le rôle d'opérateur (par exemple prendre le quart de, ou calculer 75 % de) ;
- effectuer des calculs et en donner les résultats sous forme exacte ou approchée.

L'élève a effectué sur ces nombres des opérations dont il a perçu implicitement certaines propriétés (associativité, commutativité, élément neutre, distributivité).

Objectifs

L'introduction au cycle 4 des nombres décimaux relatifs vise plusieurs objectifs :

- étendre l'ensemble des décimaux positifs à un ensemble plus vaste (celui des décimaux positifs et négatifs), dans lequel toutes les soustractions sont possibles. Cette extension est réalisée de manière à maintenir les propriétés des opérations valables entre nombres décimaux positifs (principe de permanence) ;
- accorder le statut de nombres (en tant qu'objets mathématiques sur lesquels on peut effectuer des opérations et des comparaisons) à des réalités de la vie quotidienne situées « au-dessous de zéro » (températures, profondeurs, dettes, etc.) ;
- disposer de ces nouveaux outils pour modéliser et résoudre des problèmes de la vie courante ;
- étendre à la droite entière la graduation déjà connue de la demi-droite, repérer et se repérer sur une droite.

Liens avec les domaines du socle

La compréhension des nombres négatifs en tant qu'objets mathématiques sur lesquels on peut effectuer des opérations et des comparaisons, la perception de l'extension de l'ensemble des décimaux positifs à celui des décimaux relatifs, la compréhension de l'écriture des nombres négatifs et de leur représentation sur la droite graduée contribuent à l'acquisition du langage mathématique pour penser et communiquer (domaine 1).

L'utilisation des nombres relatifs pour modéliser des grandeurs physiques (température, profondeur, altitude) ou sociales (dates, gains et pertes) susceptibles de prendre des valeurs en dessous de zéro contribue à l'étude des systèmes naturels et techniques (domaine 4) ainsi qu'aux représentations du monde et de l'activité humaine (domaine 5).

PROGRESSIVITÉ DES APPRENTISSAGES

Anticipation

Quel que soit le procédé retenu pour l'introduction des nombres négatifs, celle-ci gagne à être préparée en amont par une réactivation des propriétés des opérations sur les nombres décimaux positifs et de la notion de différence, qui ont été étudiées au cycle 3.

De nombreux exemples de calcul mental permettront dans un premier temps de simplifier des programmes de calcul du type « ajouter b puis soustraire a » en « ajouter $b-a$ »lorsque $b>a$ puis, dans un deuxième temps d'aborder la même question lorsque $b<a$.

De nombreux exemples de ce type sont présentés dans le document « Les nombres relatifs en 5e », Parcours d'Étude et de Recherche du groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille.

Un exemple d'introduction des nombres négatifs dans un cadre mathématique

Une introduction des nombres négatifs (d'abord entiers puis décimaux non entiers) sans référence à des contextes concrets peut se faire à partir de l'équivalence de programmes de calcul.

L'équivalence des programmes de calcul « ajouter 3 puis soustraire 5 », « ajouter 2 puis soustraire 4 », « ajouter 1 puis soustraire $+3$ », « ajouter 0 puis soustraire 2 » permet d'écrire : $3-5=2-4=1-3=0-2$. On convient alors de coder par (-2) le résultat commun à toutes ces soustractions (et à beaucoup d'autres encore…).

En début d'apprentissage, l'utilisation de parenthèses englobant à la fois le signe « moins » et la valeur absolue permet d'éviter la confusion du signe « moins » intervenant dans le codage d'un nombre négatif avec le signe opératoire de la soustraction.

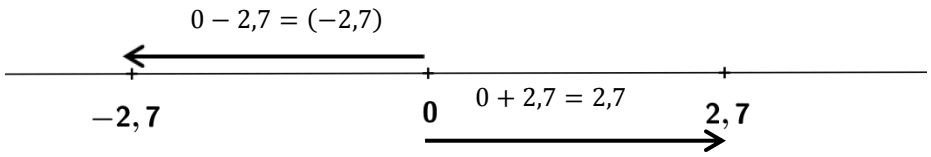
Pour bien faire comprendre le plongement de l'ensemble des décimaux positifs dans celui des décimaux relatifs et le fait que seuls les nombres négatifs sont nouveaux dans la construction, on évitera les écritures du type $(+3)$ pour coder les décimaux positifs déjà connus. Cela permet de garder au signe $+$ son seul statut opératoire et d'éviter des exercices de simplification d'écriture au terme desquels les élèves ne savent plus reconnaître que $(+2)+(+3)$, c'est tout simplement $2+3$.

Les élèves pourront ensuite être entraînés à résoudre des additions à trous (reformulées en : « quel nombre faut-il ajouter à … pour obtenir … ? ») mettant en jeu d'abord des nombres entiers, puis des nombres décimaux non entiers. Les nombres négatifs apparaissent alors comme des outils permettant de résoudre des équations à trou du type $b+\cdots=a$ lorsque $0\leq a<b$, ce qui revient à rendre possibles des soustractions du type $a-b$ avec $0<a<b$, a et b étant des décimaux.

Le repérage des nombres relatifs

Le lien peut ensuite être fait avec le repérage sur la droite graduée. La référence au placement des nombres négatifs sur la droite graduée peut être basée sur un modèle concret (par exemple celui des températures) ou sur l'interprétation de la soustraction d'un décimal positif comme un déplacement vers la gauche.

Ainsi le nombre $(-2{,}7) = 0 - 2{,}7$ repère le point situé à la distance $2{,}7$ de l'origine, symétriquement par rapport à l'origine au point repéré par le nombre $2{,}7$. Il est défini comme étant son opposé.
Le nombre positif $2{,}7$ est désigné comme étant la valeur absolue du nombre négatif $(-2{,}7)$.



La définition de l'opposé d'un nombre permet de compléter le corpus d'égalités à trous par des égalités du type $7{,}1 + \cdots = 0$ ou $(-7{,}1) + \cdots = 0$.

Pour éviter les confusions, on peut convenir, en début d'apprentissage, de noter op $(7{,}1)$ l'opposé du nombre $7{,}1$.

Cette notation sera, un peu plus tard, remplacée d'abord par la notation $(-7{,}1)$, puis par $-7{,}1$ sans négliger d'aborder avec les élèves les différentes significations que prend alors le signe « moins » :

- marqueur d'un nombre négatif dans $(-7{,}1)$;
- signe de soustraction dans $0 - 7{,}1$ ou dans $20 - 27{,}1$;
- marqueur de l'opposé, par exemple dans l'écriture $-(-7{,}1)$.

Le repérage des décimaux relatifs sur la droite graduée est un bon point d'appui pour aborder la question de leur classement. Un travail systématique de changement de registre (de l'écriture du nombre à sa représentation sur la droite et vice versa) permet de construire l'image mentale de l'opposé, d'éviter les erreurs de classement et facilitera l'introduction ultérieure du repérage dans le plan.

Si le classement des nombres relatifs ne pose pas de difficulté particulière lorsqu'ils sont exprimés sous forme chiffrée, la difficulté apparaît lorsqu'ils sont désignés sous forme littérale, les élèves ayant du mal à concevoir que $-a$ puisse, sous certaines conditions, désigner un nombre positif.

Les opérations

L'addition et la soustraction sont introduites dès le début de cycle 4 ; il est nécessaire d'entretenir leur assimilation tout au long du cycle, tant par des exercices d'entraînement technique (calcul mental ou écrit) que par la résolution de problèmes les mettant en jeu. La multiplication est abordée une fois que ces deux opérations sont bien en place, et après avoir réactivé la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans le cadre des nombres positifs. Il est nécessaire que le sens et les propriétés de la multiplication soient bien stabilisés avant d'aborder la division.

L'addition et la soustraction

Beaucoup de situations en lien avec la vie courante peuvent illustrer l'addition de deux nombres relatifs. Celle-ci permet en effet de modéliser soit le bilan de deux variations (gains et pertes, montées et descentes d'un ascenseur, déplacements vers la droite ou vers la gauche le long de la droite graduée), soit l'application d'une variation (augmentation, diminution) à un état (température, altitude, solde d'un compte financier, score d'un joueur). La variété des contextes utilisés évitera que la prégnance d'un modèle empêche la construction du statut de nombre.

Une pratique routinière, notamment sous forme de calcul mental, d'additions entre nombres relatifs permettra l'automatisation progressive de la règle d'addition, sans qu'il soit nécessaire de la formaliser. L'élève pourra alors s'affranchir du recours à un modèle concret ou à la droite graduée.

L'introduction de la soustraction suppose que soient bien installées l'addition et la notion d'opposé, $a - b$ étant défini comme égal à $a + \text{op}(b)$. Il est alors possible d'interpréter le résultat d'une addition à trou comme la différence de deux nombres relatifs.

La simplification des calculs

L'élève dispose alors de tous les éléments permettant de justifier la simplification de calculs enchaînant des additions et des soustractions sur des nombres relatifs, du type $2 + (-5) + 4$. La simplification des expressions repose sur la définition de la soustraction dans D, puisque, sur l'exemple précédent, $2 + (-5) = 2 - 5$. Dans les expressions simplifiées, les seuls signes restants sont des signes d'opérations (additions et soustractions), sauf dans le cas où le premier terme de la somme est un nombre négatif comme dans $(-2) + 3 - 5$. Progressivement, l'élève dégage des méthodes efficaces pour effectuer une suite d'additions et de soustractions de nombres relatifs, notamment la neutralisation des opposés et le regroupement des nombres de même signe.

Beaucoup de situations concrètes se prêtent à ce type de calculs : moyennes de températures, mouvements dans les deux sens, bilans financiers de gains et de pertes, scores de jeu.

Le choix des nombres décimaux mis en jeu et le nombre d'opérations à enchaîner constituent des éléments de différenciation.

La multiplication

La multiplication des décimaux relatifs pourra être approchée en plusieurs étapes, conduites par le professeur, sur des exemples génériques simples, une fois que la compréhension et l'utilisation de l'addition et de la soustraction aura été stabilisée :

1. la multiplication d'un entier naturel par un entier négatif sollicite le sens premier de la multiplication comme addition itérée : $2 \times (-3) = (-3) + (-3) = (-6)$ (verbalisée en « deux fois (-3) ») ;
2. le principe de permanence permet d'étendre aux nombres relatifs une égalité du type $2 \times 3 = 3 \times 2$ et de définir $(-3) \times 2$ comme étant égal à $2 \times (-3)$;
3. la justification de l'égalité $(-2) \times (-3) = 6$ repose sur le fait que $(-2) \times (-3) + 2 \times (-3) = \big((-2) + 2\big) \times (-3) = 0 \times (-3) = 0$, à condition d'admettre l'extension aux nombres relatifs de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, connue chez les décimaux positifs, et le résultat de la multiplication par 0.

La règle permettant de calculer le produit de deux nombres relatifs pourra alors être institutionnalisée, notamment au niveau du signe du produit.

Si la métaphore des amis et des ennemis est une aide à la mémorisation de la règle des signes, il importe d'insister sur le fait qu'elle n'en constitue en aucune manière une justification.

Une pratique routinière (mentale et écrite) de multiplications sur les nombres relatifs permet de découvrir, puis d'utiliser, des propriétés mathématiques essentielles comme l'effet de la multiplication par (-1), le signe d'un produit de plusieurs facteurs, l'associativité de la multiplication, etc.

Enfin, on veillera à ne pas se limiter trop longtemps à des multiplications entre entiers relatifs car cela risquerait de renforcer l'obstacle dû à la seule conception de la multiplication comme addition itérée.

Le choix des nombres décimaux mis en jeu est encore un élément de différenciation

La division

Le quotient de deux nombres relatifs est introduit à partir d'exemples de multiplications à trous et du prolongement de la définition du quotient de a par b (le nombre par lequel il faut multiplier b pour obtenir$a$), dans une démarche similaire à celle utilisée pour l'introduction de la soustraction.

La règle des signes pour un quotient est démontrée à partir de celle qui régit le signe d'un produit.

À ce stade, on distingue $\frac{-4}{3}$, solution de la multiplication à trous $3 \times \ldots = -4$ et $\frac{4}{-3}$, solution de l'équation à trous $(-3) \times \ldots = 4$.

En admettant que $(-3) \times \frac{-4}{3} = \frac{(-3)\times(-4)}{3}$ (extension de la propriété connue du produit d'un entier positif par une fraction), il vient $(-3) \times \frac{-4}{3} = \frac{12}{3} = 4$; donc le nombre par lequel on multiplie (-3) pour obtenir 4 est à la fois $\frac{4}{-3}$ et $\frac{-4}{3}$, donc $\frac{4}{-3} = \frac{-4}{3}$

Enfin, en étendant la règle d'addition de deux fractions de même dénominateur, il vient

$$\frac{-4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{(-4+4)}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

Ce qui permet de justifier que $\frac{-4}{3} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$.

L'acquisition de ces notions délicates se fera dans la durée, et permettra d'aborder la distinction entre opposé et inverse.

Les nombres rationnels négatifs

En cours de cycle, et parallèlement à la consolidation du calcul fractionnaire, les propriétés des opérations entre décimaux relatifs seront étendues, toujours selon le principe de permanence, aux nombres rationnels, positifs ou négatifs.

Stratégies d'enseignement

L'histoire nous apprend qu'il a fallu du temps pour que les nombres négatifs s'imposent véritablement en tant que nombres. Utilisés pour des besoins comptables (créances, dettes), ils ont longtemps servi en mathématiques comme outils de calcul, voire comme intermédiaires de calcul dans la résolution d'équations. Il a fallu attendre les mathématiques modernes et la théorie des structures pour les définir comme des classes d'équivalence de couples d'entiers naturels. La transposition didactique de cette notion est délicate et explique les difficultés à appréhender en tant que nombres des objets définis « en-dessous de 0 », alors même qu'ils sont utilisés dans la vie courante où l'on parle aussi bien d'une température de -7 °C ou d'une profondeur de -35 m que d'un bilan financier de -400 €.
Des grandeurs comme la température, la date ou l'altitude peuvent être ordonnées et comparées ; ce sont des grandeurs dites « repérables » ; elles peuvent servir de modèles pour introduire, comparer et ordonner des nombres relatifs. En revanche, quand on mélange 100 g d'eau à la température de 50 °C et 100 g d'eau à la température de 10 °C, on obtient 200 g d'eau dont la température n'est pas 60 °C (mais plutôt de l'ordre de 30 °C). On dit que la température est une grandeur non mesurable.
L'interprétation de l'addition des relatifs dans des contextes concrets de grandeurs repérables mais non mesurables (température, altitude, date) nécessite d'attribuer aux deux nombres en jeu des significations différentes. Ainsi, si on souhaite s'appuyer sur le contexte des températures pour introduire ou interpréter l'égalité $3 + (-4) = (-1)$, on peut, par exemple, attribuer aux nombres 3 et (-1) un statut d'état (température initiale de 3 °C et température finale de -1 °C, alors que le nombre (-4) a le statut d'une variation (diminution de 4 °C).

S'ils constituent une aide indéniable pour la compréhension de l'addition, le modèle « gain-perte », ou le modèle « montée-descente » peuvent constituer un réel obstacle à la compréhension de la multiplication de deux nombres, notamment s'ils sont tous deux négatifs.

Les références à l'environnement familier des élèves et leur place dans la progression des apprentissages méritent donc d'être interrogées. Le professeur doit être conscient qu'une approche concrète, en référence à des grandeurs, peut engendrer des obstacles à plus ou moins long terme,

notamment parce qu'il n'est pas possible de trouver un modèle concret permettant d'illustrer la multiplication. Par ailleurs, il faut savoir que certains élèves éprouvent des difficultés à s'affranchir du contexte d'introduction des nombres. Ceux-ci imposent en effet une image mentale dont il peut être difficile de se départir, empêchant *in fine* d'attribuer aux négatifs leur statut de nombre. Il importe donc de ne pas recourir à un unique modèle, par exemple celui des températures. Seule une pratique routinière de calculs additifs et soustractifs permet aux élèves de s'émanciper progressivement des contextes familiers, ce qui est un préalable à une bonne compréhension de la multiplication et de la division, dont les définitions ne peuvent être justifiées qu'à l'intérieur d'un cadre interne aux mathématiques.

Aucun mode d'introduction des nombres négatifs ne peut, à lui seul, permettre l'atteinte de tous les objectifs visés et il y aura nécessairement des obstacles à franchir (par exemple les différents statuts du signe « moins »). Il importe toutefois que l'élève soit capable, en fin de cycle, d'appréhender un nombre négatif comme élément d'un nouvel ensemble de nombres, structuré par des opérations qui prolongent celles des décimaux positifs.

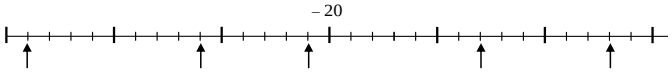
Enfin, l'apprentissage du calcul sur ces nombres ne saurait se confiner à l'application de règles formelles imposées d'emblée à l'élève sans aucune justification.

Différenciation

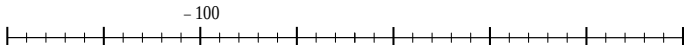
Pour certains élèves, la compréhension des nombres négatifs demande du temps et nécessite le recours à des outils de représentation (contextes concrets, droite graduée) alors que d'autres les utilisent déjà de façon automatisée. Comme cela a déjà dit, ce sont les activités routinières de calcul qui permettent à tous les élèves de s'affranchir progressivement de ces contextes concrets pour appréhender les relatifs comme des nombres. En termes de calcul, la différenciation s'effectue au niveau de l'écriture et de la nature des nombres (entiers, décimaux non entiers, fractions) et du nombre d'étapes. L'utilisation de parenthèses englobant les deux symboles d'écriture d'un nombre négatif et la représentation de l'opposé sous la forme op() peuvent être maintenues plus longtemps pour certains élèves que pour d'autres.

Dans le cadre d'un approfondissement, on peut proposer à certains élèves des activités de repérage pour lesquelles le nombre 0 n'est pas visible sur la partie proposée de la droite graduée, comme dans les deux exemples suivants :

Trouver les nombres qui correspondent aux flèches, sachant qu'une graduation correspond à une unité



Sur la droite graduée ci-dessous, une graduation correspond à une unité.
Placer les nombres – 105, – 81 et – 78



Exemples de situations d'apprentissage

Classes de problème

- repérage de dates, calcul de durées sur une frise chronologique ;
- repérage de distances sur une droite graduée ;
- comparaison de températures, calcul de moyennes de températures ;

- bilans financiers ;
- lecture, interprétation et production de diagrammes et de graphiques faisant intervenir des nombres relatifs ;
- repérage dans le plan et dans l'espace.

Exemples d'activité

- exemples de questions flash

Exemples de tâches intermédiaires :

- le jeu de Jungle math speed
- le labyrinthe
- exemple d'activités avec prise d'initiative : le jeu-concours

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder la notion de nombre relatif avec les élèves :

- Les nombres au collège
- Le calcul numérique au collège
- Enseigner les nombres relatifs au collège – REPÈRES IREM.n°73 – octobre 2008 (IREM d'Aquitaine)
- Des maths ensemble et pour chacun 5e – Jean-Philippe Rouquès et Hélène Staïner – Sceren CRDP Pays de Loire
- Les nombres relatifs en 5e – proposition de Parcours d'Étude et de Recherche. Groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les nombres relatifs

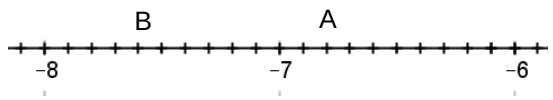
Des exemples de questions flash : activités mentales

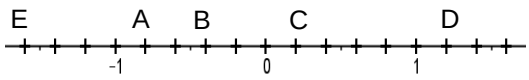
ATTENDU DE FIN DE CYCLE VISÉ ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Calculer. Représenter.

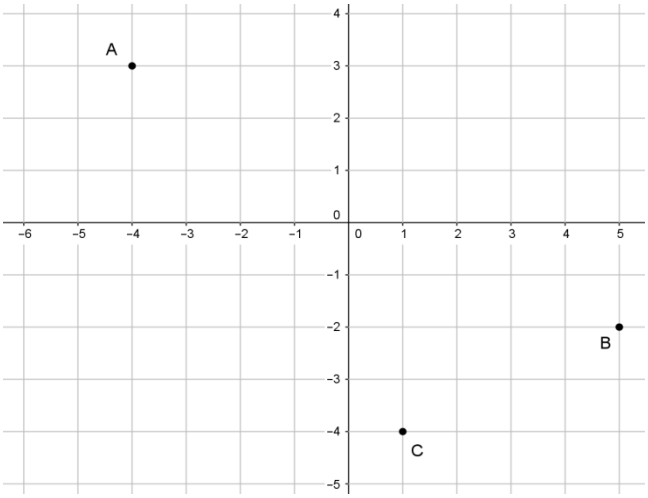
Énoncés

Effectuer : $(-11)+3$	Effectuer : $(-4{,}7)+(-0{,}7)$	Effectuer : $(-4)-(-9)$	Effectuer : $7{,}8-(-0{,}42)$
Effectuer : $3\times(-7)$	Effectuer : $(-0{,}2)\times(-5)$	Effectuer : $(-5)\div 2$	Effectuer : $(-3)\div(-4)$
Effectuer : $\frac{-5}{3}+\frac{7}{3}$	Effectuer : $6\times\frac{2}{-3}$	Effectuer : $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{-1}{4}\right)$	Effectuer : $(-2)\div\frac{3}{2}$
Calculer la somme de (-5) et (-8)	Calculer le produit de (-4) par son opposé	Calculer l'opposé du double de (-6)	Calculer le quotient de (-1) par 4
Écrire (-6) sous la forme de la somme de deux nombres entiers	Écrire (-6) sous la forme du produit de deux nombres entiers	Écrire (-6) sous la forme du quotient de deux nombres entiers	Calculer les deux tiers de (-36)
Quel est le nombre qui, ajouté à (-3) donne 5 ?	Quel est le nombre qui multiplié par (-8) donne 4 ?	$5+\ ?=-2$	$(-10)\times ?=-2$
Qui est le plus grand : (-5,2) ou (-5,4) ?	Qui est le plus petit : (-5,7) ou (-5,12) ?	Qui est le plus près de zéro : (-4,7) ou 4,13 ?	Qui est le plus près de (-1) : (-1,1) ou (-0,92) ?





Vrai ou faux ? L'abscisse de A est -7,2.	Vrai ou faux ? L'abscisse de A est plus grande que l'abscisse de B.	Quel est le point d'abscisse : $-\frac{8}{5}$?	Quel est le point d'abscisse : $-1+\frac{6}{10}$?
Résoudre l'équation : $x+(-4)=11$	Résoudre l'équation : $-3x+2=8$	Résoudre l'équation : $2x-1=-13$	Résoudre l'équation : $\frac{1}{3}\times x=-4$
Donner un couple de nombres autre que (7,9) vérifiant ? – ? = 7 – 9 ? – ? = 7 – 9	Donner trois couples de nombres vérifiant 15 + (? – ?) = 3 15 + (? – ?) = 3		
(-2) est-il solution de l'équation : $3x+1=-5$?	Développer : $-3(4-x)$	Factoriser : $-5x+10$	Quelle est l'image de (-4) par la fonction *f* qui, à tout nombre *x*, associe $-3x+7$.



Quelles sont les coordonnées du symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses ?	Quelles sont les coordonnées du symétrique de B par rapport à l'origine du repère ?	Quelles sont les coordonnées du symétrique de C par rapport à l'axe des ordonnées ?	Quelles sont les coordonnées du point D, quatrième sommet du parallélogramme ABCD ?

Pistes pédagogiques

Les séances d'activités mentales sont de préférence courtes mais fréquentes : il ne s'agit pas de poser toutes les questions lors d'une même séance, mais de mélanger les questions relevant de différents registres dès que l'avancement dans l'apprentissage des nombres relatifs le permet.

Dans ce type de situation, les énoncés sont donnés successivement ; les élèves sont invités à n'écrire que la réponse, la démarche nécessaire à la résolution de l'exercice étant gérée mentalement.

Une phase de mise en commun permet ensuite, lors d'un débat dans la classe, de valider ou d'invalider les réponses fournies.

Les activités mentales favorisent l'exploration des nombres relatifs selon les différents registres (langagier, numérique, algébrique, graphique) dans lesquels ils peuvent apparaître. La construction du sens de ces nombres et des opérations afférentes sera favorisée par une pratique régulière, sur toute la durée du cycle 4, de situations articulant ces différents registres.

Les temps de mise en commun succédant à la recherche individuelle fourniront aux élèves l'occasion de formuler leurs démarches et contribueront au repérage des erreurs liées à une compréhension non aboutie.

Dans ce type d'activité, une différenciation peut aisément s'opérer en jouant sur les types de nombres (entiers, décimaux, fractions), sur les relations entre ces nombres, ainsi que sur le niveau de difficulté des procédures de calcul mental dont la mobilisation est nécessaire.

La pratique régulière d'activités mentales sur toute la durée du cycle rend possible la construction d'automatismes de calcul numérique puis littéral utilisant des nombres relatifs. Ces automatismes ont vocation à être mis au service de la résolution de problèmes.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les nombres relatifs

Un exemple de tâche intermédiaire : jungle Math Speed

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

En développant la capacité « calculer mentalement avec des nombres relatifs », cette situation d'apprentissage participe à la construction de l'attendu de fin de cycle « utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes ».

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Calculer, communiquer.
Cette activité peut en effet donner lieu à un débat entre élèves et mobiliser la capacité d'argumentation

Énoncé

Cette situation est une adaptation mathématique » du jeu de société jungle speed.
Il s'agit d'un jeu de cartes pour 3 joueurs et plus. Les cartes sont conçues pour que les nombres inscrits sur plusieurs d'entre elles aient la même valeur (voir ci-dessous quelques exemples de cartes).
Ce jeu mobilise le calcul mental sur les nombres relatifs puisqu'il s'agit d'effectuer le plus rapidement possible les opérations proposées sur les cartes du jeu.

Règles du jeu

Avant de commencer, on distribue le même nombre de cartes à chacun des joueurs.
On choisira un « totem » (par exemple un tube de colle) qui est placé au centre de la table.
Chaque joueur place son paquet de cartes devant lui, faces cachées. Ces cartes constituent sa « réserve ». Tous les joueurs retournent leur première carte : celui qui a la carte de plus grande valeur commence ; en cas d'égalité entre plusieurs joueurs, ceux-ci retournent une deuxième carte. Les cartes retournées (face découverte) constituent, pour chaque joueur, un deuxième tas, appelé son « tribut ».

Les joueurs, en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, retournent successivement la première carte de leur réserve et la placent devant eux, de manière à ce qu'elle soit visible par l'ensemble des joueurs. En cas d'égalité des valeurs de deux cartes, les joueurs qui les possèdent sont autorisés à attraper le totem. Le joueur le plus rapide pour attraper le totem doit justifier aux autres joueurs l'égalité des valeurs des deux cartes.
Sous réserve de la validation de sa justification (par les autres joueurs ou par le professeur), il donne son tribut à son adversaire qui le place dans sa réserve. Sinon, il garde son tribut.
Si un joueur attrape le totem par erreur, il reçoit les tributs de tous les autres joueurs.

La partie se poursuit dans les mêmes conditions, après retournement, par chaque joueur, de la carte suivante de sa réserve.

Fin de partie : le professeur fixe la durée maximale de la partie (de l'ordre de10 minutes), mais celle-ci peut s'arrêter avant si un joueur s'est débarrassé de toutes ses cartes. Dans tous les cas, le vainqueur est celui à qui il reste le moins de cartes en sa possession. Lorsqu'on effectue plusieurs parties à la suite, des scores sont établis selon le nombre de cartes possédées par les joueurs à la fin de chaque partie : le gagnant d'une partie obtient 4 points, le deuxième, 2 points et le troisième 1 point. Les autres joueurs n'ont pas de point.

Variante : entre chaque partie, une nouvelle carte peut être créée par chacun des joueurs. Ces cartes sont alors ajoutées au jeu avant distribution.

Quelques exemples de cartes

1ER JEU						
-2 + (1)	4 + (-1)	-1,5 × (-2)	3	(-3) + 1	-2	(-5) + 5
2 + (-2)	(-10) × 0	1 + (-1)	(-6) × (-1)	3 × (-2)	(-5)	3 + (2)
5 × (-1)	(-3) – 2	4	(-2) × (-2)	2 + 2	2 – (-2)	(-6)+3

2E JEU						
5 + (-15)	-10	(-2) + (-2)	(-2) × 2	(-4)	(-2) + 7	(-2,5) × (-2)
20 – 15	6 + (-1)	(-5) × 2	5	9 + (-1)	(-2) × 2 × (-2)	7 – (-1)
(-4) × (-2)	8	(-1) × 6	(-10) + 4	(-7) + 1	(-6) × 1	3 × (-2)
9 – (-1)	15 + (-5)	-6	0,5 × 20	(-5) × (-2)	10	(-2) + (-1)

Pistes pédagogiques

À chaque retournement de carte, il est nécessaire d'amener les élèves à débattre pour parvenir à un accord ; le professeur veille à faire évoluer progressivement la rigueur de formulation des arguments.

La rapidité nécessaire conduit à la construction progressive d'automatismes.
Une différenciation peut aisément s'opérer, en faisant varier la difficulté des calculs proposés sur les cartes ainsi que les valeurs des nombres.

Sur le même principe, on peut créer des cartes pour un jeu qui permettra de travailler la reconnaissance des différentes écritures d'un même nombre, le calcul avec les décimaux ou les fractions, le calcul littéral, les conversions, la reconnaissance d'une même information exprimée dans différents registres, dans le domaine des fonctions ou en géométrie.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les nombres relatifs

Un exemple de tâche intermédiaire : le labyrinthe

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

En développant la capacité « calculer mentalement avec des nombres relatifs », cette situation d'apprentissage participe à la construction de l'attendu de fin de cycle « utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes ».

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

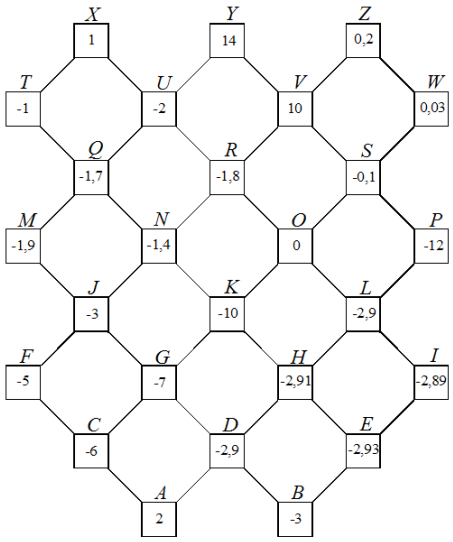
Chercher, communiquer.

Énoncé

Cet exercice est extrait de l'ouvrage Des maths ensemble et pour chacun, classe de 5e, Jean-Philippe Rouquès, Hélène Staïner, Jacques Moisan, Françoise Munck, CRDP des Pays de Loire, Nantes, 2010.

Il s'agit de trouver son chemin dans le labyrinthe représenté ci-dessous en suivant les règles suivantes :

- le départ se fait en A ou en B ;
- arrivée en X, Y ou Z ;
- au départ en A (ou B), il n'y a qu'une seule manière de se diriger vers la gauche (partant de A, aller vers C et partant de B aller vers D) et qu'une seule manière de se diriger vers la droite (partant de A, aller vers D et partant de B aller vers E). Partant d'un point comme G, il y a deux manières de se diriger vers la gauche (vers C ou vers J) et deux manières de se diriger vers la droite (vers D ou K) ;
- on ne peut se diriger vers la droite que pour aller vers un nombre plus grand et on ne peut se diriger vers la gauche que pour aller vers un nombre plus petit.



Pistes Pédagogiques

Pour démarrer l'activité et s'assurer que tous les élèves ont bien compris les règles, il peut s'avérer pertinent de simuler au tableau un labyrinthe comprenant seulement quelques carrés. Le choix des nombres (entiers ou décimaux) et la taille du labyrinthe sont des paramètres sur lesquels peut jouer le professeur pour mettre en œuvre une différenciation pédagogique.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les nombres relatifs

Un exemple d'exercice à prise d'initiative : jeu-concours

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

La réussite en autonomie de cet exercice permet d'évaluer positivement l'attendu de fin de cycle : « Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes »

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, raisonner, calculer, communiquer.

Énoncé

Un jeu-concours de mathématiques comporte 20 questions à choix multiples. Le classement des concurrents est déterminé selon le barème suivant :

- Bonne réponse : 5 points
- Réponse fausse : -3 points
- Absence de réponse : -2 points

1. Elvis n'a répondu qu'à 12 questions et 10 de ses réponses sont correctes ;
   Léa a répondu à toutes les questions ; 7 de ses réponses sont fausses ;
   Il n'y a que 5 questions auxquelles Mehdi n'a pas répondu, et il a fait 4 erreurs.
   Quel est le classement de Léa, Elvis et Mehdi ?
2. Dominique a obtenu un score nul. Peut-on trouver combien de réponses correctes il a obtenues ?
3. Le jury du concours décide de modifier le barème.

Est-il possible que le classement de Léa, Elvis et Mehdi soit inversé ?

Pistes Pédagogiques

Pour mener ce travail de recherche en classe, un travail en groupes peut être conseillé. L'usage d'un tableur est également possible, à la demande des élèves.
La question 2 présente un intérêt au niveau de la recherche puisqu'il y a deux solutions à trouver ; il y a donc lieu d'amener les élèves à s'interroger sur l'exhaustivité des solutions.
L'utilisation du tableur ne nécessite pas de connaissances expertes mais sa manipulation suppose de la part de l'élève une certaine autonomie. Suivant les besoins apparaissant dans la recherche de la question 3, il peut être intéressant d'introduire des références absolues (en faisant intervenir le caractère « $ »).

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Puissances

Objectifs

La notion de puissance n'intervient pas au cycle 3. Il revient donc au cycle 4 d'introduire cette *cinquième opération*. L'objectif est d'abord, à partir de situations numériques qui la motivent, d'amener la notation exponentielle comme un raccourci d'écriture, puis de familiariser l'élève à sa compréhension et à son usage. L'élève peut découvrir les opérations sur les puissances au gré des calculs, à partir des écritures développées qui en donnent une image mentale. Ces propriétés peuvent être mises en évidence par le professeur, sur des exemples génériques, mais leur formalisation n'est pas un attendu de fin de cycle. Exemple : pour le calcul de $3^8 \times 3^2$, il convient d'installer l'image mentale des facteurs (huit facteurs 3 d'une part, deux de l'autre) pour visualiser le résultat sous forme de dix facteurs 3. L'apprentissage sur les puissances se construit sur le sens, à partir de situations issues des mathématiques ou des domaines scientifiques et technologiques. La calculatrice et le tableur, ainsi que les algorithmes de calcul, enrichissent la compréhension tout en facilitant les calculs. Les activités mentales, fréquentes et régulières, permettent à l'élève de construire des automatismes.

Liens avec les domaines du socle

La notation d'une multiplication itérée sous forme de puissance permet d'effectuer de manière efficace certains calculs en utilisant un langage mathématique adapté (domaine 1). Il en est de même de la notation scientifique.
Par ailleurs, les puissances constituent un outil de modélisation permettant de résoudre des problèmes qui relèvent notamment des systèmes naturels et des systèmes techniques (domaine 4). Les puissances de dix fournissent une interprétation commode des ordres de grandeur.

Progressivité des apprentissages

Le cas des puissances de dix d'exposant entier naturel, prenant appui sur l'écriture décimale déjà envisagée au cycle 3, fait l'objet d'une étude en soi dès la classe de 4e, en liaison avec les problèmes scientifiques ou technologiques. Les exposants négatifs d'une puissance de dix sont introduits avec progressivité, en fin de 4e ou en début de 3e. La définition des exposants 1 et 0, ainsi que celle des exposants négatifs, sont amenées avec précaution, par exemple en examinant pour le nombre 10^n ($n \geqslant 2$) l'effet sur l'exposant de divisions successives par 10.
Pour une base quelconque, les exposants positifs sont envisagés en classe de 4e ou de 3e, en fonction de la progression retenue. La notation a^n peut être introduite avec les exposants 2 et 3 comme un raccourci d'écriture exprimant par exemple l'aire d'un carré ou le volume d'un cube ; pour n entier relatif quelconque, on peut l'amener si elle prend sens à travers une situation donnée, mais sa maîtrise n'est pas un objectif du collège.

Stratégies d'enseignement

Du cas particulier des puissances de dix au cas général

Le programme du cycle 4 autorise soit d'initier un travail spécifique sur les puissances de dix, et de le prolonger aux puissances de base quelconque, soit d'adopter la démarche inverse, qui consiste à passer du cas général au cas particulier. La première démarche est toutefois recommandée, car elle respecte davantage la possibilité d'instaurer une progression de cycle différenciée. Avec cette démarche la notation a^n, pour un nombre a quelconque et n entier naturel, peut être amenée soit en fin de 4e soit en 3e. D'autre part, il est important que l'élève soit familiarisé au plus tôt avec les puissances de dix afin d'être mieux préparé à leur usage dans les sciences appliquées et la technologie.

Introduire les puissances de dix

La notation $10^{\cdots}$ n'est à aucun moment mentionnée dans le programme du cycle 3. Il est cependant possible que des élèves l'aient côtoyée avant le cycle 4, avec l'idée reçue selon laquelle l'exposant, qu'il soit positif ou négatif, est lié au nombre de zéros dans l'écriture décimale. Cette conception peut s'avérer utile dans la manipulation des puissances de dix en écriture décimale, mais elle présente deux inconvénients :

- l'un est d'ordre mathématique, car le nombre « dix puissance n » doit être défini de façon intrinsèque, c'est-à-dire sans référence à une base d'écriture ;
- l'autre est didactique, car le fait de définir une puissance de dix en fonction du nombre de zéros peut occasionner un obstacle important dans la compréhension des puissances d'un autre nombre.

Il est donc préférable de définir une puissance de dix d'exposant supérieur ou égal à deux à partir du produit itéré, quitte à remarquer par la suite le lien avec le nombre de zéros de l'écriture décimale.

Construire l'apprentissage sur le sens des notions

L'apprentissage sur les puissances doit profitablement se fonder sur des **situations** qui la motivent. Celui des puissances de dix peut prendre appui sur des grands nombres issus de domaines scientifiques ou technologiques tels que l'astronomie, les sciences physiques, l'informatique, le traitement de l'information, pour ce qui est des exposants positifs.
Les sciences de l'atome, la microbiologie, les sciences chimiques, les nanotechnologies fournissent des situations propices à côtoyer les exposants négatifs. Le thème « Organisation et transformations de la matière » du programme de physique-chimie se prête bien à une articulation avec les mathématiques. L'apprentissage des puissances de base quelconque peut être motivé par des situations mathématiques mettant en œuvre un produit itéré, comme le comptage de situations répétitives, ou l'observation de situations fractales dans la nature, les arts visuels, etc. Ces situations doivent motiver les apprentissages, mais aussi les nourrir en permanence à travers des problèmes porteurs de sens.

Notation scientifique, ordre de grandeur

- Tout nombre décimal non nul peut se noter sous la forme $A \times 10^n$, où A est un nombre décimal vérifiant $1 \leqslant A < 10$ et n est un entier relatif. Cette écriture est la **notation scientifique** du décimal, qu'il convient d'introduire sur des exemples numériques. Elle peut être rattachée à ses nombreuses utilisations en physique-chimie, dans le domaine du calcul de grandeurs et celui des conversions d'unités.
- L'élève doit apprendre à utiliser la **syntaxe de sa calculatrice** relativement à la notation scientifique, pour la lecture et pour l'écriture.
- La notion d'**ordre de grandeur** peut être rattachée à la valeur de l'exposant n dans la nota-

tion scientifique. S'agissant de certaines grandeurs, cette notion donne l'occasion d'établir un lien avec les préfixes des unités multiples mentionnées dans le programme (kilo = 10^3, méga, giga, ou milli, micro, nano), ou peut-être d'autres (téra, pico ...) s'ils interviennent dans une situation donnée.

Introduction des exposants 0 et 1, des puissances négatives

La définition des exposants 0 et 1, de même que celle des exposants négatifs, demandent certaines précautions car il ne s'agit plus de produits itérés. Pour en faire accepter les définitions, une possibilité consiste à faire observer sur un exemple numérique le fait que, pour une puissance d'exposant positif, une division par la base revient à diminuer l'exposant d'une unité :

	NOMBRE	ÉCRITURE DÉVELOPPÉE	EXPOSANT
	10^4	10×10×10×10	4
÷10 →	10^3	10×10×10	3
÷10 →	10^2	10×10	2

En s'affranchissant de l'écriture développée, il est acceptable – et même intéressant – de poursuivre la décrémentation de l'exposant par des divisions successives. Cela permet de définir successivement :

$$10 = 10^1 \; ; \; 1 = 10^0 \; ; \; \frac{1}{10} = 10^{-1} \; ; \; \frac{1}{10\times10} = 10^{-2} \; ; \text{ etc.}$$

Le développement précédent est un exemple générique au sens suivant : le procédé conduit avec le nombre 10 serait analogue en substituant au nombre 10 une base a quelconque ($a \neq 0$). On pourra établir le lien entre la notation des puissances et les unités utilisées en physique-chimie ou dans le thème grandeurs et mesures, telles que vitesse, volume, concentration, masse volumique, débit, etc. : $m.s^{-1}$, m^3, $kg.m^{-3}$, $l.s^{-1}$, etc.

Utilisation des outils numériques et de l'algorithmique

Les calculatrices et logiciels ont une syntaxe permettant le calcul des puissances. L'élève doit dans un premier temps se familiariser avec celle-ci. Un algorithme itératif de calcul peut être intéressant à mettre en œuvre :

- avec un tableur, pour dresser la liste de puissances successives d'un même nombre ;
- avec le logiciel *Scratch*, qui ne possède pas la touche d'exposant.

Par ailleurs, certaines situations font intervenir des multiplications itérées et, de ce fait, se prêtent bien à une activité algorithmique.

Exemple : la croissance d'une population de bactéries (voir dans les exemples de tâche intermédiaire).

Différenciation

Sur le thème des puissances, la différenciation peut s'exercer à travers plusieurs pistes. Elle relève d'abord de l'écriture exponentielle, qui peut demeurer au stade numérique pour les élèves n'ayant pas la maturité suffisante pour comprendre une définition littérale. Cela n'empêche pas de leur proposer des situations qui se modélisent par des itérations de multiplications. La différenciation peut également s'exercer dans la formalisation de certaines propriétés calculatoires, telle que $3^4 \times 3^5 = 3^{4+5}$, qu'il n'est pas interdit de souligner dès lors que l'élève a lui-même remarqué ces propriétés à partir d'une pratique visuelle des produits développés, et sans pour autant que ces propriétés soient exigibles.

Exemples de situations d'apprentissage

Classes de problèmes

- problèmes de nature scientifique et technologique ;
- calculs d'ordres de grandeur ;
- infiniment grand et infiniment petit ;
- multiples et sous-multiples de grandeurs usuelles ;
- situations multiplicatives simples de dénombrement ;
- situations fractales en géométrie.

Exemples d'activités

- Exemples de questions flash
- Exemples de tâches intermédiaires :
  - Curiosités numériques
  - Nombres de Mersenne et nombres parfaits
  - Croissance d'une population de bactéries
  - Multiples de l'octet
  - Dilution en homéopathie
- Exemples d'activités avec prise d'initiative :
  - Tous cousins
  - L'arbre fractal

Interdisciplinarité

La notion de puissance se prête bien à des activités interdisciplinaires et trouve toute sa place dans le cadre des EPI (enseignements pratiques interdisciplinaire). Par exemple :

- Dans la thématique « Corps, santé, bien-être et sécurité » : les unités CH en homéopathie ;
- Dans la thématique « Culture et création artistiques » : les fractales ;
- Dans la thématique « Information, communication et citoyenneté » : le stockage de données numériques sur un support (disque dur, clé USB, ...), la transmission d'information ;
- Dans la thématique « Sciences, technologie et société » : l'infiniment grand et l'infiniment petit, la rapidité des processeurs ;
- Dans l'enseignement « Monde économique et professionnel » : la modélisation plane pour traiter certains problèmes liés au monde économique et professionnel.

Ressources complémentaires

La ressource proposée ci-après constitue un complément et un approfondissement utiles pour aborder la notion de puissance avec les élèves :

- Laure Guérin, La démarche d'investigation à travers un parcours d'étude et de recherche, exemple des puissances en classe de 4e, IREM de Clermont-Ferrand.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Puissances

Un exemple d'activité avec prise d'initiative : l'arbre fractal

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes :
- calculer avec des fractions ou des nombres décimaux ;
- effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances ;
- vérifier la vraisemblance d'un résultat, en estimant son ordre de grandeur.

Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques :
- comprendre l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs et les aires.

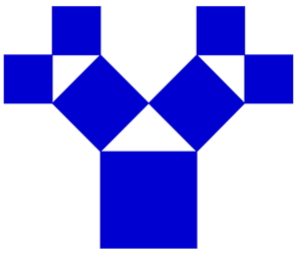
Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer :
- triangles semblables ;
- théorème de Pythagore.

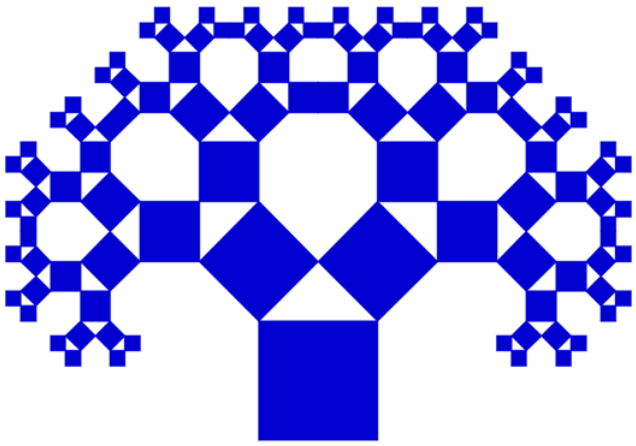
COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, représenter, calculer, raisonner, communiquer.

Énoncé [3e]

On veut décorer le mur d'une salle de classe en y peignant un arbre stylisé, construit à partir de carrés de la façon suivante :

ÉTAPE 0	ÉTAPE 1	ÉTAPE 2
On part d'un carré de côté 80 cm, peint à partir du sol.	On construit deux autres carrés analogues, en laissant un vide en forme de triangle rectangle isocèle.	Sur chaque carré construit à l'étape 1, on construit deux autres carrés à l'extérieur, comme à l'étape 1.
		



On continue jusqu'à l'étape 4, en rajoutant chaque fois deux carrés sur ceux construits à l'étape d'avant. À partir de l'étape 5, on ne construit les nouveaux carrés que s'ils ne chevauchent pas les précédents. La figure ci-dessus représente l'arbre à l'étape 6.

1. Déterminer le côté des carrés construits à l'étape 2, à l'étape 3, à l'étape 7.
2. On réalise l'arbre, jusqu'à ce qu'il atteigne le plafond de la salle, haut de 3 mètres, et on le peint en bleu. Chaque pot de peinture contient 0,5 L, et chaque litre de peinture permet de recouvrir 3 mètres carrés. Marie affirme que quatre pots de peinture suffiront. A-t-elle raison ?

Pistes pédagogiques

Réponses

1. À l'étape n, le côté (en cm) des nouveaux carrés est égal à $80\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$. Cette expression n'est cependant pas attendue des élèves, qui peuvent obtenir des valeurs approchées des côtés des carrés. On valorise même les réponses partielles.
2. Les étapes successives augmentent la hauteur de l'arbre selon les dimensions suivantes (en cm) : 80 (étape 0) ; 80 ; 40 ; 40 ; 20 ; 20 ; 10 ; 10 (étape 7). La hauteur de plafond est atteinte à la 7e étape, puisque la somme des hauteurs précédentes est juste égale à 300 cm. Les aires successives sont, après chaque étape (en m^2) : 0,64 ; 1,28 ; 1,92 ; 2,56 ; 3,20 ; 3,76 ; 4,24 ; 4,62. Il faut un peu plus de 3 pots de peinture, donc Marie a raison.

Scénarios de classe et aides possibles

L'activité se prête particulièrement bien à un travail de groupe « filé » sur plusieurs semaines. Elle sera d'autant plus motivante qu'elle aboutira à une réalisation effective, qui peut associer plusieurs disciplines, notamment les arts plastiques et la technologie.

Photo d'un mur de la salle de classe
(Photo : Pierre Jacquemant)

Le professeur peut apporter des aides différenciées, selon le niveau d'avancement de la tâche (ou des sous-tâches) confiée(s) aux élèves :

- travailler sur la figure à l'étape 1 (dessin en vraie grandeur, calcul de coefficient de réduction d'un carré à l'autre, effet sur l'aire, vérification sur un logiciel de géométrie) ; l'élève peut travailler avec un coefficient de réduction arrondi décimal, tel que 0,707 ;
- remarquer qu'à chaque étape impaire, la hauteur augmente de la longueur du carré de l'étape paire qui précède ;
- remarquer que la surface augmente de 0,64 m^2 à chaque étape, jusqu'à l'étape 4 ;
- etc.

Cette activité peut faire l'objet d'un développement dans le cadre d'un EPI relatif à la thématique : « Culture et création artistiques ».

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Puissances

Un exemple de tâche intermédiaire : croissance d'une population de bactéries

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes :
- définition des puissances d'un nombre (exposant entier positif) ;
- pratiquer le calcul exact, à la main ou instrumenté.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Représenter, modéliser, calculer.

Énoncé [4e – 3e]

Un laboratoire effectue des recherches sur le développement d'une population de bactéries dans un milieu clos. Les chercheurs observent que le nombre de bactéries triple toutes les heures.

À 0 heure, il y a 4 bactéries.

1. Déterminer le nombre de bactéries ; à 1 heure ; à 2 heures ; à 5 heures.
2. Exprimer le nombre de bactéries à 24 heures.
3. Afin d'afficher le nombre de bactéries à chaque heure, l'un des chercheurs utilise un tableur (voir ci-contre). Quelle formule a-t-il entré dans la cellule B3 afin d'afficher dans la colonne B, par recopie vers le bas, les résultats voulus ?
4. Calculer les valeurs donnant le nombre de bactéries sur une calculatrice ou un tableur, de 0 heure à 24 heures.

	A	B
1	Heure	Nombre de bactéries
2	0	4
3	1	12
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	
13	...	
14		

Source : Laure Guérin, La démarche d'investigation, l'exemple des puissances, IREM de Clermont-Ferrand

Pistes pédagogiques

Cette activité peut être utilisée soit pour introduire les puissances de base quelconque et la notation exponentielle, qui représente ici un raccourci d'écriture convaincant, soit comme application de la définition déjà donnée.
Dans la question 2, l'expression est demandée sous la forme d'une écriture synthétique du type 4×3^{24} (si les puissances sont déjà connues) ou $4 \times 3 \times \ldots \times 3$ (24 facteurs 3) dans le cas contraire. Il peut être utile d'introduire un arbre, initié pour les premières étapes, pour faire comprendre le principe multiplicatif qui guide le dénombrement. Il est en effet intéressant

d'installer chez les élèves une image mentale arborescente qui sera mobilisée dans bien d'autres situations du cursus d'études (suites géométriques, probabilités, ...).

Prolongement

On peut poser la question de la population au bout de 36 heures ou de 48 heures, en conservant le même modèle d'évolution. La notion de milieu clos peut aussi occasionner un débat sur la validité du modèle. La lecture du résultat, affiché sur une calculatrice ou un tableur, fait intervenir l'écriture scientifique, qui peut être exploitée.
On peut envisager d'autres activités analogues : chaînes téléphoniques, triangle de Sierpinski (dénombrement des triangles), etc.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Puissances

Un exemple de tâche intermédiaire : curiosités numériques

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes :
- définition des puissances d'un nombre (exposant entier positif) ;
- effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances ;
- pratiquer le calcul exact, à la main ou instrumenté.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, calculer, communiquer.

Énoncé [4e – 3e]

Utiliser la calculatrice ou un tableur pour vérifier ou compléter chacune des égalités suivantes.

a) $9^3 + 5^3 + 2^3 + 9 \times 5 \times 2 = 952$.

b) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = (\ldots)^2$.

c) $4^4 + 6^4 + 8^4 + 9^4 + 14^4 = (\ldots)^4$.

d) $4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 = (\ldots)^5$.

Pistes pédagogiques

Cet exercice met en jeu les priorités calculatoires s'il est effectué avec une calculatrice.
Pour les questions b), c), d), l'initiative des élèves doit s'exercer. Ces questions peuvent faire l'objet d'un travail de groupe. Après un temps de recherche, et à défaut d'initiative, on peut donner aux élèves les aides suivantes :
- calculer d'abord le membre de gauche à l'aide de la calculatrice ou du tableur ;
- dresser ensuite à l'aide d'un tableur une table des carrés, puissances quatrième, cinquième, des premiers entiers naturels.

Pour le calcul de la somme $1+ 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4$, un travail intéressant peut être conduit en utilisant le tableur.

Prolongement

On peut demander aux élèves de vérifier l'égalité $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ pour des valeurs numériques fixées de l'entier naturel n.
L'entier n est une variable didactique qui peut conduire à différencier la tâche en fonction des élèves.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Puissances
Exemples de questions flash

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes :
- définition des puissances d'un nombre (exposant entier positif et négatif) ;
- effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances, notamment en utilisant la notation scientifique ;
- diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale, notation scientifique) ; passer d'une représentation à l'autre.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Représenter, calculer.

Énoncés

Question flash 1 [4e]

Exprimer sous la forme d'une puissance de dix chacun des nombres suivants :
1 000 ; 100 000 ; 10 ; 0,01 ; 0,000 1 ; 1

Question flash 2 [4e-3e]

Exprimer sous la forme d'une puissance de 2 chacun des nombres suivants :
4 ; 32 ; 512 ; 2 ; 1024 ; $2^5 \times 2^3$

Question flash 3 [4e]

Écrire en notation scientifique le nombre intervenant dans la phrase suivante :
« La masse du Soleil est environ égale à 1 989 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kg (les chiffres 1 989 sont suivis de 27 zéros). »

Question flash 4 [4e]

Le proton et le neutron sont deux particules composant le noyau des atomes.
Leur taille est environ égale à 10^{-15} m.
Exprimer cette taille en millimètre (mm), puis en micromètre (µm).

Question flash 5 [3e]

Le nombre 10^{-6} est égal à l'un des nombre suivant. Lequel ?
-6 ; -60 ; -10^6 ; 0.000 000 1 ; un millionième

Question flash 6 [3e]

Ariane affirme que 2^{40} est le double de 2^{39}. A-t-elle raison ?
(d'après DNB 2015, sujet national)

Question flash 7 [4e-3e]

Que fait le programme Scratch suivant ?

Pistes pédagogiques

Ces exercices permettent de mobiliser les connaissances et savoir-faire de base sur les puissances. Ils contribuent à construire les automatismes de l'élève, et peuvent être utilisés en autoévaluation. Les différents énoncés peuvent être posés de manière indépendante.

Dans les questions 1, 2 et 5, on peut restreindre le nombre de réponses possibles : deux, trois, ...

La question 5, avec la valeur 2 ou d'autres valeurs, illustre par un exemple la nécessité d'entretenir souvent le lien entre différentes représentations d'un nombre : sous forme exponentielle, par une écriture décimale et, le cas échéant, à l'aide d'une phrase.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Puissances
Un exemple de tâche intermédiaire : dilution en homéopathie

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes :
- définition des puissances d'un nombre (exposant entier positif) ;
- effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances ;
- utiliser diverses représentations d'un même nombre (pourcentage et écriture décimale, écriture décimale et notation scientifique) ;
- vérifier la vraisemblance d'un résultat, en estimant son ordre de grandeur.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Représenter, calculer, raisonner, communiquer.

Énoncé [4e – 3e]

En homéopathie, on dilue dans de l'eau une teinture mère contenant une substance active. Le degré de dilution s'exprime en CH, abréviation de *centésimale hahnemannienne* (du nom de Samuel Hahnemann, l'un des pères de l'homéopathie).

On obtient la dilution 1 CH en mélangeant 1 volume de teinture mère, contenant la substance, avec 99 volumes d'eau. Ainsi une solution à la dilution 1 CH contient 1 % de la substance active. Autrement dit, dans un volume de solution à la dilution 1 CH, le nombre de molécules de substance active présentes est multiplié par 0,01, ou encore divisé par 100, par rapport au nombre de molécules présentes dans un volume égal de teinture mère.

On recommence ce procédé pour obtenir les dilutions suivantes : 2 CH (mélange d'un volume de solution 1 CH et de 99 volumes d'eau), 3 CH (1 volume de solution 2 CH et 99 volumes d'eau), etc.

Voici deux extraits adaptés de l'encyclopédie en ligne *Wikipédia*.

Extrait 1

Il existe des dilutions pouvant atteindre 30 CH, soit une dilution par 10^{-60} de la teinture mère. Il est impossible de se représenter concrètement la petitesse extrême d'un tel chiffre. À titre de comparaison, le Soleil contient environ 10^{57} atomes et on estime que la partie observable de notre univers contient 10^{80} atomes. Un seul atome dilué dans la masse de mille soleils représente donc 30 CH et un seul atome dilué dans l'univers représente 40 CH.
Pour un volume de teinture mère à l'état pur, et contenant 10^{+24} molécules de substance active (un peu plus d'une mole), les dilutions successives contiennent les nombres suivants de molécules de substance active :

CH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	>12
Nombre de molécules de substance active	10^{22}									10^{4}	100	1	0

À une dilution de 12 CH, et a fortiori de 15 CH et plus, la totalité des flacons ou des granules fabriqués ne comprend statistiquement plus une seule molécule de substance active.

Extrait 2

Divers travaux expérimentaux ont été menés pour tenter de mettre en évidence une influence des dilutions extrêmes sur des phénomènes physiques ou chimiques observables.
Ces travaux constituent des pistes de recherche pour étudier un éventuel effet physique mesurable des solutions très diluées. L'hypothèse étant que l'oxygène dissous dans l'eau conserverait une « mémoire » statique de la substance ayant subi la méthode de préparation homéopathique et qu'elle transmettrait cette mémoire aux granules de sucre.

1. Compléter le tableau figurant dans l'extrait 1.
2. Réaliser un petit texte qui explique le principe de la dilution et des unités CH et, en utilisant les deux extraits de Wikipédia, qui présente les arguments des adversaires de l'homéopathie et ceux de ses adeptes

Pistes pédagogiques

Cette activité se prête bien à un travail de groupe, en classe ou hors la classe, et à une restitution sous forme d'exposé.

Outre les compétences mathématiques mentionnées en introduction (représenter, calculer, raisonner, communiquer), elle mobilise des compétences plus transversales : recherche documentaire, travail collaboratif, utilisation des outils numériques (avec une restitution sous forme de diaporama), débat et argumentation scientifiques.

Des aides différenciées peuvent être apportées aux élèves pour expliquer ce qu'est l'homéopathie, ou pour comprendre le principe de dilution décrit dans l'énoncé du problème.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Puissances

Un exemple de tâche intermédiaire : l'octet et ses multiples

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes :
- définition des puissances d'un nombre (exposant entier positif) ;
- effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances ;
- vérifier la vraisemblance d'un résultat, en estimant son ordre de grandeur ;
- pratiquer le calcul exact ou approché, à la main ou instrumenté ;
- les préfixes de kilo à giga (et autres).

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, représenter, calculer, raisonner, communiquer.

Énoncé [4e – 3e]

1. En informatique, l'information est codée à partir de bits, qui ne prennent que deux valeurs : 0 et 1. Un octet est un regroupement de 8 bits. Combien d'informations différentes peuvent être codées sur un octet ?
2. Les capacités de stockage des mémoires informatiques (disques durs, clé USB, ...) utilisent un grand nombre d'octets. Cela conduit à utiliser des multiples de l'octet, dont voici les principaux :

NOM	SYMBOLE	NOMBRE D'OCTETS
Kilooctet	ko	10^3
Mégaoctet	Mo	10^6
Gigaoctet	Go	10^9
Téraoctet	To	10^{12}
Pétaoctet	Po	10^{15}
Exaoctet	Eo	10^{18}

À l'aide des unités précédentes, donner un ordre de grandeur de la taille d'un fichier relatif aux données suivantes :

- une photographie numérique ;
- l'ensemble des données circulant sur le web en 2015 ;
- un texte de dix lignes sur un traitement de textes ;
- l'ensemble des données générées chaque année à travers le monde ;
- la capacité d'un disque dur vendu en 2015 ;
- un DVD.

3. Sur un appareil photo numérique, un professionnel choisit la résolution 2400 × 3200, qui est excellente. Cela signifie que chaque photo est codée sur un rectangle contenant 2400 pixels en hauteur et 3200 en largeur. Chaque pixel est lui-même codé sur 24 bits.
Combien de photos analogues peut-il faire tenir sur une carte SD de 32 Go ?

Pistes pédagogiques

Aides possibles

Pour la question 1, on peut indiquer à l'élève :

- d'écrire le codage de quelques octets (10011110, 01011101, ...) ;
- d'initier un arbre de comptage pour découvrir le principe multiplicatif.

Pour la question 2, une recherche d'informations, puis une discussion, peuvent s'engager sur les différentes capacités des supports numériques. On peut aussi répondre en utilisant la comparaison des différentes capacités.

Pour la question 3, on peut inciter l'élève à choisir une même unité, puis exprimer dans cette unité la capacité de la carte, puis celle d'une photo.

Cette activité peut faire l'objet d'un développement dans le cadre d'un EPI relatif aux thématiques : « Information, communication, citoyenneté » ou « Sciences, technologie et société ».

Prolongements

D'autres aspects liés aux problèmes de performance peuvent être envisagés :

- les multiples de l'octet à préfixes binaires (kibioctets, ...) ;
- la loi de Moore , sur le site Nombres – Curiosités, théories et usages de Gérard Villemain ;
- la vitesse des processeurs.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Puissances

Un exemple de tâche intermédiaire : nombres de Mersenne et nombres parfaits

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes :
- définition des puissances d'un nombre (exposant entier positif) ;
- effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances ;
- vérifier la vraisemblance d'un résultat, en estimant son ordre de grandeur ;
- pratiquer le calcul exact ou approché, à la main ou instrumenté.

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombre premier :
- notion de nombres premiers.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, calculer, raisonner, communiquer.

Énoncé [3e]

Marin Mersenne (1588-1648) était un religieux français érudit, philosophe, mathématicien et physicien. Il s'est intéressé à de nombreux domaines (acoustique, chute des corps, arithmétique, ...). Il a fourni une liste de nombres de la forme $2^2 - 1$, $2^3 - 1$, $2^5 - 1$, ..., jusqu'à $2^{257} - 1$, où chacun des exposants (2, 3, 5, ..., 257) est un nombre premier. Pour lui rendre hommage, on appelle aujourd'hui nombres de Mersenne les nombres de la forme $M_n = 2^n - 1$, où n est un entier naturel non nul.

1. À l'aide d'un tableur, calculer les nombres M_n pour tous les entiers n allant de 2 à 20.
2. Pour chacun des nombres premiers 2, 3, 5, 7, vérifier que les nombres de Mersenne M_2, M_3, M_5, M_7 sont des nombres premiers.
3. La conjecture « Les nombres de Mersenne M_n où n est un nombre premier sont des nombres premiers » est-elle plausible ? Vérifier que M_{11} admet un diviseur autre que 1 et lui-même. La conjecture précédente est-elle vraie ? Justifier
4. Le nombre M_{13} est-il premier ?
5. Un nombre parfait est un entier qui est égal à la somme de tous ses diviseurs positifs autres que lui-même. Ainsi 6 est un nombre parfait puisque les diviseurs de 6 autres que 6 sont 1, 2, et 3, et puisque 6 = 1 + 2 + 3.

Euclide a prouvé que l'on obtient des nombres parfaits à partir des nombres de Mersenne qui sont premiers, de la façon suivante : on multiplie le nombre de Mersenne par la puissance de 2 dont l'exposant est inférieur d'une unité à celui intervenant dans l'écriture du nombre. Ainsi, à partir du nombre de Mersenne premier $2^2 - 1$, on obtient le nombre parfait $6 = 2^{2-1} \times (2^2 - 1)$. Vérifier le résultat d'Euclide pour les nombres de Mersenne M_3 et M_5.

Note
Les mathématiciens et les informaticiens recherchent aujourd'hui de très grands nombres premiers parmi les nombres de Mersenne, et ce dans le but de tester la puissance des nouveaux processeurs qui sont construits. Ces nombres ont une importance telle pour l'industrie informatique que le l'Electronic Frontier Foundation a donné en 2010 une récompense de 100 000 dollars US pour la découverte du plus grand nombre premier de Mersenne connu jusqu'alors : le nombre $M_{43\,112\,609}$, qui s'écrit avec près de 13 millions de chiffres.

Pistes pédagogiques

Cette activité peut donner lieu à une recherche de groupe, chaque élève d'un même groupe se répartissant les différentes tâches, avec une mise en commun finale. Un des élèves du groupe peut par exemple contribuer à la recherche en dressant une liste de nombres premiers.
La question 4 peut n'être posée qu'aux élèves les plus rapides. Cette différenciation peut s'étendre aux différents prolongements possibles :

- examen de la primalité d'autres nombres de Mersenne ;
- estimation du nombre de chiffres de (dans ce cas, ne pas donner cette estimation dans l'énoncé) ;
- recherches documentaires (sur Mersenne, sur Euclide, sur le plus grand nombre premier de Mersenne connu, ...) ;
- recherche d'autres nombres parfaits.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Puissances

Un exemple d'activité avec prise d'initiative : tous cousins !

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes :
- définition des puissances d'un nombre (exposant entier positif et négatif) ;
- effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances, notamment en utilisant la notation scientifique ;
- vérifier la vraisemblance d'un résultat, en estimant son ordre de grandeur.

Interpréter, représenter et traiter des données :
- recueillir des données, les organiser.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, représenter, calculer, raisonner, communiquer.

Énoncé [4e – 3e]

Clara essaie d'évaluer le nombre de ses ancêtres, jusqu'à l'époque de Charlemagne. Elle part du principe que 25 ans séparent chaque génération de la suivante, que chaque individu a deux parents, qui ont à leur tour deux parents chacun, etc. Elle suppose également que tous les ascendants d'une génération donnée sont des personnes distinctes.
Après quelques calculs, Clara va consulter l'encyclopédie en ligne *Wikipédia*, et déclare : « En fait, en 2015, nous sommes tous cousins ! »

Évolution de la population mondiale (Source Wikipédia)

ANNÉE	- 5000	400	1000	1500	1900	2000
Population mondiale	Entre 5 et 20 millions	Entre 190 et 206 millions	Entre 254 et 345 millions	Entre 425 et 540 millions	Entre 1,55 et 1,762 milliards	6,127 milliards

Comment Clara est-elle parvenue à cette conclusion ?

Pistes pédagogiques

Cette activité peut être proposée en recherche individuelle ou en travail de groupe, en classe ou hors la classe.
Elle peut profitablement engendrer un questionnement et un débat sur la modélisation mathématique (hypothèse de l'écart intergénérationnel de 25 ans, hypothèse des ancêtres tous distincts à la même génération).

Des aides différenciées peuvent être apportées aux élèves :
- pour trouver une stratégie (rechercher les millésimes correspondant à l'époque de Charlemagne, déterminer le nombre de générations séparant cette époque de la nôtre, dénombrer les ancêtres) ;

- pour le comptage des ancêtres (principe de comptage, arbre, intervention des puissances de 2, estimation du résultat par un ordre de grandeur) ;
- pour interpréter les résultats, et expliquer la conclusion de Clara.

Plusieurs variantes peuvent être envisagées, par exemple en modifiant l'époque, ou l'écart intergénérationnel.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Comprendre et utiliser la notion de fonction

Objectifs

Au cycle 3 la notion de fonction est absente des programmes. Néanmoins de nombreux thèmes préparent son étude qui sera effective au cycle 4. L'étude des grandeurs et de la proportionnalité, la construction et l'utilisation de tableaux et de graphiques donnent l'occasion de pratiquer des activités reposant implicitement sur la notion de fonction.

Un des objectifs du cycle 4 est de prendre appui sur des situations où la dépendance de deux grandeurs est mise en évidence afin de construire progressivement le concept de fonction. Ce saut conceptuel doit être accompagné afin de répondre à plusieurs attendus de fin de cycle, en particulier pour étudier et manipuler les fonctions comme objet mathématique décontextualisé. Dans ce cadre, les outils tels qu'un tableur, un grapheur ou un logiciel de programmation sont utiles pour faciliter la compréhension de la notion et la résolution de certains problèmes.

Liens avec les domaines du socle

Le travail sur la notion de fonction est associé naturellement au domaine du socle « les langages pour penser et communiquer » (domaine 1) et en particulier à l'objectif « comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques et informatiques » : exprimer une grandeur en fonction d'une autre, modéliser une situation par une fonction numérique, utiliser le langage formel des fonctions, représenter par un graphique. La notion de fonction permet également de travailler sur la notion de variable informatique et de s'entraîner à utiliser le langage informatique et à programmer des algorithmes simples.

Le travail sur les fonctions numériques permet de discerner différents types de dépendances dans des situations concrètes et participe ainsi au domaine « Formation de la personne et du citoyen » (domaine 3).

La notion de fonction est particulièrement présente dans le domaine « les systèmes naturels et les systèmes techniques » (domaine 4) dans la démarche scientifique et la modélisation de phénomènes, par exemple par l'exploitation de mesures pour introduire une loi.

L'étude de problèmes liés à l'activité humaine peut donner lieu à une modélisation par une fonction numérique qui pourra être utilisée dans le domaine « Représentation du monde et activité économique » (domaine 5).

Progressivité des apprentissages

Dès le début du cycle 4, la notion de fonction est abordée sans formalisation particulière. Le travail sur les grandeurs et leur dépendance est une source de problèmes qui peuvent être modélisés par une fonction. Un chapitre spécifique sur cette notion n'a pas sa place en 5e et 4e.

- En 5e et 4e l'usage de graphiques (par exemple distance en fonction de la durée d'un trajet), de tableaux (par exemple aire du carré en fonction de la longueur du côté) et de formules (par exemple l'indice de masse corporelle) permettent à la fois la résolution de problèmes et le changement de registres (formule/tableau de valeurs, graphique/tableau de valeurs, tableau de valeurs/graphiques).

- Le cas particulier de la proportionnalité de deux grandeurs est exploité mais d'autres situations doivent être présentées.
- Ce début de cycle est aussi l'occasion de préparer la notation fonctionnelle de la classe de 3e par un passage progressif du type « prix de 2 kg = 7 € » à « P de 2 kg = 7 € » puis « P(2 kg) = 7 € » et enfin « P(2) = 7 » en 3e.
- Le travail des expressions « en fonction de » ou « est fonction de » doit être mené en parallèle avec l'étude du calcul littéral.

Des éléments nouveaux sont étudiés en classe de troisième.

- La notion de fonction numérique est installée en veillant à faire comprendre qu'à certains nombres une fonction numérique fait correspondre une unique image. La définition rigoureuse d'une fonction numérique n'est pas un objectif de l'enseignement secondaire. L'usage des programmes de calcul, installés dans les classes précédentes, permet de travailler cette notion sans la nécessité d'un contexte et de grandeurs.
- Le vocabulaire (image, antécédent, fonctions linéaires et affines) est introduit, ainsi que la notation $f(x)$. Cette notation reste délicate à maitriser et son introduction doit être progressive et motivée.
- La notion de fonction linéaire clôt le cycle de travail sur la proportionnalité en formalisant les savoir-faire.

Stratégies d'enseignement

Tâches associées à l'étude des fonctions numériques :

- mettre en évidence la dépendance entre des grandeurs ;
- décrire la dépendance entre des grandeurs ;
- déterminer une grandeur à partir d'une autre ;
- comparer plusieurs grandeurs ;
- comparer les variations d'une grandeur pour deux situations ;
- lire et interpréter des représentations graphiques de fonctions ;
- optimiser ;
- modéliser (afin d'interpoler, d'extrapoler).

Changements de cadre

L'étude des fonctions se prête particulièrement à un travail sur les compétences « représenter » et « modéliser ». À cet effet, il est pertinent de proposer des situations permettant des changements de cadre : tableau/graphique, formule/graphique, etc.

Modélisation

Étant donnée une situation concrète, la démarche de modélisation consiste à traduire cette situation en un problème mathématique dont la solution est ensuite confrontée à la situation réelle. Cette démarche se prête particulièrement à l'usage des fonctions numériques sous différentes formes. Une attention particulière doit être portée à certaines difficultés conceptuelles lorsque la notion de fonction est installée. En effet, dans la situation concrète, les valeurs prises par la variable sont généralement positives, parfois entières et l'usage d'une fonction numérique dans sa généralité n'a pas forcément de légitimé. Les exemples classiques d'abonnements débouchant sur l'étude de fonctions linéaires ou affines est révélateur de ce type de difficultés. On veillera à choisir des exemples pour lesquels la modélisation par une fonction numérique est réellement pertinente (pas de solution géométrique ou arithmétique évidente).

Programme de calcul

Les programmes de calculs sont devenus des objets d'enseignement fréquemment utilisés dès le début du cycle. En s'appuyant sur ces pratiques, la notion de fonction peut être installée au fur et à mesure, d'abord dans le domaine numérique puis dans le domaine littéral, en dehors de toute formalisation ou notation. L'usage du tableur est évidemment pertinent et les nouvelles possibilités offertes par l'étude de l'algorithmique et de la programmation donnent des ouvertures supplémentaires. Les programmes de calculs s'affranchissent de plus des contraintes d'ensemble de définition (nombres relatifs et rationnels envisageables) contrairement à certaines situations concrètes.

Notation et statut de la lettre

Les difficultés dans l'usage des notations fonctionnelles relèvent de deux problématiques : la notation $f(x)$ pour laquelle les parenthèses n'ont pas le même usage que dans l'écriture des expressions littérales et le statut de la lettre comme variable qui doit être bien identifié et distingué des autres statuts déjà rencontrés (indéterminée, inconnue, variable en programmation).

Différenciation

Des activités différenciées peuvent être construites à partir d'une même situation à résoudre. Différentes démarches peuvent être proposées :

- démarche numérique avec éventuellement l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de programmation ;
- démarche graphique avec la construction ou seulement la lecture de graphiques ;
- démarche algébrique avec la résolution d'équation ou d'inéquation ;
- démarche experte avec le choix de la variable, définition de la fonction et résolution du problème.

Il importe que dans ces activités différenciées, le problème posé soit le même quelle que soit la démarche proposée. Dans les évaluations proposées, la dimension graphique doit être présente à côté de la dimension algébrique moins accessible.

Exemples de situations d'apprentissage

Les situations d'apprentissage sur la notion de fonction numérique se répartissent selon trois domaines : numérique, graphique et algébrique. Ces situations peuvent s'appuyer sur des supports concrets ou seulement théoriques. Parmi les tâches à résoudre on peut citer la recherche d'images, d'antécédents (sans avoir nécessairement défini le vocabulaire), la comparaison, l'optimisation, la caractérisation de la proportionnalité, l'estimation d'écart, l'interpolation. Ces travaux sont en lien très étroit avec l'étude des grandeurs, le calcul littéral, la résolution d'équation et d'inéquation.

Exemples de questions flash

- Fonctions affines
- Modélisation à l'aide de fonctions
- Lectures graphiques
- Programme de calcul

Exemples de tâches intermédiaires

- Distance de freinage
- Volume de la boîte

Exemples d'activités à prise d'initiative

- Degrés Celsius et Fahrenheit
- Essence ou Diesel

Interdisciplinarité

Des thématiques des Enseignements Pratiques Interdisciplinaires (EPI) se prêtent particulièrement à l'utilisation de la notion de fonction numérique. Par exemple, le thème « corps, santé, bien-être et sécurité » peut aborder la problématique de l'indice de masse corporelle (IMC), du rythme cardiaque, ou de statistiques en lien avec la santé. Cela peut donner l'occasion d'exploiter des formules, de procéder à des lectures graphiques ou de travailler sur la proportionnalité. Il importe de trouver dans ces thématiques suffisamment d'éléments pour faire avancer les connaissances et les compétences des élèves sur les fonctions numériques. Suite à ces travaux, une courte synthèse permet d'institutionnaliser les savoirs et les méthodes.

Ressources Complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder la notion de fonction avec les élèves :

- Organisation et gestion de données
- Fonctions
- Variables et fonctions, du collège au lycée : méprise didactique ou quiproquo inter institutionnel. E. COMIN

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Comprendre et utiliser la notion de fonction

Exemple de question flash
Fonctions affines

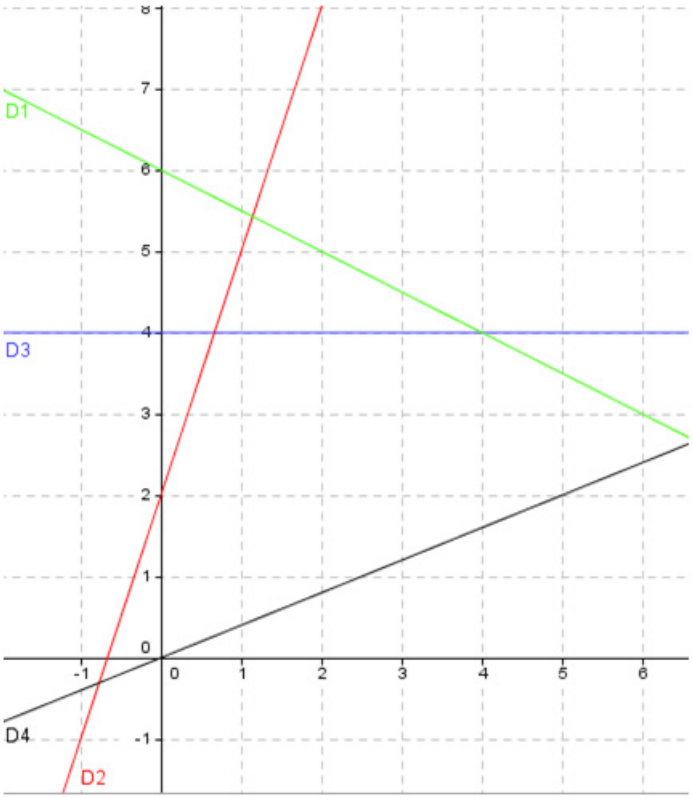
ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIEES

Comprendre et utiliser la notion de fonction :

- lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, représenter.



Énoncé

Quelle est l'expression algébrique des quatre fonctions représentées par les droites tracées dans le repère ci-dessus ?

DROITE	D1	D2	D3	D4
Expression algébrique				

Pistes pédagogiques

Il s'agit d'une situation classique lors de l'étude des fonctions affines. Le repérage des éléments caractéristiques suffit pour répondre.

Le choix des variables didactiques (valeurs du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine) permet de proposer des exemples de difficulté variable.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Comprendre et utiliser la notion de fonction

Exemple de question flash
Modélisation à l'aide de fonctions

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Comprendre et utiliser la notion de fonction :

- modéliser des phénomènes continus par une fonction ;
- lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

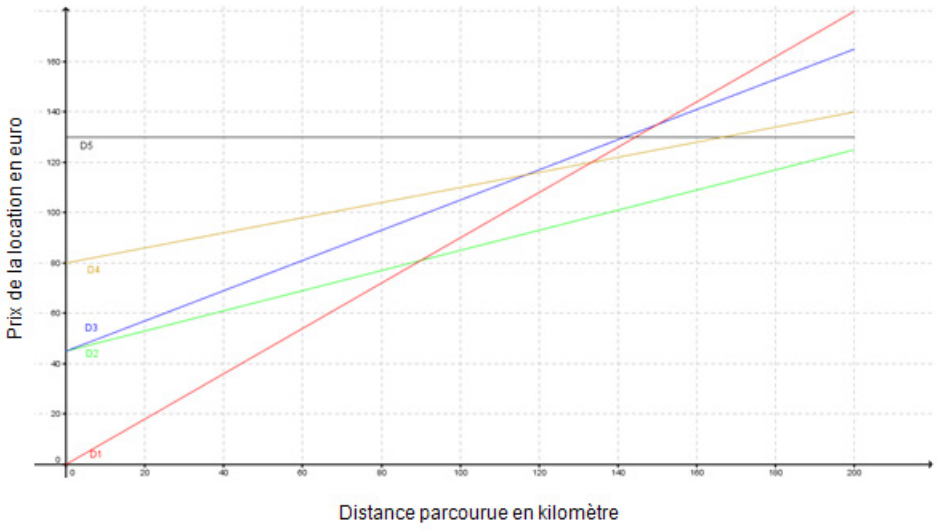
Chercher, représenter, modéliser.

Énoncé

Voici les tarifs chez différents loueurs de voitures pour une journée :

LOUEUR N°1	0,9 € par km parcouru
LOUEUR N°2	45 € par jour et 0,4 € par km parcouru
LOUEUR N°3	Forfait de 130 € par jour. Le kilométrage est illimité.

Le graphique ci-dessous donne 5 représentations parmi lesquelles 3 correspondent au prix de la location en euro pour une journée en fonction de la distance parcourue entre 0 et 200 km.



Associer chaque loueur à la représentation correspondante.

LOUEUR	LOUEUR N°1	LOUEUR N°2	LOUEUR N°3
Représentation			

Pistes pédagogiques

Cette situation à support concret peut être proposée à plusieurs reprises dans le cycle 4 :

- dès le début du cycle avec une démarche par essai-erreur ;
- en classe de 3ème lorsque les fonctions affines sont installées ; à ce niveau, l'expression de la fonction affine pour chaque loueur peut être demandée afin de travailler sur plusieurs registres.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Comprendre et utiliser la notion de fonction

Exemple de question flash
Lecture graphique

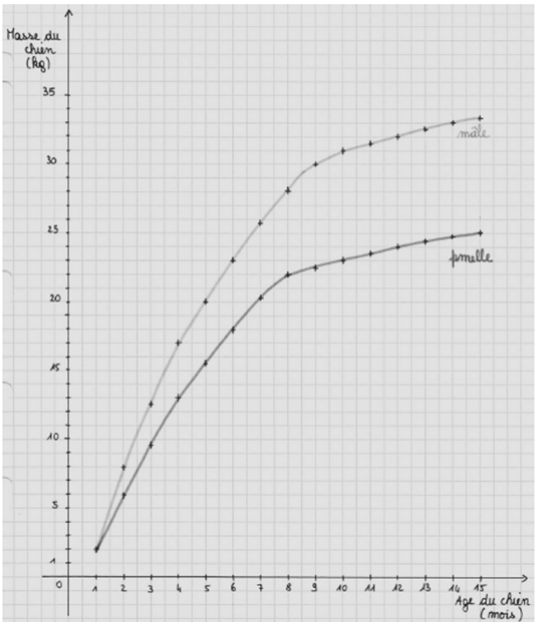
ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Comprendre et utiliser la notion de fonction :
- résoudre des problèmes modélisés par des fonctions ;
- étudier et commenter des exemples.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, représenter.

Énoncé

Les petits chiens-loups

Adrien a deux chiens-loups, un mâle et une femelle, qui ont maintenant 15 mois.
Depuis qu'ils sont nés, Adrien a relevé tous les mois leur masse et a fait ce graphique :



À partir de quel âge les deux chiens ont-ils au moins 6 kg d'écart ?
D'après évaluation nationale de 5e.

Pistes pédagogiques

Cette situation peut être proposée dès le début du cycle 4. Différentes stratégies sont possibles : essais-erreurs pour calculer l'écart, représentation de l'écart sur le graphique.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Comprendre et utiliser la notion de fonction

Exemple de question flash
Programme de calcul

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Comprendre et utiliser la notion de fonction :

- résoudre des problèmes modélisés par des fonctions (équations, inéquations).

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, représenter.

Énoncé

On considère le programme de calcul suivant :

- prendre un nombre ;
- multiplier de nombre par 5 ;
- retrancher 8 au résultat précédent ;
- multiplier le résultat précédent par 2 ;
- afficher le résultat.

Quel est le résultat affiché si le nombre de départ est 2 ?

Quel est le nombre de départ si le nombre affiché est 14 ?

On note x le nombre de départ. Exprimer en fonction de x le nombre affiché

Pistes pédagogiques

Cet exercice est une source importante de différenciation pédagogique avec le choix des variables didactiques : choix du programme plus ou moins complexe, choix des valeurs en jeu (entiers naturels ou relatifs).

Il est également en lien avec le travail sur le calcul littéral (résolution d'équation, expressions algébriques équivalentes).

Sans parler explicitement de fonction numérique, il permet d'installer progressivement le fait qu'à tout nombre on fait correspondre un unique nombre affiché qui deviendra l'image lorsque cette notion sera formalisée.

Ce type de questions flash peut donner lieu à des calculs intermédiaires.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Comprendre et utiliser la notion de fonction

Un exemple de tâche intermédiaire
Le volume de la boîte

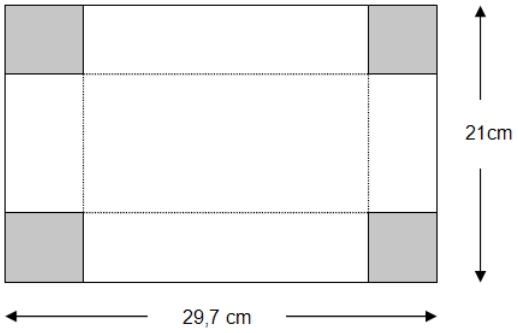
ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Comprendre et utiliser la notion de fonction :
- modéliser des phénomènes continus par une fonction ;
- résoudre un problème modélisé par une fonction.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

Énoncé 1 Première rencontre

On veut fabriquer une boîte sans couvercle à partir d'une feuille au format A4 (L = 29,7 cm ; l = 21cm)

On utilise pour cela d'une feuille A4 dont on découpe à chaque coin un carré, comme sur le schéma suivant (les 4 carrés sont superposables) :



On obtient ainsi un patron dont on replie les faces latérales pour obtenir la boîte voulue.
On se propose d'étudier le volume des boîtes ainsi obtenues.

Avec la feuille fournie, réaliser le patron de la boite en découpant des carrés de côté 3 cm, puis compléter la feuille réponse ci-dessous :

> Hauteur de la boite (côté du carré) = ... cm
> Longueur de la base = ... cm
> Largeur de la base = ... cm
> Volume de la boite = ... cm^3
> Pour un carré de côté ..... cm, le volume de la boite vaut ..... cm^3

On retiendra que le Volume de la boite pour un carré de côté 3 cm vaut ..... cm^3 .
On notera : Volume (pour un côté de 3 cm) = ... cm^3 ,
ou plus simplement : V (pour un côté de 3 cm) = ... cm^3

Pistes pédagogiques

Cette activité de première approche permet de mettre tous les élèves au travail sur des capacités élémentaires. En particulier le découpage et la construction de la boite permet de repérer les trois dimensions avec facilité. Deux stratégies sont en général utilisées pour obtenir les deux dimensions manquantes : mesurage à la règle graduée ou calcul (29,7-2x3 et 21-2x3). Les maladresses de mesurage permettent de motiver la nécessité de calculer les deux autres dimensions et préparent le passage à l'algèbre.

Énoncé 2 Deuxième rencontre

Choisir deux longueurs du côté des carrés (différentes de 3 cm) et calculer les valeurs du volume de la boite en cm^3.

Compléter les lignes ci-dessous :

V(pour un côté de ... cm) = ... cm^3

V(pour un côté de ... cm) = ... cm^3

Compléter le tableau ci-dessous à l'aide des résultats de la classe, puis construire un graphique représentant la situation.

LONGUEUR DU CÔTÉ DU CARRÉ EN CM	
VOLUME DE LA BOITE EN CM^3	

À partir de ces éléments, répondre au problème : « Quelle longueur du côté du carré faut-il choisir pour que le volume de la boîte soit maximal ? ».

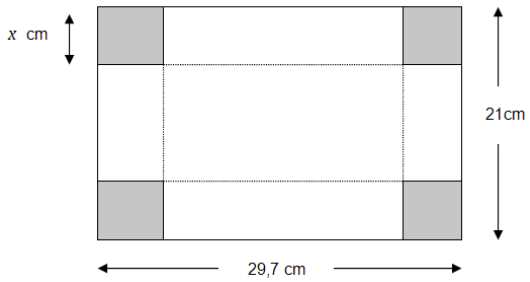
Pistes pédagogiques

La collecte des valeurs permet de constater que le volume dépend de la longueur du côté du carré, de construire un tableau de valeurs, puis un graphique. Aucune consigne n'est donnée pour la réalisation du graphique dont la forme dépendra des expériences déjà menées dans la classe (nuage de points, diagramme « à barres », courbe à main levée, ligne brisée...).
La solution au problème n'est pas obtenue mais l'observation du tableau et de la représentation graphique permet de conjecturer une valeur de l'extremum qui sera remise en cause dans la phase suivante avec le tableur. L'observation de courbes à main levée permet aussi de conjecturer la nécessité d'une précision supplémentaire. Par ailleurs, on peut faire remarquer aux élèves que toute valeur n'est pas possible pour la longueur du côté, ce qui prépare la future notion d'intervalle de définition.

Retrouvez Éduscol sur

Énoncé 3 Troisième rencontre

On note x la mesure en cm de la longueur du côté des carrés.



1. Exprimer en fonction de le volume de la boite, exprimé en cm3.
2. Construire une feuille de calcul permettant de répondre de manière plus précise au problème posé.

Pistes pédagogiques

L'expression de $V(x)$ permet à la fois de faciliter la programmation de la feuille de calcul et dans un deuxième temps d'utiliser un grapheur qui donnera une précision satisfaisante et permettra de revenir sur la pertinence des représentations graphiques de la deuxième partie. De plus, cette démarche à initier en classe de 3e, prépare aux pratiques de la classe de seconde avec l'utilisation autonome d'une calculatrice graphique.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Comprendre et utiliser la notion de fonction

Un exemple de tâche avec prise d'initiative
degrés celsius et fahrenheit

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

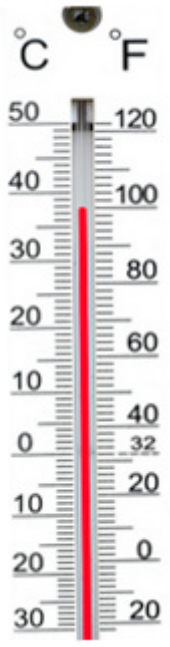
Comprendre et utiliser la notion de fonction :

- modéliser des phénomènes continus par une fonction ;
- résoudre un problème modélisé par une fonction ;
- utiliser différents modes de représentation et passer de l'un à l'autre, par exemple en utilisant un tableur ou un grapheur.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

Énoncé



1. Visionnez avec attention la vidéo proposée et relevez toutes informations importantes sur les températures.
2. En Europe nous utilisons dans la vie courante les degrés Celsius, mais les pays Anglo-Saxons utilisent une autre échelle de température appelée degrés Fahrenheit. Vous avez ci-contre l'image d'un thermomètre qui possède les deux graduations.
   À partir de ces informations, répondre aux questions suivantes.
   - 2.1. Établir la relation entre la température exprimée en degrés Fahrenheit et la température en degrés Celsius.
   - 2.2. Construire sur un tableur un convertisseur automatique permettant de passer d'une unité à l'autre.
   - 2.3. Lors d'une expédition internationale dans le Grand Nord Canadien, deux explorateurs l'un français, l'autre anglo-saxon comparent leurs mesures. Est-il possible que leurs thermomètres, l'un gradué en degré Fahrenheit et l'autre en degré Celsius, affichent le même nombre ? Si oui, quelle température peut-il faire ce jour–là ?

Pistes pédagogiques

Une telle activité peut être développée dans le cadre d'un EPI en relation avec l'enseignement des sciences de la vie et de la Terre.

La situation repose sur les deux échelles utilisées dans les pays Anglo-Saxons et en Europe. L'objectif final est de faire découvrir et établir la relation entre degré Celsius et degrés Fahrenheit à partir de deux documents.

On s'appuie sur une vidéo d'un bulletin météo d'une télévision de la région de Miami.

Le sous-titrage permet de découvrir des éléments donnant une première approche. En particulier les valeurs observées permettent d'éliminer l'hypothèse de proportionnalité. C'est aussi une approche culturelle.

On évitera de proposer de visionner la vidéo individuellement en salle multimédia pour que la recherche directe d'un convertisseur sur Internet ne fasse perdre tout intérêt à l'activité. On peut aussi effectuer quelques captures d'écran sur les deux moments intéressants de cette vidéo.

Le deuxième document est l'image d'un thermomètre à double graduation permettant de nombreuses correspondances. En particulier le 0 °C est clairement associé au 32 °F. Les démarches des élèves peuvent être variées : tableau, graphique, pour se diriger ensuite vers la relation cherchée. L'activité se termine avec une question mettant en œuvre la résolution d'une équation. Cette résolution peut être également graphique.

La fonction affine sous-jacente présente l'avantage de ne pas porter uniquement sur des valeurs positives ou entières, contrairement à de fréquentes situations concrètes.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Comprendre et utiliser la notion de fonction

Un exemple de tâche avec prise d'initiative Essence ou Diesel ?

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Comprendre et utiliser la notion de fonction :
- modéliser des phénomènes continus par une fonction ;
- résoudre un problème modélisé par une fonction.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

Énoncé

Voici des données trouvées sur un site internet, concernant des modèles de voitures ainsi que des tarifs de carburants.

MOTORISATION	PUISSANCE RÉELLE (CH)/ PUISSANCE FISCALE (CV)	CONSOMMATION	ÉMISSION DE CO2	PRIX
Essence				
1.2 BVM 5	60/4	5,5 L/100 km	122 g/km	12 820 €
1.4 BVM 5	70 / 4	5,5 L/100 km	128 g/km	13 600 €
Diesel				
1.2 TDI diesel BVM 5	75/4	3,8 L/100 km	99 g/km	15 620 €
1.6 TDI diesel BVM 5	90 / 5	4,2 L/100 km	109 g/km	13 920 €

	SP98	SP95	E10	GAS+	GAS	E95	GPL
Prix moyen des carburants	1,390 €	1,332 €	1,326 €	1,215 €	1,134 €	0,754 €	0,767 €

Un acheteur hésite entre le modèle « essence » 1.2 BVM5 qui fonctionne au carburant SP98 et le modèle « Diesel » 1.2 TDI BVM5 qui fonctionne au gasoil. Ces deux modèles ont des finitions identiques et son choix est guidé par le coût total de son achat (le coût total est la somme du prix d'achat et des frais de carburant). On suppose que le prix des carburants reste constant durant la période d'utilisation.

Suivant le nombre de kilomètres que cet acheteur va parcourir, quel choix doit-il faire ?

Pistes pédagogiques

Cette activité à prise d'initiative repose sur des données réelles et porte sur la comparaison de deux fonctions numériques sous-jacentes. Différentes pistes de recherche peuvent être exploitées : calculs numériques, tableur, graphique, écriture algébrique.

Le tableau donnant le prix moyen peut être supprimé pour demander une recherche sur Internet, éventuellement sur des points de vente locaux.

On peut rendre cette activité plus riche en prenant en compte la décote de la voiture sur 3 ans par exemple. Une recherche documentaire peut être effectuée sur ce point.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Comprendre et utiliser la notion de fonction

Un exemple de tâche intermédiaire
La distance de freinage

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Comprendre et utiliser la notion de fonction :

- modéliser des phénomènes continus par une fonction ;
- résoudre un problème modélisé par une fonction.

Utiliser le calcul littéral :

- comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant et en employant des formules liées aux grandeurs mesurables.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

Énoncé

Lorsqu'un conducteur aperçoit un obstacle, son temps de réaction avant de commencer à freiner est estimé à 1 seconde. Durant cette seconde, le véhicule continue à avancer à vitesse constante. Ensuite, le conducteur freine jusqu'à l'arrêt total.

La distance d'arrêt est égale à la somme de la distance parcourue pendant le temps de réaction et de la distance de freinage.

D_r distance parcourue pendant le temps de réaction

D_f distance parcourue pendant le freinage

D_a distance d'arrêt

Le but du travail qui suit est d'étudier la distance d'arrêt d'un véhicule en fonction de sa vitesse à l'instant où le conducteur aperçoit l'obstacle.

Partie 1 : distance parcourue pendant le temps de réaction

1. Compléter le tableau suivant où v est la vitesse du véhicule en km/h et D_r la distance parcourue en m pendant le temps de réaction.

v (km/h)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
D_r (m)											

2. Écrire une formule qui donne D_r en fonction de v.
3. Construire une représentation graphique, à partir des valeurs du tableau, donnant la distance parcourue pendant le temps de réaction en fonction de la vitesse.
4. La distance parcourue pendant le temps de réaction est-elle proportionnelle à la vitesse du véhicule ? Justifier.

$$D_f = \frac{v \times v}{2} \div 100$$

Partie 2 : distance de freinage

On admet que la distance de freinage D_f en mètre d'un véhicule en fonction de sa vitesse en km/h peut être donnée par la formule suivante :

1. Compléter le tableau suivant où v est la vitesse du véhicule et D_f la distance de freinage.

v (km/h)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
D_f (m)											

2. Construire une représentation graphique, à partir des valeurs du tableau, donnant la distance de freinage D_f en fonction de la vitesse v.
3. La distance de freinage est-elle proportionnelle à la vitesse du véhicule ? Justifier.

Partie 3 : distance d'arrêt

La distance d'arrêt d'un véhicule est la somme de la distance parcourue pendant le temps de réaction et de la distance de freinage.

1. Compléter le tableau suivant où v est la vitesse du véhicule et D_a sa distance d'arrêt.

v (km/h)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
D_r (m)											
D_f (m)											
D_a (m)											

2. Construire une représentation graphique, à partir des valeurs du tableau, donnant la distance d'arrêt en fonction de la vitesse.
3. La distance d'arrêt est-elle proportionnelle à la vitesse du véhicule ? Justifier.
4. Un ballon traverse la route 10 mètres devant la voiture qui est en mouvement. Quelle est vitesse maximum à laquelle cette voiture peut rouler pour ne pas heurter le ballon ?

Pistes pédagogiques

Une telle activité peut être développée dans le cadre d'un EPI en relation avec l'enseignement de physique chimie.

Ce problème très classique permet de travailler sur une situation concrète parfaitement véridique. Les différents registres sont exploités : calcul numérique, production d'une formule, exploitation d'une formule, représentation graphique, situations proportionnelles ou non.

Des prolongements peuvent être proposés avec un temps de réaction plus long ou une chaussée humide.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Interpréter, représenter et traiter des données

Objectifs

Le traitement des données numériques contribue à l'acquisition de chacun des cinq domaines du socle commun à travers la lecture, l'interprétation, l'organisation, la synthétisation et la représentation de données chiffrées. Les activités relatives au traitement de données permettent de développer les six compétences mathématiques, et plus particulièrement la capacité à communiquer, à représenter et à exercer son esprit critique, participant ainsi à la formation de citoyens éclairés et responsables. L'objectif est de fournir aux élèves des méthodes, d'une part pour comprendre les informations qu'ils rencontrent dans différents contextes sous la forme de tableaux, de graphiques ou de diagrammes, et d'autre part pour synthétiser et représenter sous une forme adaptée des données chiffrées qu'ils sont amenés à recueillir ou consulter, et en donner des résumés en utilisant quelques caractéristiques simples de statistique descriptive. La mobilisation des outils informatiques trouve dans ce cadre toute sa légitimité pour accéder à des données réelles en grand nombre et les traiter en s'affranchissant de calculs fastidieux ; elle permet également d'obtenir rapidement diverses représentations d'une série de données afin de comparer leur pertinence au regard des questions posées.

Dans un monde où les élèves sont confrontés en permanence à des images, il est primordial de les amener à réfléchir sur celles d'entre elles qui représentent des données.

Liens avec les domaines du socle

Pour traiter des données, l'élève lit, interprète, commente et produit des tableaux et des graphiques; il étudie des relations entre des données statistiques et il les représente graphiquement, développant ainsi la compétence « comprendre, s'exprimer en utilisant des langages scientifiques » du domaine 1.

La lecture critique de diagrammes ou de représentations de données issus de différents supports amène l'élève à s'interroger sur la crédibilité des sources d'information ; elle contribue à l'éducation aux médias et à la maitrise des techniques usuelles de l'information (domaine 2) et à la formation du citoyen (domaine 3).

Le recueil, l'organisation et le traitement de données chiffrées sont des composantes de la démarche d'investigation dans les disciplines scientifiques et technologiques (domaine 4) et contribuent à l'étude des organisations et des fonctionnements des sociétés (domaine 5).

Progressivité des apprentissages

Au cycle 3, les élèves ont été initiés dans le cadre de la résolution de problèmes à prélever des informations chiffrées à partir de supports variés : textes, tableaux, représentations graphiques, et à présenter des résultats sous une forme adaptée. Ces compétences sont mobilisées tout au long du cycle 4 et elles sont enrichies à la fois par la possibilité

d'étudier des situations plus étoffées au fur et à mesure que les élèves acquièrent une plus grande maitrise de la lecture de documents complexes et de l'utilisation de divers outils mathématiques (calcul, proportionnalité, pourcentages, mesure des angles, etc.) et numériques.
On montrera dès la classe de 5e l'intérêt de regrouper des données nombreuses en classes de même amplitude afin de les représenter par des histogrammes.
Les notions de fréquences et de fréquences cumulées, de moyenne et de médiane sont introduites dès la classe de 5e, celle d'étendue en classe de 4e, dans des situations qui leur donnent du sens.

Stratégies d'enseignement

Les capacités à prélever de l'information sur divers supports et à effectuer des traitements à partir de données chiffrées doivent être consolidées tout au long du cycle 4. À l'issue de la classe de 6e, tous les élèves ne maitrisent pas encore la lecture de tableaux et de graphiques. La lecture de graphiques présente a priori moins de difficultés que leur production, mais n'en demeure pas moins une activité formatrice pour peu qu'on s'appuie sur des documents variés, extraits de manuels d'autres disciplines, de magazines, de journaux, de sites Internet, voire d'extraits d'émissions télévisées. C'est par la diversité des supports graphiques que s'acquièrent les capacités d'analyse et de discernement et l'esprit critique.

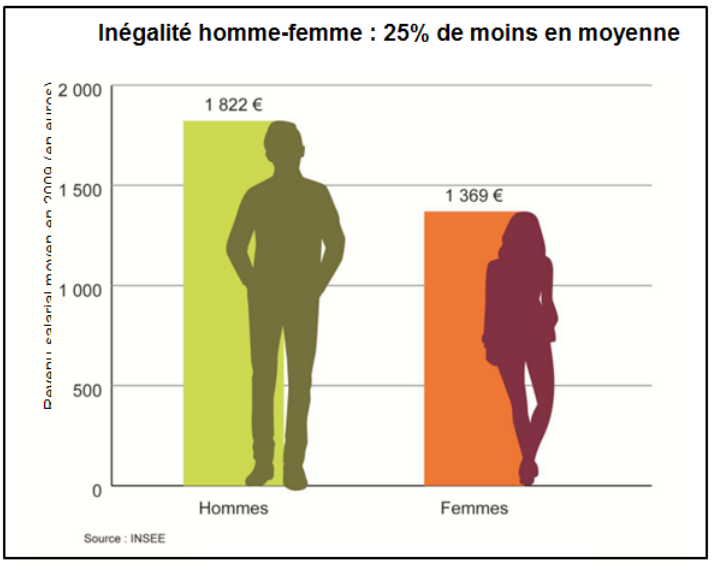
> Les sites de l'Institut national de la démographie et de l'Institut national de la statistique et des études économiques fournissent de nombreuses données pouvant servir de support à des activités d'organisation et de représentation de données.

Prélever des informations simples

En début de cycle, on s'assurera que les élèves savent prélever des informations simples sur un graphique ou un diagramme. On peut les faire réagir sur les choix qui ont été faits pour la présentation de certains documents iconographiques : échelle, origine du repère, pertinence des lignes reliant les points d'un graphique dans le cas d'une série discrète, etc. et leur présenter des représentations de données ambigües, erronées voire trompeuses en leur demandant de les critiquer. Par ailleurs, un tableur permet d'obtenir facilement différentes représentations d'une même série statistique qui pourront être comparées. Ces activités entraînent les élèves à exercer leur esprit critique et à développer leurs capacités à argumenter au cours de débats au sein de la classe.

Exempe 1

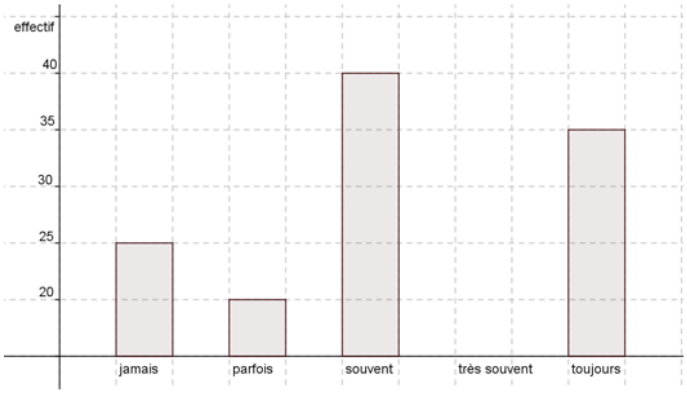
Source : Site de La Finance pour tous



Question : Le titre du graphique contredit-il son contenu ?

Exemple 2

On a demandé à un échantillon de personnes à quelle fréquence elles regardent la télévision lors de la pause de midi. Le graphique ci-dessous représente les résultats de cette enquête.



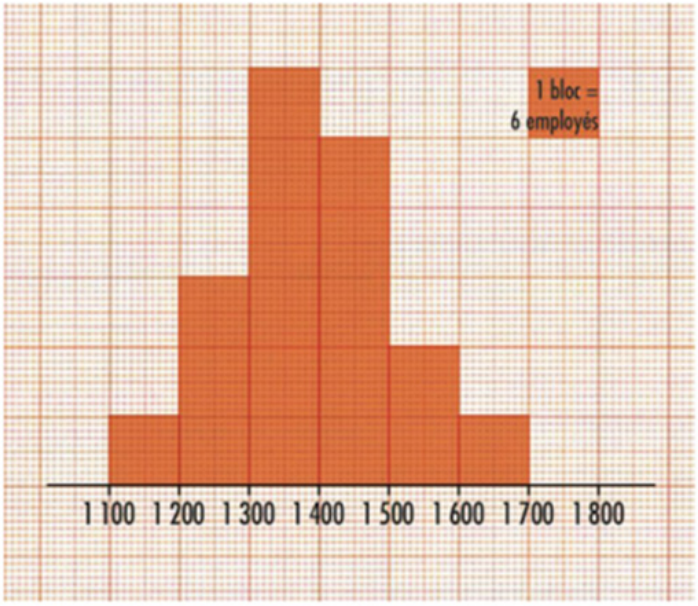
Paul affirme qu'il y a deux fois plus de personnes qui regardent « souvent » la TV que de personnes qui la regardent « parfois ». Est-ce vrai ?

Cas des histogrammes

La notion d'histogramme nécessite une clarification : des diagrammes en barres représentant des variables qualitatives ou quantitatives discrètes sont parfois qualifiés à tort d'histogrammes (autres disciplines, tableurs). On peut attirer l'attention des élèves sur le fait qu'un histogramme représente des données regroupées en classes et que dans ce cas on ne s'intéresse plus à la longueur (ou hauteur) des différents éléments mais à leur aire, ce qui nécessite dans certains cas de se référer à la légende explicitant ce que représente une unité d'aire. Cette particularité peut être illustrée par des représentations de données regroupées en classes d'amplitudes différentes.

Exemple

L'histogramme ci-dessous représente la répartition des salaires dans une entreprise :



Quel est le nombre de salariés dans cette entreprise ?

Le patron de cette entreprise affirme que plus de 40 % de ses employés ont un salaire au moins égal à 1 400 €. Qu'en pensez-vous ?

Utilisation des tableaux

La synthétisation de données nombreuses sous la forme de tableaux, la représentation d'une série à l'aide d'un graphique ou d'un diagramme sont des tâches qui permettent de laisser aux élèves une part d'initiative croissante au fur et à mesure que ces outils leur deviennent familiers. Le traitement d'exemples simples en exercice permet une bonne compréhension des différents modes de représentation tout en renforçant d'autres capacités dans le domaine du calcul, de la proportionnalité et de la géométrie. L'expertise dans la production de diagrammes statistiques n'est pas un objectif de formation, et encore moins d'évaluation.

Exemple

Source : Site de La Finance pour tous

Afin d'évaluer la répartition des billets distribués par un distributeur, une banque a recensé un samedi la valeur des billets distribués.

20	20	20	10	10	50	20	10	10
10	50	20	10	50	50	10	10	10
20	20	50	20	10	50	20	50	50
50	10	20	20	20	20	10	10	10
50	20	20	10	50	10	50	10	10
50	20	50	50	50	50	10	20	20
20	50	20	20	10	50	20	20	20
20	50	20	50	50	10	10	20	20
20	20	10	50	20	20	10	10	10

1. Réaliser un tableau des effectifs.
2. Réaliser un diagramme pour représenter les données.
3. Le directeur de la banque pense qu'il faut approvisionner le distributeur surtout en billets de 20 €. A-t-il raison ?

Fréquences, indicateurs de position et de dispersion

La notion de fréquence peut être introduite dans des situations où on est amené à comparer des sous-populations de populations d'effectifs distincts relativement à un caractère donné puis, dans un deuxième temps, elle peut être réinvestie dans des exemples où on compare les distributions de deux caractères d'une même population. Ces traitements se font en lien étroit avec le travail sur les différentes écritures d'un nombre et les notions de valeurs approchées et de pourcentages.

Deux indicateurs de position et un indicateur de dispersion des séries quantitatives sont introduits au cycle 4. On veillera à les présenter dans des situations simples qui justifient leur emploi et leur donnent du sens. La moyenne est familière aux élèves dans le cas de séries de notes ; il importe de ne pas s'en tenir à ce contexte et de la présenter dans des situations diverses dès la classe de 5e. Par la suite, on peut introduire des notions telles que l'âge moyen ou le salaire moyen d'une population, la température moyenne, etc., à l'aide de reformulations. On fait observer, par exemple, que le salaire moyen correspond au salaire que chaque individu toucherait si tous les salaires étaient égaux entre eux. On attirera l'attention des élèves sur le sens spécifique du mot moyenne dans la grandeur « vitesse moyenne » afin de ne pas générer de confusion avec la moyenne des vitesses. Après avoir introduit en classe de 5e la notion de médiane, dont la compréhension nécessite également des reformulations, il est intéressant d'interpréter simultanément ces deux indicateurs de position dans diverses situations et de comparer leur pertinence dans un contexte donné.

Exemple

Source : Salaires dans le secteur privé et les entreprises publiques

Le salaire mensuel net moyen en France en 2013, dans le privé ou en entreprise publique, s'est établi à 2202 euros. Le salaire mensuel net médian pour la même année s'élevait à 1772 euros.

Répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes :

AFFIRMATION	VRAI OU FAUX
Marie avait en 2013 un salaire net de 2000 € par mois ; son salaire était inférieur au salaire moyen français.	
Avec un salaire net de 2000 € par mois en 2013, Marie gagnait plus que la moitié des salariés français.	
En 2013 il y avait autant de salariés qui gagnaient moins de 2202 € que de salariés qui gagnaient plus de 2202 € net par mois.	
Si l'on additionne tous les salaires nets mensuels des salariés du privé ou d'entreprises publiques, et que l'on divise par le nombre de salariés, on obtient 1772 €.	

Différenciation

Plusieurs éléments de différenciation peuvent être introduits dans la résolution d'un problème :

- le nombre et la variété des supports permettant d'extraire de l'information, qui peuvent être modulés à l'intérieur d'un même problème en fonction de l'aisance des élèves ;
- la nature des supports contenant des informations, tous n'étant pas d'égale difficulté à lire ;
- le degré d'autonomie laissé aux élèves pour choisir une représentation ou pour la construire (choix des axes, des échelles) ;
- le contexte extra-mathématique plus ou moins familier.

Des approfondissements peuvent être proposés pour une partie des élèves ou pour toute la classe, à partir de quelques exemples contextualisés :

- étude de diagrammes ou graphiques représentant simultanément plusieurs caractères, éventuellement avec des échelles différentes tels qu'on en trouve en sciences expérimentales, en sciences humaines, en économie, etc. ;
- étude de représentations graphiques moins usuelles : radars, diagrammes polaires, représentations en trois dimensions, etc. ;
- introduction de la moyenne pondérée d'une série ;
- calcul des effectifs cumulés croissants dans des situations où cela prend du sens ;
- exemples de regroupements en classes d'amplitudes différentes et représentation par un histogramme ;
- en fin de cycle, estimation d'une moyenne à partir d'un regroupement en classes ; on pourra à l'aide d'un tableur comparer cette estimation à la valeur exacte de la moyenne, ou comparer les estimations obtenues avec des regroupements différents.

Exemples de situations d'apprentissage

Il est souhaitable que la majorité des situations d'apprentissage soient contextualisées. Cependant l'acquisition des capacités de base doit être l'objet d'un entrainement continu sur des exemples simples. Des situations plus riches sont étudiées dans des activités de réinvestissement nécessitant de mobiliser plusieurs capacités. Des tâches de plus grande envergure peuvent être envisagées telles que des mini-projets en petits groupes (relevés de données, résumés, traitement, présentation des résultats sous différentes formes), en conférant une part d'autonomie aux élèves.

Classes de problèmes

- Lecture et interprétation de données sur des supports variés
  Organisation et représentations de données
- Calcul et interprétation de fréquences
- Calcul et interprétation d'indicateurs de séries statistiques
- Recueil et traitement de données

Exemples d'activités

- Exemples de questions flash
- Exemples de tâches intermédiaires :
  - Grands lecteurs
  - Tirs cadrés
  - Temps de réaction
  - Au CDI
  - Sortie au cinéma
- Exemples d'activités avec prise d'initiative :
  - Prix d'un appartement
  - Analyse de résultats scolaires
  - Enquête à la cantine
  - Tourisme

Interdisciplinarité

Cette partie du programme s'appuie largement sur l'étude de situations authentiques issues de la vie courante, de mesures obtenues dans d'autres disciplines par les élèves eux-mêmes, de données scientifiques ou économiques disponibles sur Internet. Elle se

prête particulièrement à la mise en œuvre d'une pédagogie de projet, soit au sein du cours de mathématiques en lien avec les sujets d'étude d'autres disciplines, soit dans le cadre des enseignements pratiques interdisciplinaires (EPI) dont la plupart des thèmes peuvent intégrer le traitement de données chiffrées, recueillies par les élèves ou issues de sources authentiques.

Ressources complémentaires

- Ressources pour le secondaire du site de la société française de statistiques
- Site de l'Institut national de la statistique et des études économiques (Insee)
- Site de l'Institut national d'études démographiques (Ined)
- Espace enseignants du site « la finance pour tous »
- Les ateliers et conférences des journées nationales de l'APMEP

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Interpréter, représenter et traiter des données

Exemple d'exercice à prise d'initiative : enquête à la cantine

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Interpréter, représenter et traiter des données :
- recueillir des données, les organiser ;
- questionner la pertinence de la façon dont les données sont collectées ;
- utiliser un tableur pour traiter des données et pour les représenter graphiquement.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, représenter, calculer, communiquer.

Énoncés

Les résultats de l'enquête figurent dans le fichier traitement_donnees_initiative_enquete_cantine.xls

Afin de prendre en compte les goûts des élèves pour les légumes, un sondage a été effectué dans un collège auprès de tous les élèves.

On précise d'autre part que :
- les élèves internes mangent à la cantine midi et soir ;
- les élèves demi-pensionnaires ne mangent à la cantine que pour le déjeuner ;
- les élèves externes déjeunent occasionnellement à la cantine.

Réaliser un bilan de l'enquête sous la forme de tableaux et de graphiques afin d'aider le cuisinier à proposer des légumes qui prennent en compte les goûts des élèves pour les repas de midi et pour les repas du soir.

Pistes pédagogiques

Dans cette activité qui se prête bien à des travaux en groupes, il s'agit de réorganiser des données pour pouvoir les exploiter, en utilisant quelques formules élémentaires d'un tableur (sommes, tris), puis de présenter les résultats sous des formes adaptées.

L'initiative est laissée aux élèves quant aux données à prendre en compte pour les repas du midi et du soir, à la manière de les agglomérer et de les synthétiser.

Différentes aides pourront être fournies à la demande des élèves :
- Compréhension de la situation exposée et du résultat attendu par des reformulations
- Lecture du tableau
- Choix des types de graphique
- Fonctions du tableur

Variante : faire réaliser l'enquête qui aboutit aux données du tableau par les élèves.

Il pourra être intéressant de se rapprocher du professeur de SVT pour un travail conjoint sur l'éducation au goût et à la santé.

Réalisation du questionnaire

- Quelles questions poser pour recueillir les données ?
- Quelle est la forme des réponses (cases à cocher, libre, etc.) ?
- Quel est le format du questionnaire : papier ou électronique ?
- Réalisation et mise en forme du questionnaire.

Récolte des données

- Comment les agglomérer ?
- Comment les présenter pour pouvoir ensuite les traiter ?

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Interpréter, représenter et traiter des données

Exemple de tâche intermédiaire

Les grands lecteurs

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Interpréter, représenter et traiter des données :
- calculer et interpréter des caractéristiques de position ou de dispersion d'une série statistique.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, calculer, communiquer.

Énoncés

Deux classes du collège ont répondu à la question suivante : « Combien de livres avez-vous empruntés durant les douze derniers mois ? »

Classe A
1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 7 ; 7 ; 7

Classe B
Effectif total : 25
Moyenne : 4
Etendue : 8
Médiane : 5

Les deux classes ont communiqué les réponses de deux façons différentes :

1. Donner les résultats de la classe A sous la même forme que ceux de la classe B.
2. Un « grand lecteur » est un élève qui a emprunté cinq livres ou plus. Quelle classe a le plus de « grands lecteurs » ?
3. Dans quelle classe se trouve l'élève ayant emprunté le plus de livres ?

Source : http://chingatome.net/math/exercices/corrections/3eme/statistiques.pdf

Pistes pédagogiques

La question 1. convoque les savoir-faire de base sur la détermination des indicateurs, alors que les questions 2. et 3. nécessitent d'interpréter les indicateurs médiane et étendue, ce qui renforce leur compréhension.

Prolongements

On pourra proposer l'exercice 3 du sujet du brevet, Métropole juin 2013 en réinvestissement.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

Interpréter, représenter et traiter des données

Exemple d'exercice à prise d'initiative, à utiliser en formation : évolution du prix d'un appartement

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Interpréter, représenter et traiter des données :

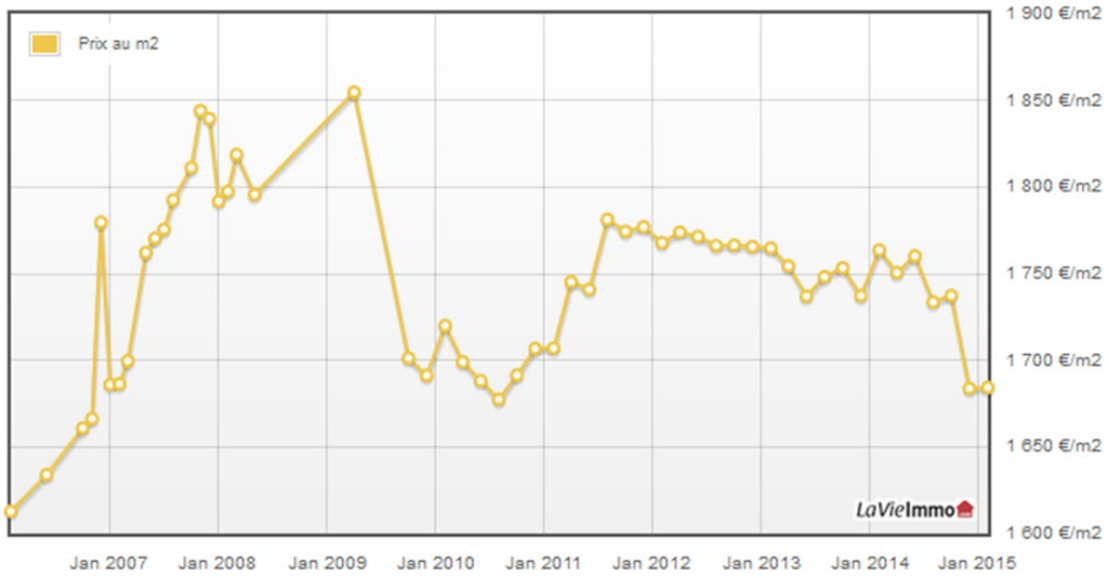
- recueillir des données, les organiser ;
- questionner la pertinence de la façon dont les données sont collectées ;
- utiliser un tableur pour traiter des données et pour les représenter graphiquement.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, représenter, calculer, communiquer.

Énoncés

Le graphique ci-dessous représente l'évolution entre janvier 2006 et janvier 2015 du prix du mètre carré des appartements dans une ville.



Donner une estimation du prix en janvier 2015 d'un appartement qui coutait 140 000 euros en janvier 2008. Expliquer la démarche.

Pistes pédagogiques

Outre le fait que la démarche n'est pas guidée, une difficulté réside dans le fait que le graphique ne permet pas une prise d'information précise sur les valeurs utiles à la résolution du problème. On peut construire, à partir de cet énoncé, plusieurs tâches en variant l'étayage selon les capacités des élèves.

Des aides pourront notamment être apportées pour :

- la lecture du graphique :
  - éléments significatifs ou non (points, segments) ;
  - nécessité de faire des approximations raisonnables des valeurs prélevées ;
  - nécessité d'émettre une hypothèse sur la stabilité du prix autour de janvier 2015.
- la construction de la démarche, on pourra suggérer des questionnements tels que :
  - « Qu'a-t-on besoin de connaître pour calculer le prix de l'appartement en 2015 ? » ;
  - « Que peut-on calculer, connaissant le prix de l'appartement en janvier 2008 et le prix du mètre carré à cette date ? ».

Une des difficultés est liée à la nature du graphique réel issu d'une revue en ligne, qui ne permet pas de prélever des valeurs exactes.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Interpréter, représenter et traiter des données

Exemples de questions flash

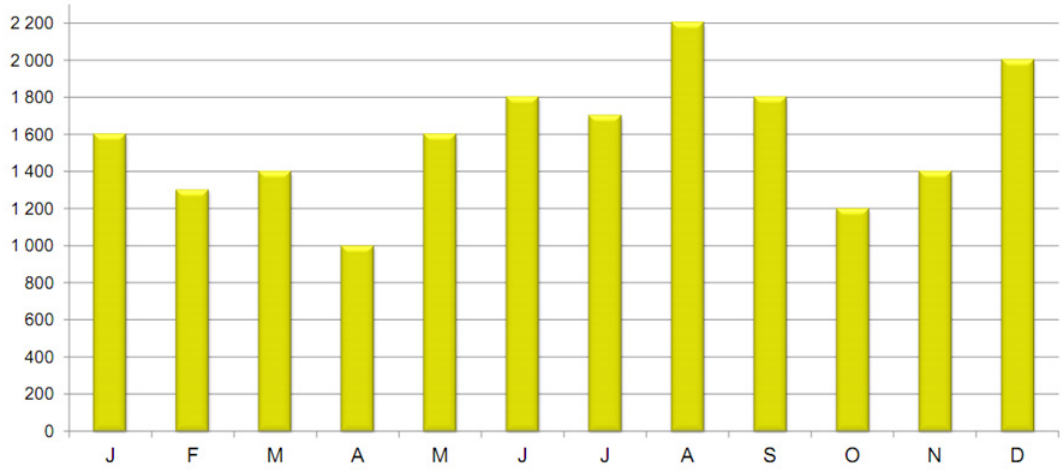
ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Interpréter, représenter et traiter des données :
- lire des données sous forme de données brutes, de tableaux, de graphiques ;
- calculer et interpréter des caractéristiques de position ou de dispersion d'une série statistique.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, modéliser, calculer.

Énoncés

Question 1

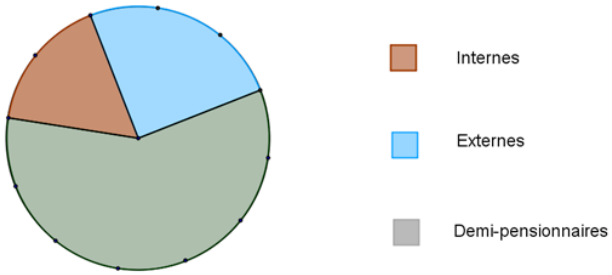
Le diagramme ci-dessous donne le montant des dépenses mensuelles d'une famille pendant une année.



1. Quels sont les deux mois durant lesquels cette famille a le plus dépensé ? Pour quelle raison d'après toi ?
2. Quelle est la dépense annuelle de cette famille durant l'année ?
3. Quelle est sa dépense mensuelle moyenne ?

Question 2

Le diagramme ci-dessous donne la répartition des élèves d'un collège selon qu'ils sont internes, demi-pensionnaires ou externes.

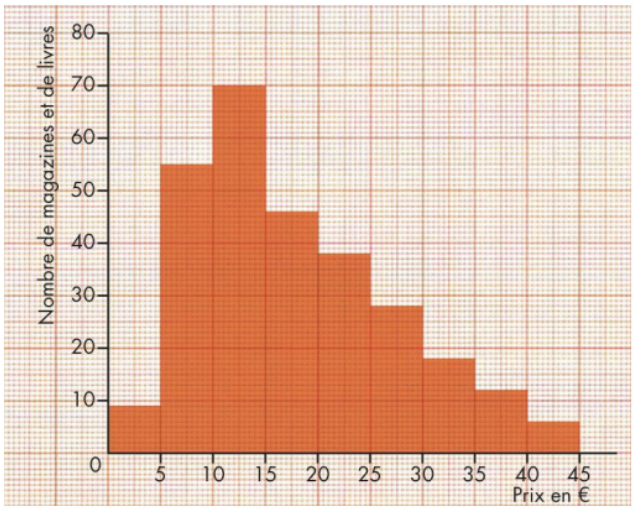


Le collège compte 46 élèves internes.

Combien y-a-t-il de demi-pensionnaires ?

Question 3

L'histogramme ci-dessous indique la répartition des ventes de magazines et de livres selon leur prix dans une librairie un samedi :



1. Combien de livres ou magazines vendus ont un prix inférieur ou égal à 15 € ?
2. Est-il vrai que près de deux tiers des livres vendus coûtent moins de 20 € ?
3. Maëva dit que moins le prix d'un livre est élevé, plus on vend. Est-ce vrai ?

Question 4

On demande à un groupe de 15 élèves combien de SMS ils ont envoyé dans la journée.
Voici leurs réponses :

1	0	2	3	4
8	12	7	5	6
20	10	0	2	1

Est-il vrai que la moitié des élèves de la classe envoie 4 SMS ou plus par jour ?

Question 5

Lors d'un contrôle de vitesse en ville, où la vitesse est limitée à 50 km.h-1, on a relevé les vitesses de plusieurs voitures dans le tableau suivant :

VITESSE EN KM.H^{-1}	48	50	52	55	58	61
EFFECTIF	18	20	5	15	8	3

Est-ce que la majorité des conducteurs a respecté la limitation de vitesse ?

Question 5 bis

Quelle est la vitesse moyenne à laquelle ces conducteurs circulaient ?

Question 6

Tom et Léa jouent avec un dé qu'ils lancent dix fois chacun en relevant le nombre de points sur la face supérieure. Voici leurs résultats :

Tom : 6 ; 5 ; 1 ; 3 ; 4 ; 1 ; 2 ; 5 ; 4 ; 3

Léa :

NOMBRE DE POINTS	1	2	3	4	5	6
EFFECTIF	0	3	2	2	1	2

Celui qui obtient la médiane la plus élevée gagne la partie. Qui a gagné cette partie ?

Question 7

Un agriculteur a pesé une douzaine d'œufs. Il a obtenu les masses suivantes :

61g – 62g – 58g – 61g – 56g – 63g – 55g – 64g – 61g – 63g – 63g – 65g

Que pèse en moyenne un œuf ?

Question 7 bis

L'agriculteur souhaite séparer ces œufs en 2 catégories de même taille : « œuf moyen » et « gros œuf ». À partir de quelle masse décide-t-il de changer de catégorie ?

Pistes pédagogiques

La question 2 sera travaillée en lien avec la proportionnalité.

Les questions 4 et 5 peuvent être proposées avant d'avoir abordé la notion de médiane, ou comme réinvestissement en faisant formuler la réponse à l'aide de cet indicateur.

La question 5 bis est un approfondissement de la notion de moyenne (moyenne pondérée) qui peut être proposé une fois que celle-ci est bien maitrisée.

Les deux versions des questions 6 et 7 ont pour objectif de faire travailler simultanément les notions de moyenne et médiane, afin de mieux les distinguer.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Interpréter, représenter et traiter des données

Exemple de tâche intermédiaire
La sortie au cinéma

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Interpréter, représenter et traiter des données :
- lire des données sous forme de tableaux et de graphiques.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, calculer, communiquer.

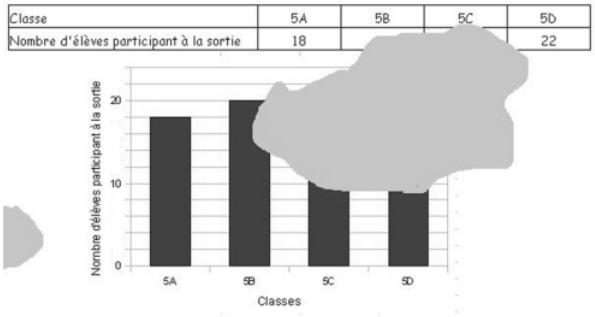
Énoncés

Un collège propose une sortie au cinéma pour les élèves des quatre classes de cinquième.

Le prix d'une place est 4 €. Le collège va payer 288 € pour tous les élèves.

Le professeur a récapitulé, sous forme d'un tableau et d'un diagramme, le nombre d'élèves de chaque classe qui participent à la sortie. Malheureusement la fiche récapitulative a été tachée et certaines données ne sont plus lisibles.

Classe	5A	5B	5C	5D
Nombre d'élèves participant à la sortie	18			22



Le professeur croit se souvenir qu'il y a autant d'élèves de 5C qui participent à la sortie que d'élèves de 5A. Qu'en pensez-vous ?

Source : Évaluation nationale en 5e – mai 2012

Pistes pédagogiques

Deux démarches sont possibles qui nécessitent de prélever et croiser des informations dans le texte, dans le tableau et sur le graphique :

- Supposer qu'il y a autant d'élèves en 5A et en 5C pour calculer le prix de revient de la sortie et le comparer à 288 €.
- Calculer l'effectif total pour déduire le nombre d'élèves en 5C.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Interpréter, représenter et traiter des données

Exemple de tâche intermédiaire : temps de réaction

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Interpréter, représenter et traiter des données :

- recueillir des données ;
- traiter des résultats issus de mesures ;
- calculer des caractéristiques de position d'une série statistique.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, modéliser, calculer.

Énoncé

On souhaite déterminer le temps de réaction des élèves de la classe pour rattraper un objet. Pour cela on réalise l'expérience suivante entre deux élèves : un testeur et un testé.
L'élève testeur tient la règle à la verticale par le haut et l'élève testé place sa main ouverte, le pouce au niveau de la graduation « zéro » (photo 1).
L'élève testeur lâche la règle que l'élève testé doit attraper la règle le plus rapidement possible. On note la graduation à laquelle l'élève testé a attrapé la règle (photo 2).

Photo 1

Photo 2

Le temps de réaction t exprimé en seconde s'obtient en utilisant la formule $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ où h est la hauteur, exprimée en mètre, à laquelle l'élève a attrapé la règle et g est un nombre égal à 9,81.

Chaque élève réalise plusieurs fois l'expérience et relève les valeurs de t obtenues.

Comment comparer les temps de réaction des élèves de la classe ?

Pistes pédagogiques

Cet exercice s'appuie sur une démarche d'investigation dans laquelle l'élève produit lui-même les données qui sont ensuite traitées pour établir un résultat qui ne peut être obtenu que par une expérimentation.

On pourra mettre en débat le choix de l'indicateur, médiane ou moyenne, le plus pertinent pour comparer les temps de réaction des élèves et sensibiliser les élèves au rôle des valeurs extrêmes dans chacun des cas.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Interpréter, représenter et traiter des données

Exemple de tâche intermédiaire : tirs cadrés

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Interpréter, représenter et traiter des données :

- lire des données sous forme de graphiques ;
- calculer des fréquences.

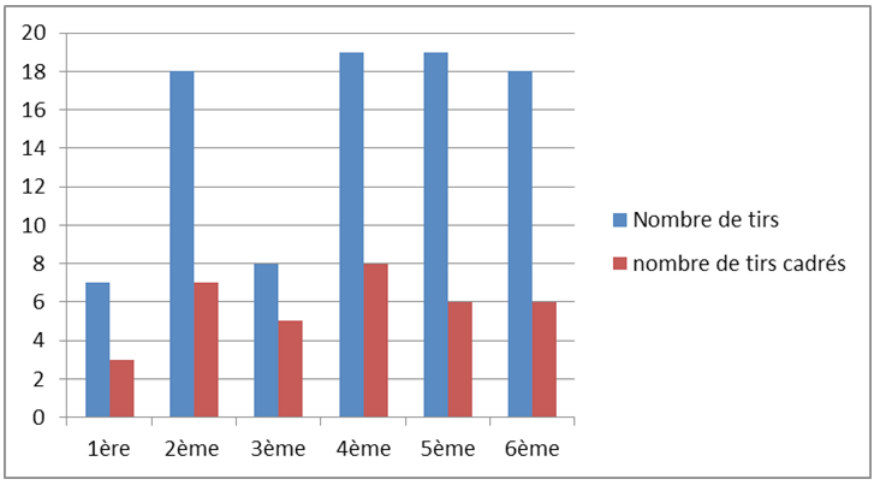
COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, calculer.

Énoncés

On a relevé le nombre de tirs effectués par une équipe de football au cours des différentes rencontres d'un championnat, ainsi que le nombre de tirs cadrés (un tir est cadré si le ballon est dirigé vers l'intérieur du but).

Le graphique ci-dessous représente les résultats de cette observation.



On mesure l'efficacité des joueurs en calculant la proportion de tirs cadrés parmi l'ensemble des tirs au cours d'une rencontre.

Quelles sont les deux rencontres au cours desquelles les joueurs ont été le plus efficace ?

Pistes pédagogiques

Le premier objectif est de prélever de l'information sur un graphique représentant deux séries de données.

Pour déterminer la journée où les joueurs ont été le plus efficace, on peut raisonner en remarquant que les joueurs ont cadré plus de la moitié des tirs une seule fois.

La détermination de la seconde meilleure journée conduit à comparer des nombres écrits sous la forme de fractions qu'on pourra exprimer de manière approchée en pourcentages en lien avec le travail sur ces notions.

Variante : classer les journées selon l'efficacité des joueurs.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Interpréter, représenter et traiter des données

Exemple d'exercice à prise d'initiative : tourisme

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Interpréter, représenter et traiter des données :
- lire des données sous forme de tableaux ;
- construire un diagramme dans un contexte économique ou social.

Résoudre des problèmes de proportionnalité :
- résoudre des problèmes de recherche de quatrième proportionnelle

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, représenter, communiquer.

Énoncé

L'observatoire régional du tourisme en Alsace publie chaque année un bilan des activités touristiques. Le tableau ci-dessous donne la fréquentation des sites les plus visités durant l'année 2013.

Le top 10 des sites les plus fréquentés en 2013

Raison sociale	Commune	Nombre d'entrées en 2013
Visite en bateau de la ville de Strasbourg	Strasbourg	794 049
Château du Haut Koenigsbourg	Orschwiller	506 415
Parc Zoologique et Botanique	Mulhouse	340 935
Montagne des Singes	Kintzheim	282 828
Montée à la plate-forme de la Cathédrale	Strasbourg	194 195
Cité de l'Automobile	Mulhouse	191 220
Ecomusée d'Alsace	Ungersheim	179 953
Le Vaisseau	Strasbourg	179 192
Centre Européen du Résistant Déporté	Natzwiller	164 063
Volerie des Aigles	Kintzheim	153 074

Source : ORTA données 2013. Données 2014 disponibles en juin 2015.

La Région Alsace souhaite illustrer ces données à l'aide d'un diagramme.
Réaliser un tel diagramme.

Pistes pédagogiques

L'intérêt de l'activité réside dans le choix d'un type de graphique qui représente de manière pertinente les données du tableau.

La réalisation du graphique permet de mobiliser des capacités et des connaissances sur la proportionnalité, ainsi que sur les ordres de grandeurs et les arrondis, éventuellement sur la mesure des angles pour les élèves qui construisent un diagramme circulaire ou semi-circulaire.

La comparaison des productions des élèves pourra conduire à un débat dans la classe sur les choix qui auront été opérés.

L'utilisation d'un tableur peut permettre d'explorer des pistes auxquelles les élèves n'auraient pas songé spontanément telles que les graphiques en étoile par exemple.

Cette activité peut être envisagée dans le cadre d'un EPI.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Interpréter, représenter et traiter des données

Exemple d'exercice à prise d'initiative : analyse de résultats scolaires

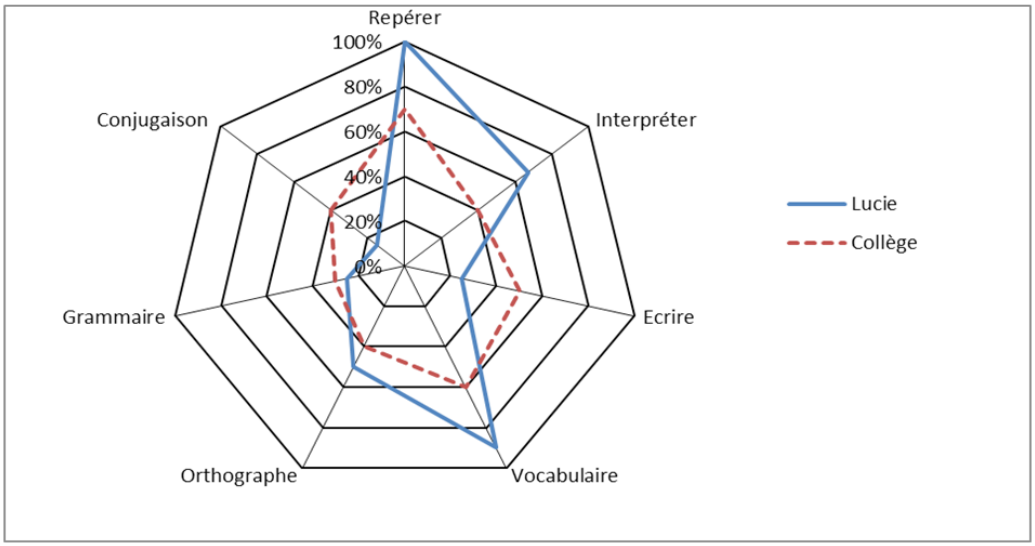
ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Interpréter, représenter et traiter des données :
- lire des données sous forme de tableaux et de graphiques ;
- construire un diagramme dans un contexte social.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, calculer, communiquer.

Énoncés

À la suite d'une évaluation de compétences en français qui concernait tous les élèves de 6e d'un collège, le professeur remet le bilan suivant à Lucie :

COMPÉTENCE	Repérer	Interpréter	Écrire	Vocabulaire	Orthographe	Grammaire	Conjugaison
RÉSULTATS	100%	67%	25%	90%	50%	25%	15%



Lucie souhaiterait savoir quels sont ses points forts par rapport à l'ensemble des élèves du collège et déterminer dans quels domaines elle doit faire prioritairement porter ses efforts. Pourriez-vous la conseiller ?

Retrouvez Éduscol sur

On pourra utiliser le fichier source traitement-donnees-initiative-resultats-scolaires.xls

Proposer une autre représentation graphique permettant de comparer les résultats de Lucie à ceux de l'ensemble des élèves de 6e.

Pistes pédagogiques

Le tableau des résultats de Lucie apporte une aide à la compréhension du graphique, il peut ne pas être fourni dans un premier temps à certains élèves plus à l'aise dans l'objectif d'apporter une différenciation.

La seconde question nécessite de prélever les valeurs de la série de données « collège » sur le graphique et de comprendre de manière plus fine sa construction. Le graphique ne permettant pas une lecture précise, les élèves devront effectuer des approximations pertinentes.

Des aides pourront être apportées pour le choix du type de graphique pouvant représenter simultanément les deux séries de données et pour le choix des échelles.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Interpréter, représenter et traiter des données

Exemple de tâche intermédiaire : les statistiques du CDI

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Interpréter, représenter et traiter des données :
- utiliser un tableur pour organiser et représenter des données.

Résoudre des problèmes de proportionnalité :
- résoudre des problèmes de quatrième proportionnelle.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, calculer, communiquer.

Énoncés

Ouvrir le fichier traitement_donnees_inter_cdi.xls.

Il donne le nombre d'élèves de chaque classe d'un collège ayant emprunté au moins un livre au CDI durant une année scolaire.

1. Réaliser un diagramme circulaire qui représente la répartition des emprunteurs par niveau de classe (6e, 5e, 4e, 3e).
2. Quelle est la mesure de l'angle de chacun des secteurs ?

Pistes pédagogiques

La tâche nécessite de réorganiser les données par niveau de classe en additionnant les effectifs avant de pouvoir construire le diagramme circulaire.

Une différenciation peut être introduite en variant le degré de l'autonomie laissée aux élèves.

Prolongements

- Faire calculer le nombre moyen d'élèves emprunteurs par niveau.
- Réaliser une enquête similaire en relevant les effectifs des classes et calculer les pourcentages d'élèves emprunteurs par classe ou par niveau.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités

Objectifs

Au cycle 4, un travail sur le hasard est engagé. Il vise à repérer les représentations initiales que les élèves s'en font, à les dépasser dans une perspective rationnelle pour aboutir à la notion de probabilité qui quantifie l'attente d'un événement dont la réalisation est considérée comme dépendante du hasard. L'approche se fait d'abord à partir de situations familières aux élèves et relevant de l'équiprobabilité puis, à partir de la classe de quatrième, de manière fréquentiste (observation de la stabilisation des fréquences) pour disposer d'autres modèles.

Lien avec les domaines du socle

L'approche de la notion de probabilité sous forme de débats à partir des représentations initiales des élèves permet de travailler le domaine 1 (les langages pour penser et communiquer), en utilisant la langue française à l'oral et le domaine 3 (la formation de la personne et du citoyen), en apprenant à respecter et à prendre en compte la parole d'autrui.

Les raisonnements et les calculs probabilistes (dans le cas de l'équiprobabilité ou non) mettent tout particulièrement en avant le domaine 4 (les systèmes naturels et les systèmes techniques), notamment en ce qui concerne la capacité à modéliser, à argumenter et à interpréter une situation.

La compréhension ou la conception de programmes ainsi que l'utilisation d'un tableur relèvent du domaine 1 (les langages pour penser et communiquer) concernant les langages mathématiques et informatiques.

Le domaine 2 (les méthodes et les outils pour apprendre) est également sollicité, notamment pour la recherche avec plus ou moins d'autonomie, le travail en groupes et la critique d'informations issues des médias.

Progressivité des apprentissages

Dès le début du cycle 4, des questions relatives au hasard sont abordées à partir de situations de la vie courante (jeux, achats, structures familiales, informations apportées par les médias, etc.). Les représentations initiales des élèves sont interrogées et des débats sont suscités, notamment grâce à des expérimentations qui peuvent donner lieu à recueil et traitement statistique des résultats. La perception naturelle du hasard peut être qualifiée dans un premier temps par des adjectifs (peu probable, probable, certain, ...). Ces débats et ces activités sont l'occasion, petit à petit, d'ordonner les probabilités, de quantifier le hasard sur une échelle de 0 à 1, d'introduire et de consolider le vocabulaire lié aux notions élémentaires de probabilités (expérience aléatoire, issue, probabilité). Les élèves calculent des probabilités

en s'appuyant sur des conditions de symétrie ou de régularité qui fondent le modèle équiprobable. La stabilisation des fréquences peut être constatée à partir de la classe de quatrième. L'interprétation fréquentiste permet alors de contrôler a posteriori une hypothèse d'équiprobabilité ou d'approcher une probabilité inconnue, ce qui conduit à dépasser le modèle d'équiprobabilité mis en œuvre en 5e.

Stratégies d'enseignement

Les élèves côtoient tous les jours l'incertitude et le hasard, mais pas forcément dans une perspective rationnelle. Il est essentiel de partir des représentations des élèves, parfois erronées, et d'« *aborder les questions relatives au hasard à partir de situations issues de la vie courante* ». La mise en œuvre graduée de l'enseignement des probabilités sur tout le cycle 4 doit permettre de :

- faire émerger les conceptions initiales des élèves de façon à lever les ambiguïtés, les malentendus (par exemple, « l'effet mémoire » conduisant à penser qu'après avoir obtenu six fois pile au jeu de pile ou face, la probabilité d'obtenir face est plus forte au septième lancer) qui font obstacle à la compréhension de l'approche mathématique de la notion de probabilité. Il s'agit de passer d'un hasard subi (dont on subit les effets : « on ne peut rien dire car c'est le hasard ») à un hasard construit auquel on peut rationnellement associer une quantification. Le rôle de la manipulation est essentiel ;
- prendre appui sur l'intuition de l'équiprobabilité pour quantifier le hasard ;
- faire observer des phénomènes aléatoires de manière rationnelle par le biais de protocoles expérimentaux ; les élèves seront invités à répéter des expériences aléatoires, à effectuer le relevé statistique des résultats, à les représenter afin d'appréhender peu à peu les régularités qui se font jour ;
- préparer la formalisation du langage probabiliste qui sera engagée au lycée.

Sans développement théorique sur le modèle, les élèves devront être capables d'interpréter en contexte des probabilités proches de 0, proches de 1 ; savoir qu'une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, connaitre les propriétés des probabilités pour les événements incompatibles et contraires. La formalisation ensembliste n'est pas un attendu du programme. Comparer des probabilités permet de réinvestir et de consolider le travail sur les fractions et les pourcentages.

Différenciation

Les possibilités de différenciation peuvent notamment s'exercer :

- **à partir de l'aide accordée aux élèves** (par la possibilité de questionner le professeur, par un document complémentaire : indication, exemple fourni, par la possibilité d'utiliser le cahier de l'élève, un outil : calculatrice, tableur) ;
- **en changeant la variable didactique**. Par exemple, pour la question « quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ? », on peut envisager, selon les élèves, des compositions d'urne différentes (urne 1 : 3 boules rouges et 4 vertes ; urne 2 : 3 boules rouges, 4 vertes, 2 bleues ; urne 3 : 3 boules rouges et n vertes) ;
- **en variant la complexité des épreuves** : épreuves simples (tirage d'une boule dans une urne) ou plus complexe (lancer de deux dés en même temps) ;
- **sur l'utilisation du tableur et de la programmation**, qui peut aller de l'interprétation d'un programme ou de son résultat, à la modification d'un code jusqu'à la création complète d'un programme.

Exemples de situations d'apprentissage

Classes de problèmes

- manipulations (lancer de dé, de pièces, tirage dans des urnes, ...) ;
- modélisation de situations de la vie courante ;
- jeux, mise en œuvre de stratégies ;
- construction et mise en œuvre de protocoles expérimentaux ;
- simulation (tableur, calculatrice, Scratch).

Exemples d'activités

- Exemples de questions flash
- Exemples de tâches intermédiaires :
  - Le jeu du franc-carreau
  - Loterie
- Exemples d'activités avec prise d'initiative :
  - Inventer une règle du jeu
  - Le jeu de la pyramide (avec utilisation possible de scratch)
  - Manipulations et stratégies

Interdisciplinarité

Des liens sont possibles avec le programme de sciences de la vie et de la Terre pour des modélisations (exemple du modèle proies prédateurs) ou avec la géographie pour ce qui concerne la gestion des risques et les prévisions (par exemple la notion de crue centennale).

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder les probabilités avec les élèves. Certains de ces documents ont été produits dans le cadre de l'accompagnement de programmes de mathématiques antérieurs. À ce titre, ces ressources s'inscrivent dans un contexte pédagogique désormais ancien. Néanmoins, elles proposent des éléments toujours pertinents.

- Probabilités
- Le hasard au collège - Jacques Verdier (bulletin 484 de l'APMEP)
- Le site Statistix, bien que n'ayant pas été actualisé récemment, donne de nombreux exemples intéressants et encore d'actualité de simulations.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités

Questions flash

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités :

- calculer des probabilités dans des cas simples ;
- quelques propriétés : la probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1 ; probabilité d'événements certains, impossibles.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Représenter, raisonner, communiquer.

Pistes pédagogiques

L'oral a toute sa place dans ces questions flash. Les réponses ne seront pas forcément assimilées une fois données et pourront conduire à un débat, à l'échange d'arguments (ceux-ci seront de plus en plus structurés au cours du cycle quand les élèves seront davantage outillés).

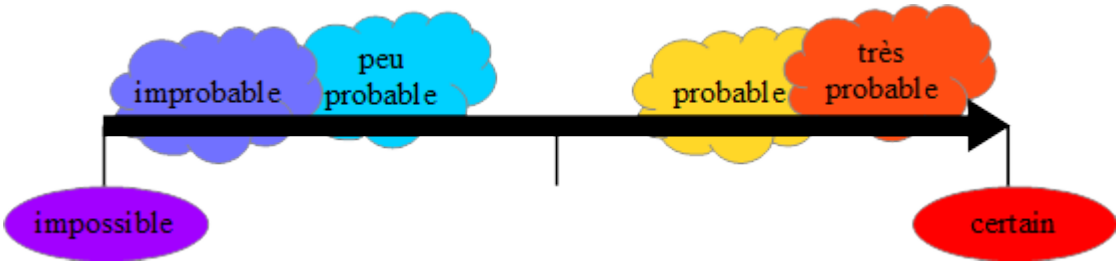
Les domaines 3 et 4 du socle peuvent tout particulièrement être mis en œuvre lors de ces débats : domaine 3 (la formation de la personne et du citoyen) pour apprendre à justifier ses choix et à confronter ses propres jugements avec ceux des autres et le domaine 4 (les systèmes naturels et les systèmes techniques) pour analyser, argumenter, formuler et apprendre à utiliser un langage adéquat.

En amont des questions flash, on peut construire avec les élèves une « échelle de probabilité ». Ce travail autour d'une « échelle de probabilité » a pour objectifs de :

- reconnaître des situations relevant d'une expérience aléatoire ;
- commencer à ordonner le hasard ;
- modéliser de façon accessible à tous l'expression du hasard (même sur des situations dont on ne sait pas calculer la probabilité) ;
- permettre d'émettre de façon accessible à chacun des conjectures ou hypothèses sur une situation de hasard ;
- créer un modèle de représentation s'adaptant à l'évolution des connaissances des élèves ;
- lever des ambiguïtés liées au langage courant.

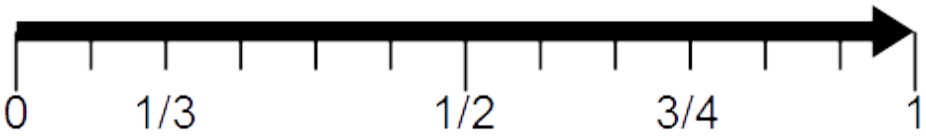
On peut ainsi imaginer de construire, dans un premier temps, une échelle à partir d'expressions.

Par exemple :

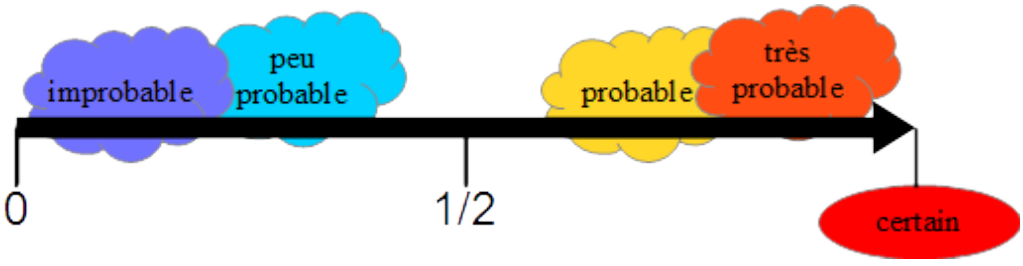


Cette échelle pourrait se construire dans le temps et s'appuyer sur les mots des élèves afin qu'ils puissent se l'approprier. Elle serait complétée en fonction des expériences du hasard des élèves, des situations rencontrées au sein de la classe, des débats auxquels ils ont donné lieu, etc.

Très vite cette représentation et les situations proposées aux élèves doivent les amener à se questionner sur la frontière très floue entre « probable » et « très probable » par exemple. L'intérêt de quantifier le hasard peut alors émerger. Le lien avec des expressions telles que « J'ai une chance sur deux d'obtenir pile. » ou « Je n'ai aucune chance que la pièce lancée tombe sur la tranche. » peuvent aider à une première mesure du hasard. La classe aboutit petit à petit à une échelle du type :



Entre ces deux échelles, il est bien entendu envisageable d'exploiter des représentations intermédiaires comme par exemple :



En parallèle à cette construction, il est possible d'exploiter l'échelle de probabilité dans des questions flash avec le double intérêt de construire une culture du hasard et de susciter les débats dans la classe.

En fonction du niveau de maîtrise attendu, on choisira l'échelle la mieux adaptée.

Énoncés

Exercice 1 : échelle de probabilité

Dans les questions flash ci-dessous, on demande de situer lorsque c'est possible la probabilité des événements sur l'échelle de probabilité :

1. Obtenir face quand on lance une pièce d'un euro.
2. Le début de l'année 2016 sera le 1er janvier.
3. Gagner le gros lot au loto.
4. Avoir de la pluie demain.
5. Avoir de la pluie le dernier jour du mois prochain.
6. L'équipe de France va remporter le prochain match international de football.
7. Un élève de la classe a son anniversaire demain.
8. Rencontrer un homme à trois têtes.

Exercice 2 : loterie et effet mémoire

Les numéros 13, 22, 34, 35 et 37 sont sortis la semaine dernière à une loterie.

Est-ce que, pour cette semaine, le numéro 35 a :

1. autant de chance ;
2. moins de chance ;
3. plus de chance.

de sortir que le numéro 5 ?

Est-il possible que l'on obtienne cette semaine exactement le même tirage que la semaine dernière ?

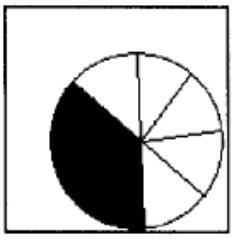
Exercice 3 : avec des roues

1. Quelle couleur a le plus de chance d'être obtenue quand on fait tourner la roue ci-dessous ?

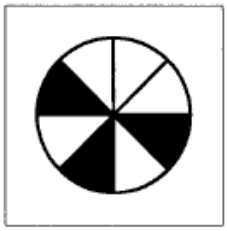
2. Avec la roue 1, la couleur noire a :
   a. autant de chance ;
   b. plus de chance ;
   c. moins de chance ;

d'être obtenue qu'avec la roue 2.

Roue 1



Roue 2

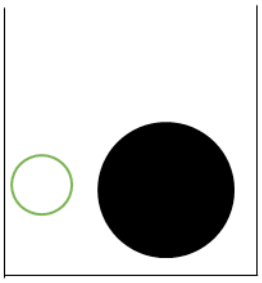


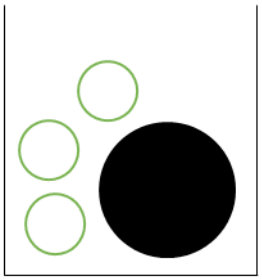
3. On place une fève au hasard dans une galette des rois. On partage cette galette en huit parts égales.

Quelle probabilité a-t-on de tomber sur la part ayant la fève ?

Exercice 4 : avec des urnes

1. A-t-on plus de chance de tirer une boule blanche dans :
   a. une urne A qui contient 3 boules toutes blanches ?
   ou
   b. une urne B qui contient 500 boules blanches et une boule rouge ?
2. A-t-on plus de chance de tirer une boule blanche ou une boule noire dans chacune des urnes ci-dessous ?





Remarque : il n'y a pas de « bonne réponse » attendue. L'intérêt est de mettre en évidence l'expression « indiscernable au toucher ». On peut ensuite reprendre le même exercice avec des boules de même taille, indiscernables au toucher.

Exercice 5 : avec un tableau

3		Sportif	Non sportif	
4	Filles	35	20	
5	Garçons	25	20	
6				100

L'expérience consiste à choisir un élève au hasard.

1. Quelle est la probabilité que ce soit un sportif ?
2. Quelle est la probabilité que ce soit une fille sportive ?
3. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon non sportif ?

Exercice 6 : avec un dé

1. En lançant un dé, qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : un 2 ? un 6 ?
2. Martin et Faïza jouent aux dés, chacun avec son dé. Mais Martin est un peu tricheur et a échangé son dé avec un autre qui n'a que des 6 sur toutes les faces.
   Quand Faïza lance son dé, peut-on prévoir quel numéro sortira ? Et quand Martin lance le sien ?
3. L'expérience consiste à lancer un dé à six faces non truqué.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir la face 2 ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 3 ?
   c. On a lancé trois fois de suite le dé et on a obtenu la face 1. On s'apprête à relancer le dé, quelle est la probabilité d'obtenir à nouveau la face 1 ?

4. Dans un jeu de société, il faut faire un total de six pour commencer à jouer. Est-ce qu'il vaut mieux lancer un dé ou deux dés ?

Exercice 7 : trouver un modèle

1. On veut jouer à pile ou face, mais on ne dispose pas de pièce. Comment peut-on faire autrement ?

2. On veut jouer au jeu de l'oie, mais on a perdu le dé. Comment peut-on faire autrement ?

Exercice 8 : tremblement de Terre – tiré de PISA

On a diffusé un documentaire sur les tremblements de terre et la fréquence à laquelle ils se produisent. Ce reportage comprenait un débat sur la prévisibilité des tremblements de terre.

Un géologue a affirmé : « ***Au cours des vingt prochaines années, la probabilité qu'un tremblement de terre se produise à Zedville est de deux sur trois.*** »

Parmi les propositions suivantes, laquelle exprime le mieux ce que veut dire ce géologue ?

A. Puisque $\frac{2}{3} \times 20 \approx 13{,}3$, il y aura donc un tremblement de terre à Zedville dans 13 à 14 ans à partir de maintenant.

B. $\frac{2}{3}$ est supérieur à $\frac{1}{2}$, on peut donc être certain qu'il y aura un tremblement de terre à Zedville au cours des 20 prochaines années.

C. La probabilité d'avoir un tremblement de terre à Zedville dans les vingt prochaines années est plus forte que la probabilité de ne pas en avoir.

D .On ne peut pas dire ce qui se passera, car personne ne peut être certain du moment où un tremblement de terre se produit.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités

Un exemple de tâche avec prise d'initiative

Différence de deux dés

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités :

- calculer des probabilités dans un contexte simple (par exemple, évaluation des chances de gain dans un jeu et choix d'une stratégie).

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, raisonner, modéliser, communiquer.

Énoncé

On joue à un jeu de hasard.

Le jeu consiste à lancer deux dés à six faces, puis à calculer la différence entre le plus grand des deux nombres obtenus et le plus petit.

Avant de lancer les dés, chaque joueur doit choisir un nombre (plusieurs joueurs peuvent choisir le même nombre). On gagne si le nombre choisi est obtenu.

Quel nombre choisissez-vous ? Argumentez.

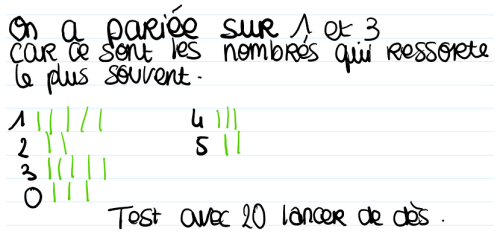
Pistes pédagogiques

La classe peut être divisée en groupes, chaque groupe disposant d'un tableur et de dés.

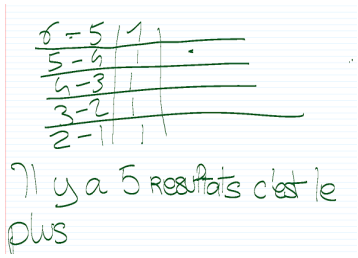
Les représentations initiales des élèves ainsi que les pistes de travail et les raisonnements sont multiples ainsi que le montrent les productions d'élèves suivantes . Cette activité peut être proposée en tout début de cycle 4, dans la phase d'introduction des probabilités. On peut aussi la proposer plus tard dans le cycle, avec dans ce cas une exigence plus importante dans la formalisation des réponses.

(source collège de Fontreyne – Gap – Académie d'Aix-Marseille)

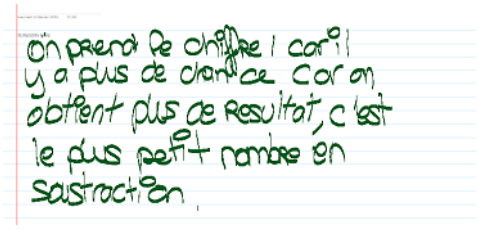
Production 1



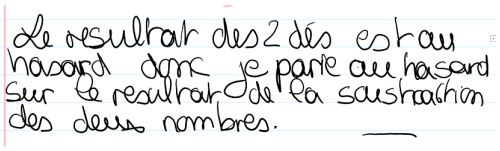
Production 2



Production 3

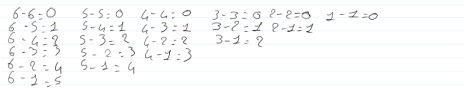


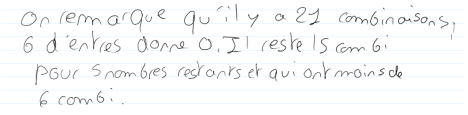
Production 4



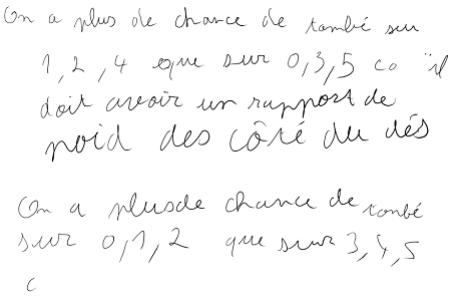
Production 5

6	-1	5
6	-2	4
6	-3	3
6	-4	2
6	-5	1
6	-6	0
5	-1	4
5	-2	3
5	-3	2
5	-4	1
5	-5	0
4	-1	3
4	-2	2
4	-3	1
4	-4	0





Production 6



Retrouvez Éduscol sur

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités

Un exemple d'activité avec prise d'initiative

Inventer une règle du jeu

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités :

- aborder les questions relatives au hasard à partir de problèmes simples ;
- calculer des probabilités dans un contexte de jeu.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, modéliser, raisonner, communiquer.

Énoncé

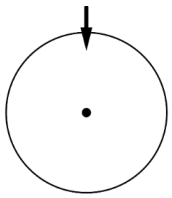
1. Voici une « fiche jeu » incomplète. Il s'agit de la compléter *en inventant une règle du jeu pour laquelle la probabilité de gagner est indiquée sur l'échelle de probabilité suivante :*

Nombre de joueur(s)	1 joueur
Matériel	1 dé à 6 faces
Règle du jeu	

2. Voici une « fiche jeu » incomplète. Il s'agit de la compléter *en inventant une règle du jeu dans laquelle la probabilité de perdre est indiquée sur l'échelle de probabilité suivante :*

Nombre de joueur(s)	1 joueur
Matériel	1 dé à 6 faces et 1 pièce de 1€
Règle du jeu	

3. Voici une « fiche jeu » incomplète. Il s'agit de la compléter ***en précisant le matériel nécessaire et en inventant une règle du jeu équitable mais pour laquelle il est possible mais peu probable que les deux joueurs perdent.***

Nombre de joueur(s)	2 joueurs
Matériel	Une roue 
Règle du jeu	

4. Voici une « fiche jeu » incomplète. Il s'agit de la compléter en ***précisant le matériel nécessaire et en inventant une règle du jeu pour laquelle il est équiprobable de gagner ou de perdre.***

Nombre de joueur(s)	1 joueur
Matériel	Un sac avec des billes de 3 couleurs différentes.
Règle du jeu	

Pistes pédagogiques

Principes

Il est demandé aux élèves de concevoir un énoncé avec des contraintes imposées sur la situation à inventer.

Ce sont les élèves qui créent. Ils montrent ainsi leur degré d'appropriation d'un modèle probabiliste.

Le choix laissé aux élèves et la liberté des mises en situations doit permettre à chacun de s'approprier à son rythme les situations et de se questionner sur les démarches possibles.

Préalables à l'activité d'invention à partir d'une situation usuelle qui produit du hasard

Pour cette activité, il est nécessaire d'avoir déjà installé et fait vivre au sein de la classe des situations usuelles qui produisent du hasard : pile ou face, lancer de dé, tirage dans une urne, roue, ...

Objectifs

- Approfondir la connaissance des situations usuelles qui produisent du hasard.
- Amener les élèves à inventer des modèles probabilistes.

Il est nécessaire d'avoir fait vivre au préalable au sein de la classe une « Fiche jeu » (cf.infra) ainsi que la représentation de l'échelle des probabilités (cf. document ressources « questions flash » qui indique la manière de travailler avec des échelles de probabilités). Familiarisés avec cette « Fiche jeu », les élèves pourront en inventer d'autres.

Exemple de « Fiche jeu »

Nombre de joueur(s)	2 joueurs
Matériel	1 pièce
Règle du jeu	Un joueur choisit « pile » et l'autre prend « face ». Un des joueurs lance la pièce. Le côté qui apparaît désigne le gagnant.

Ce type de fiche pourra être exploité dans le cadre de questions flash pour les situations les plus abordables ou sous la forme d'exercices travaillés en classe demandant plus de temps de réflexion.

Prolongement : exemples d'énoncés sous forme de « Fiches jeu » à exploiter

1. Sam joue à un jeu :

Nombre de joueur(s)	1 joueur
Matériel	1 dé à 6 faces
Règle du jeu	Le joueur lance le dé une fois. Il gagne s'il obtient un multiple de 3.

« Sam a deux fois moins de chance de gagner que de perdre. »
Vrai ou faux ?

Alternative (plus facile) : « Sam a plus de chance de perdre que de gagner. »
Vrai ou faux ?

2. Paul et Anna jouent à un jeu :

Nombre de joueur(s)	2 joueurs
Matériel	1 dé à 6 faces
Règle du jeu	Un des joueurs lance le dé une fois. S'il obtient 3, il gagne. S'il obtient un nombre pair, l'adversaire gagne. Sinon, les deux joueurs perdent.

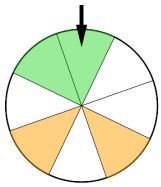
« Anna lance le dé. Elle a trois fois moins de chance de gagner que Paul. »
Vrai ou faux ?

3. Inès (8 ans) et Fanny (11 ans) jouent à un jeu :

Nombre de joueur(s)	2 joueurs
Matériel	1 sac contenant 3 billes bleues et 6 billes blanches.
Règle du jeu	Le joueur le plus jeune tire une bille au hasard. Si la bille est blanche, il gagne. Si la bille est bleue, le joueur le plus âgé gagne.

« Fanny a une chance sur deux de gagner. Le jeu est donc équitable. »
Vrai ou faux ?

4. Victoria, Blandine et Farid jouent à un jeu :

Nombre de joueur(s)	3 joueurs maximum
Matériel	1 roue 
Règle du jeu	Chaque joueur choisit une couleur. On fait tourner la roue. Le gagnant est celui dont la couleur choisie « sort ».

« Farid n'a pas choisi le vert et Blandine a deux fois plus de chance de gagner que Victoria. »
Quelle est la couleur choisie par chaque joueur

Modalités possibles de mise en œuvre

Dans la partie « énoncé » sont donnés quelques exemples illustrant la diversité et la complexité des énoncés possibles. L'exploitation sous la forme de « Fiche jeu » permet une réflexion dans un cadre connu et rassurant. Elle peut ainsi être employée en « fil rouge » **tout au long du cycle**. Il est recommandé de commencer par des situations très simples avant d'aborder les situations les plus complexes exposées ci-dessus.

Le travail peut se faire par équipe après une phase de recherche individuelle. Les élèves peuvent débattre de leurs propositions et/ou s'entraider pour s'approprier la situation (**Domaine 2 du socle commun**). La nécessité de convaincre exigera peut-être de faire des essais pour les situations les plus complexes (**Domaine 3**). Les élèves seront amenés à faire évoluer la règle du jeu, comme les modèles en sciences expérimentales, en prenant en compte d'éventuelles observations dans des cas plus complexes (**Domaine 4**).

Cette situation permet d'adapter les « contraintes de matériel et de probabilité de gain/perte » afin de permettre de consolider la confiance en soi et de favoriser la mise en activité de chacun (**Domaine 2**).

Ce travail peut s'envisager également dans le cadre de l'accompagnement personnalisé (**Domaine 2**) pour une différenciation permettant à chacun de progresser.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités

Un exemple de tâche avec prise d'initiative

Jeu équitable ?

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités :

- calculer des probabilités dans un contexte simple (par exemple, évaluation des chances de gain dans un jeu et choix d'une stratégie).

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, raisonner, modéliser, communiquer.

Énoncé

On considère deux jeux de hasard et on se demande s'ils sont équitables ou non.

Jeu A : jeu des produits

À chaque partie, on lance deux dés et on multiplie les nombres obtenus. Le joueur 1 gagne si le produit est impair. Le joueur 2 gagne si le produit est pair.

On te propose de jouer au « *jeu des produits* ». Choisis-tu d'être le joueur 1 ou bien le joueur 2 ?

Jeu B : jeu des sommes

À chaque partie, on lance deux dés et on additionne les nombres obtenus. Le joueur 1 gagne si la somme est impaire. Le joueur 2 gagne si la somme est paire.

On te propose de jouer au « *jeu des sommes* ». Choisis-tu d'être le joueur 1 ou bien le joueur 2 ?

Pistes pédagogiques

Cette activité peut être proposée dès l'introduction des probabilités en 5e et tout au long du cycle 4.

Dans cette activité, les élèves explorent deux jeux pour deux joueurs. Ils débattent du fait que le jeu proposé est ou non équitable.

Il est nécessaire d'avoir travaillé au préalable la notion de « jeu équitable » et/ou de proposer un temps de travail sur ce terme lors de l'activité.

Il est important de laisser vivre les stratégies personnelles des élèves. Suivant leur expérience du hasard et leur capacité d'abstraction, les élèves auront ou non besoin de jouer.

Le premier jeu n'est pas équitable et cela apparaît assez vite en jouant. Le second jeu est équitable, ce qui est plus difficile à observer et les avis peuvent être partagés.

À un premier niveau, il n'est pas attendu des élèves de calculer des probabilités mais de développer une intuition des chances et probabilités de gagner.

Si les élèves ont réalisé des parties (par exemple par binômes), on peut mettre en commun les données de la classe, notamment à propos du jeu B.

On peut ensuite, selon le niveau d'apprentissage, raisonner sur les tables de multiplication et d'addition pour calculer les probabilités.

Table des produits

produit	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Table des sommes

somme	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités

Exemples d'activités à prise d'initiative

Stratégie dans un jeu

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités :
- calculer des probabilités dans un contexte simple (par exemple, évaluation des chances de gain dans un jeu et choix d'une stratégie).

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, raisonner, communiquer.

Énoncé

On considère le jeu donné par la règle suivante :

But du jeu	Obtenir le plus grand score sans dépasser 23.
Règle du jeu	Le jeu se joue à deux équipes l'une contre l'autre. Chaque équipe lance, alternativement l'une après l'autre, un dé à six faces et ajoute à son score les points obtenus. À chaque tour, l'équipe qui a la main a le choix entre : • relancer le dé ; • arrêter définitivement de jouer. Quand une équipe décide de s'arrêter l'autre peut continuer seule. La partie s'arrête quand les deux équipes se sont arrêtées ou si une équipe dépasse 23.
Équipe gagnante	Dès qu'une équipe dépasse 23, la partie s'arrête. L'équipe adverse est gagnante. Dans le cas contraire, l'équipe gagnante est celle qui a obtenu le plus grand score à la fin de la partie. En cas d'égalité de score la partie est déclarée nulle.

1. Réaliser quelques parties pour découvrir le jeu. Constituer pour cela des équipes ; le jeu se déroulant entre deux équipes l'une contre l'autre.
2. Chaque équipe travaille ensuite indépendamment : dans chaque équipe chacun des joueurs, à tour de rôle, décide seul de lancer le dé ou de s'arrêter.
3. Élaborer une stratégie. Chaque joueur met la sienne par écrit ou l'expose oralement.
4. Refaire des parties entre les deux équipes initiales. Chaque joueur met en œuvre sa propre stratégie (au cours de 3 à 5 parties).
5. Comparer les différentes stratégies et se mettre d'accord entre les deux équipes sur une « stratégie gagnante ».

VARIANTE POSSIBLE

Deux joueurs l'un contre l'autre. Ils lancent le dé l'un après l'autre. Un joueur est déclaré gagnant s'il a le plus grand score à la fin de la partie sans dépasser 23. La partie est nulle lorsqu'ils sont *ex aequo* en fin de partie. Quand un joueur décide d'arrêter, l'autre joueur ne peut plus effectuer qu'un lancer ou s'arrêter.

Pistes pédagogiques

Les probabilités sont souvent liées aux jeux. C'est l'occasion de faire réfléchir les élèves sur l'efficacité des stratégies ou des paris. Une stratégie éclairée par le calcul de probabilité n'a d'intérêt que si l'on répète plusieurs fois le jeu et qu'on souhaite augmenter ses chances de gagner. On peut alors définir une stratégie de jeu comme un ensemble de règles de décision qu'on pourrait programmer sur un ordinateur, de sorte qu'il sache jouer à ce jeu contre un autre joueur.

Cette activité peut être positionnée dès le début du cycle 4, peu après les premières introductions des probabilités, ou plus loin dans le cycle. La durée est entre une demi-heure et 1h30.

Si les élèves ne testent que sur peu de parties, ils ont tendance à privilégier les stratégies prudentes (s'arrêter dès que l'on a 18 ou plus), car jouer peu de parties ne permet pas de se rattraper. Un prolongement avec l'utilisation du tableur peut permettre de mettre en valeur d'autres stratégies.

Cette activité donne l'occasion de raisonner par disjonction de cas. On peut par exemple amener les élèves à remarquer qu'il y a des seuils en deçà desquels le hasard n'a pas d'influence sur l'issue de la partie (les trois premiers lancers au moins, le seuil de 17).

Pour la variante, la stratégie écrite n'est pas forcément demandée. L'important est que l'élève soit capable, à un état donné de la partie, d'élaborer une stratégie raisonnée basée sur une quantification.

Prolongement avec des gains : selon les élèves, on pourra soit leur fixer une règle de gain soit leur demander d'en proposer une.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités

Un exemple de tâche intermédiaire

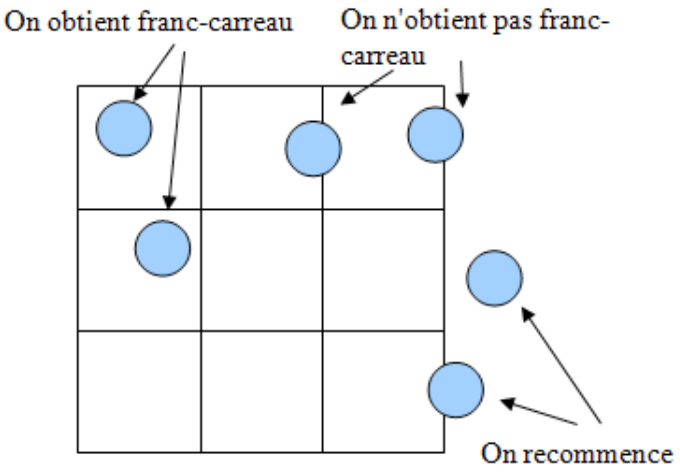
Le jeu de franc-carreau

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Faire le lien entre fréquence et probabilité, en constatant matériellement le phénomène de stabilisation des fréquences.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, modéliser.

Énoncé

LE JEU DE FRANC CARREAU
Pour jouer au jeu de franc-carreau, on dispose d'un damier constitué de carreaux de forme carrée de 5 cm de côté et d'une pièce de 10 centimes d'euro, dont le rayon est 1 cm. Le jeu consiste à lancer la pièce au hasard sur le damier.
Si la pièce ne chevauche pas les lignes du quadrillage, on dit alors que la pièce est à franc-carreau.
Si le centre de la pièce est à l'extérieur du damier, alors le lancer ne compte pas et on recommence le lancer.



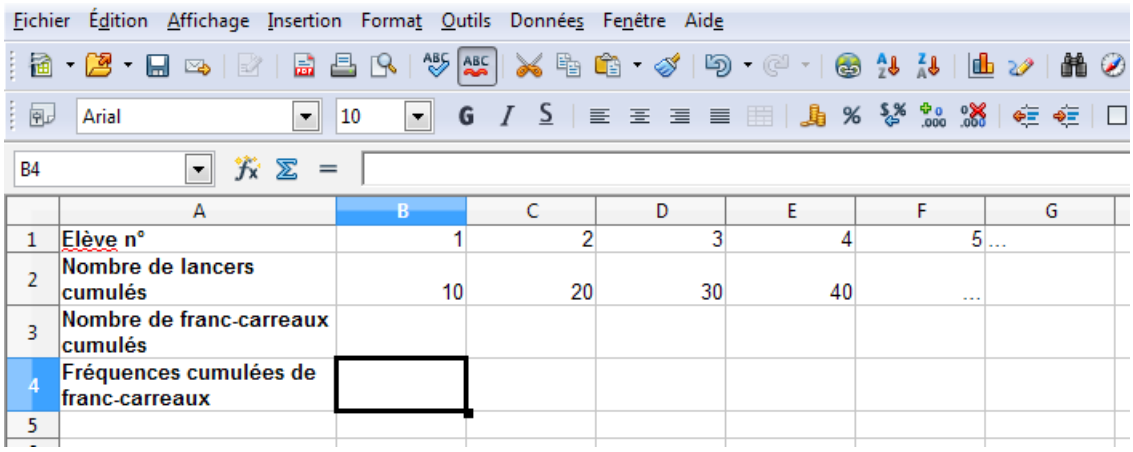
Quelle est la probabilité d'obtenir un franc-carreau ?

1. Effectuer une série de 10 lancers et noter pour chaque lancer 1 si on obtient franc-carreau et 0 sinon.
Calculer la fréquence de francs-carreaux obtenue. Comparer les fréquences obtenues par les autres élèves de la classe.

Le professeur peut projeter plusieurs séries ainsi obtenues par les élèves afin de mettre en évidence la variabilité des résultats (apparition plus ou moins fréquente de franc-carreaux et aléa des séries obtenues). Chaque série est particulière, on ne voit pas de lien entre-elles.

Bilan
Une série seule ne permet pas de conjecturer la probabilité cherchée car il n'y a pas assez d'expériences. L'idée de « mutualiser » les résultats peut émerger des échanges avec la classe.

2. Sur tableur, réaliser le tableau suivant puis compléter les deux premières lignes où l'on cumule, élève après élève, le nombre de lancers et le nombre de francs-carreaux.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Élève n°	1	2	3	4	5	…
2	Nombre de lancers cumulés	10	20	30	40	…	
3	Nombre de franc-carreaux cumulés						
4	Fréquences cumulées de franc-carreaux						
5							

a. Quelle formule peut-on écrire dans la cellule C2 pour compléter la ligne 2 en la recopiant vers la droite ?

b. Quelle formule peut-on insérer dans la cellule B4 afin de pouvoir remplir la ligne 4 en la recopiant vers la droite ?

c. Insérer un graphique sur la feuille de tableur représentant la fréquence de franc-carreaux obtenus en fonction du nombre de lancers pris en compte.

d. Quelle semble être la probabilité de franc-carreau ?

Bilan
Sur un grand nombre de lancers, la fréquence des franc-carreaux semble se stabiliser autour d'une valeur qui permet d'estimer la probabilité d'obtenir franc-carreau.

3. Modélisation et calculs (à effectuer au titre de la différenciation)

Il est possible de construire avec les élèves un modèle de la situation : en s'intéressant à la position du centre de la pièce sur l'un des carrés et en calculant le rapport des aires.

ABCD représente un carré de 5 cm du damier.

a. Dessiner ce carré. Colorier ensuite la zone pour laquelle le franc-carreau n'est pas réalisé.
b. Calculer alors la probabilité de franc-carreau puis la comparer avec le graphique de la question précédente.

Pistes pédagogiques

Cet énoncé peut être utilisé pour introduire l'approche fréquentiste ou pour la consolider. Cela nécessite d'avoir stabilisé les premières représentations des élèves sur les probabilités et ne peut donc être utilisé en début de cycle.

La dernière question proposée relève de la différenciation. Elle est à destination des élèves montrant une bonne compréhension des autres questions et permet de calculer la probabilité de franc-carreau.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités

Exemples d'exercices à prise d'initiative

Pyramide de Galton

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Faire le lien entre fréquence et probabilité, en constatant matériellement le phénomène de stabilisation des fréquences ou en utilisant un tableur pour simuler une expérience aléatoire (à une ou à deux épreuves).

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

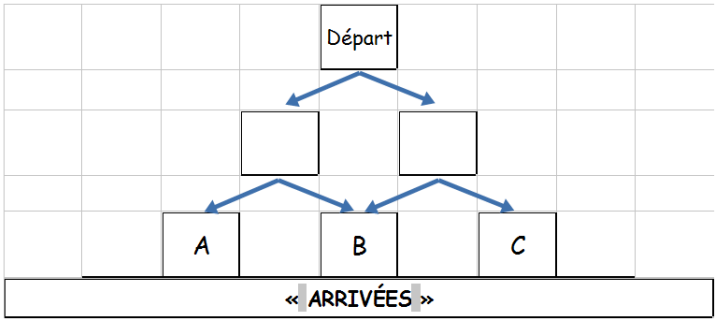
Modéliser, Représenter, raisonner.

Énoncé

Jeu de la pyramide

Nombre de joueur(s)	2 ou 3
Matériel	• 1 urne • 4 billes rouges • 4 billes blanches • 1 plateau de jeu • 3 jetons « Arrivées » A, B et C.
Préparation du jeu	Chaque joueur pioche au hasard un des 3 jetons « Arrivées ».
Déroulement de la partie	• Le premier joueur mélange les huit billes dans l'urne. • Il tire une bille de l'urne : - si elle est rouge, il descend son jeton sur la gauche. - si elle est blanche, il descend son jeton sur la droite. • Il remet la bille dans l'urne. • Puis il recommence pour descendre sur une des cases « Arrivées ». • Il gagne 1 point s'il arrive sur la case « Arrivées » correspondant à son jeton, 0 sinon.

Plateau de jeu de la pyramide



Faire jouer plusieurs parties aux élèves, ce qui devrait leur permettre de s'apercevoir que la case « B » gagne plus souvent que les autres. Des considérations de symétries permettent d'établir que la probabilité d'arrivée sur la case A est la même que celle d'arriver sur la case C.

Questions
- Est-il vrai qu'on a plus de chance d'arriver sur la case B que sur la A ou la C ?
- Quelle est la probabilité d'arriver sur la case B ? sur la A ? sur la C ?

Pistes pédagogiques

L'utilisation de Scratch permet de simuler la situation. On pourra se référer au fichier : probabilites_initiative_galton_arbre.sb2.

Cette activité peut donner l'occasion de programmer. Il est possible de proposer :
- une ossature de programme à compléter ;
- un ou plusieurs bloc(s) déjà écrit(s) que l'élève pourra agencer ou compléter ;
- le programme complet à l'élève qui pourra l'utiliser tel quel.

La même situation peut être travaillée dans un autre contexte : cf. fichier probabilites_initiative_Galton_fusee.sb2.

Une variante est également possible sous la forme d'une marche aléatoire (cf. fichier probabilites_initiative_Galton_promenade.sb2). Cette situation légèrement plus simple en programmation pour l'élève met en évidence deux positions inaccessibles, ce qui permet d'aborder les événements impossibles.

Enfin, à l'aide d'un tableur, on peut simuler un nombre important d'expériences et mettre en évidence la stabilisation des fréquences afin de commencer à quantifier le hasard.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités

Exemples de tâches intermédiaires

Loterie

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Évaluer des chances de gain dans un jeu.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Raisonner, communiquer.

Énoncé

Une publicité pour une loterie indique le slogan suivant pour la loterie à venir :

> **SAMEDI 14 JANVIER**
> 100% des gagnants auront tenté leur chance

Commenter ce slogan.

Pistes pédagogiques

Le travail sur ce slogan entre dans le cadre de l'éducation aux médias (exploiter l'information de manière raisonnée).

Cet énoncé peut être proposé à n'importe quel niveau du cycle :
- en début de cycle, il servira de base pour un échange dans le cadre des premières représentations sur les probabilités ;
- en fin de cycle, il permettra de revenir sur une situation de la vie courante, de faire un retour sur les représentations des élèves et de les stabiliser.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Résoudre des problèmes de proportionnalité

Objectifs

La proportionnalité est une notion autour de laquelle peuvent être pensés et organisés de nombreux apprentissages mathématiques. Sa maîtrise est essentielle pour un usage dans la vie courante, dans diverses disciplines ou dans le cadre professionnel. Son apprentissage s'inscrit dans la durée.

Dès le cycle 3, l'élève a enrichi le champ des problèmes multiplicatifs en rencontrant des situations contextualisées relevant de la proportionnalité. Il a résolu des problèmes de prix, de consommation, de recettes en utilisant différentes procédures (propriétés d'additivité et d'homogénéité de la proportionnalité, passage par l'unité), essentiellement dans le cadre des grandeurs. Il a enfin appris à repérer des situations relevant ou ne relevant pas de la proportionnalité.

Ce travail se poursuit au cycle 4. L'élève est capable de choisir la procédure la plus adaptée à la situation à laquelle il est confronté pour calculer une quatrième proportionnelle. Il sait représenter dans un cadre graphique une situation de proportionnalité. Il mobilise la proportionnalité dans différents contextes : liés aux grandeurs, à la vie courante ou aux autres disciplines, ou encore dans des situations décontextualisées internes aux mathématiques.

Le travail sur les pourcentages occupe une place privilégiée dans le cadre de la proportionnalité. Les situations proposées amèneront en particulier les élèves à :

- appliquer un pourcentage (par exemple un taux de TVA sur un prix) ;
- calculer un pourcentage (par exemple traduire une proportion en pourcentage ou calculer un pourcentage d'augmentation).

Des situations numériques simples relevant de la proportionnalité donnent l'occasion de travailler le calcul mental afin de construire et renforcer des automatismes.

Le tableur et le grapheur constituent des outils utiles pour la résolution de certains problèmes.

Liens avec les domaines du socle

Outre les domaines 2 et 4 qui font explicitement référence aux mathématiques, la résolution de problèmes de proportionnalité s'inscrit aussi largement dans les autres domaines.
Les mathématiques participent à la maitrise de la langue française. Elles offrent de nombreuses occasions pour le développement de compétences langagières en élargissant le répertoire lexical des élèves, en favorisant les situations de communication orale et écrite.

L'élève peut combiner avec pertinence et de façon critique les informations explicites et implicites issues de sa lecture (domaine 1.1).

Etudier des relations entre deux grandeurs mesurables permet d'effectuer de manière efficace certains calculs en utilisant un langage mathématique adapté (domaine 1.2).

La formation de la personne et du citoyen est largement convoquée dans l'interprétation des proportions, qui fait appel à la réflexion et au discernement (domaine 3.3).

La maîtrise des pourcentages est un outil indispensable pour comprendre les représentations du monde et l'activité humaine (domaine 5).

Progressivité des apprentissages

Apprendre à mobiliser la proportionnalité pour résoudre un problème est un travail entamé au cycle 3, où l'on a rencontré la notion de « fois plus ou fois moins ». Cette approche est élargie dès le début du cycle 4, et sur toute sa durée. Les apprentissages relatifs à la proportionnalité ne se réduisent pas à la simple acquisition de techniques de calcul. Ils concourent à la construction du sens des nombres. Ainsi l'égalité de deux fractions peut être mise en relation avec le produit en croix.

L'élève met en œuvre progressivement différents moyens de calculer une quatrième proportionnelle. Les propriétés d'additivité, puis d'homogénéité peuvent être travaillées dès le début du cycle, avec un coefficient d'homogénéité entier en début d'apprentissage, puis décimal ou fractionnaire. La propriété de linéarité est plus complexe à mettre en œuvre, puisqu'elle est peut faire intervenir des changements d'unités (passage d'une masse à un prix, par exemple) et pourra être travaillée à partir du milieu de cycle.

L'élève décide si une situation relève de la proportionnalité ; il construit et complète un tableau de proportionnalité. En fin de cycle, la fréquentation des fonctions linéaires et affines, du théorème de Thalès et des homothéties lui permet de varier les points de vue en apportant un nouvel éclairage sur les situations de proportionnalité.

Les situations proposées sont riches et variées afin de donner du sens et de l'intérêt à l'utilisation de la proportionnalité. Un travail régulier mettant en jeu des situations de proportionnalité accompagne la construction des différents nombres en éclairant leur sens : nombres entiers, nombres décimaux, nombres rationnels…

Stratégies d'enseignement

Tout au long du cycle, l'enseignant outille peu à peu les élèves avec un jeu de procédures variées (additivité, homogénéité, passage à l'unité, coefficient de proportionnalité). Il les incite à les comparer au travers de la résolution d'un problème afin de mettre en évidence la méthode la mieux adaptée. Il ne s'agit pas d'institutionnaliser une méthode « du professeur » avant que l'élève ne lui ait donné du sens et en ait compris l'efficience.

Pour donner du sens à cette notion, il est important de travailler sur des situations relevant de la proportionnalité mais aussi sur d'autres qui ne relèvent pas de ce modèle.

Dans le cadre de la résolution de problèmes, la proportionnalité se prête particulièrement à un travail sur les compétences « représenter » et « modéliser ». La proportionnalité peut être déclinée au sein de différents cadres, non exclusifs les uns des autres, dans différentes situations, contextes ou domaines du socle.
Classiquement, on distingue trois cadres : le cadre des grandeurs, déjà étudié au cycle 3 (on met en relation deux grandeurs telles que masse et prix, masse et longueur, longueur du rayon et périmètre d'un cercle, vitesse et durée…), le cadre numérique (on s'intéresse uniquement aux relations entre nombres) et le cadre graphique (on représente la relation entre les grandeurs ou entre les nombres dans un système d'axes gradués). Un objectif de la fin du cycle 4 est que l'élève sache passer d'un cadre à un autre dans une résolution de problème.

Dans un contexte numérique, l'enseignant peut :

- s'appuyer sur les acquis du cycle 3, principalement sur la résolution des problèmes impliquant la proportionnalité en effectuant un retour à l'unité ;
- travailler les autres méthodes de détermination d'une quatrième proportionnelle, en dégageant les avantages et les inconvénients de chacune d'entre elles :
  - les propriétés d'additivité et d'homogénéité d'un tableau de proportionnalité ;
  - le coefficient de proportionnalité ;
  - le « produit en croix » ;
  - la « règle de trois ».

On développe chez l'élève un sens critique quant au choix de la méthode la plus appropriée, selon les données fournies *(retour à l'unité donnant un nombre non décimal)* ou la question posée *(faut-il trouver une valeur manquante ou plusieurs ?)*

L'enseignant peut relier travail sur les pourcentages et sur la proportionnalité :

- appliquer ou calculer un pourcentage ;
- traduire une évolution en pourcentages.

Dans un contexte géométrique, l'enseignant peut :

- s'appuyer sur les acquis du cycle 3 pour exploiter le lien de proportionnalité entre le périmètre d'un polygone régulier et la longueur du côté ;
- présenter les agrandissements-réductions de figures planes sous l'angle de la proportionnalité ;
- travailler sur les échelles ;
- interpréter dans le cadre de la proportionnalité les relations qui découlent de l'utilisation du théorème de Thalès.

Le travail sur les périmètres, les aires et les volumes met en évidence que toutes les situations ne relèvent pas de la proportionnalité.

Dans un contexte mêlant géométrie et algèbre, l'enseignant peut :

- modéliser, par un graphique dans un repère, une situation de proportionnalité ;
- analyser une représentation graphique pour déterminer si elle relève ou non de la proportionnalité ;
- placer l'étude des fonctions linéaires dans le cadre de la proportionnalité : les élèves reconnaissent le coefficient de la fonction linéaire comme un coefficient de proportionnalité.

Retrouvez Éduscol sur

Quand la situation s'y prête et lors d'un travail sur les points précédents, l'enseignant peut utiliser les outils numériques :

- les tableurs-grapheurs pour :
  - compléter un tableau de proportionnalité en recopiant une formule ;
  - représenter graphiquement une situation modélisée par des valeurs numériques ;
- les logiciels de géométrie dynamique pour :
  - mesurer des côtés puis reporter des mesures dans un tableur ;
  - construire la courbe d'une fonction linéaire ;
  - faire agir des homothéties sur des figures.

Ainsi, au fil des situations rencontrées en classe, l'élève peut :

- analyser le problème et s'interroger sur la validité du modèle proportionnel ;
- choisir un cadre, numérique ou graphique ;
- réinvestir la proportionnalité pour éclairer une nouvelle notion (par exemple le théorème de Thalès, les fonctions linéaires).

Différenciation

L'enseignement curriculaire visé par les programmes amène à concevoir le collège dans un principe de plus large inclusion. Il s'agit de prendre l'élève tel qu'il est, de l'accompagner dans son parcours personnel. Cela passe par une prise en compte de l'hétérogénéité de la classe, une différenciation et une diversification des apprentissages.

Pour cela :
- l'enseignant analyse la nature des erreurs commises par les élèves pour les aider à les surmonter. Il peut faire évoluer un certain nombre de variables didactiques en liaison avec les difficultés éventuellement rencontrées : identification des grandeurs, identification d'une situation de proportionnalité ou non[1], choix de la procédure de résolution, mise en œuvre de cette procédure ;
- l'enseignant confronte les élèves à des situations relevant de cadres et de contextes différents.

Parmi les variables didactiques sur lesquelles on peut jouer dans le cadre d'une différenciation pédagogique, on peut citer la nature des nombres entrant en jeu ou leur rapport, le nombre de couples proposés, les situations et les contextes, ou encore l'échelle d'agrandissement ou de réduction (les grandes échelles étant plus faciles à utiliser que les petites).

Exemples de situations d'apprentissage

Classes de problèmes

- Reconnaître ou compléter un tableau de proportionnalité.
- Utiliser un coefficient de proportionnalité.
- Déterminer une quatrième proportionnelle, en particulier dans des situations liées à d'autres disciplines, éventuellement dans le cadre d'une activité de calcul mental.
- Appliquer ou déterminer un pourcentage en particulier dans un contexte économique.

1. Certains élèves font la confusion courante entre grandeurs proportionnelles et grandeurs liées ou entre proportionnalité et variations dans le même sens ou encore supposent que tout tableau est un tableau de proportionnalité.

- Utiliser ou déterminer une échelle d'agrandissement et de réduction, en particulier en lien avec la SVT, la géographie ou la technologie.
- Représenter graphiquement une situation de proportionnalité, mais aussi des situations de non proportionnalité.
- Utiliser le théorème de Thalès et faire le lien avec la proportionnalité.
- Repérer, à l'aide de logiciels de géométrie, des figures homothétiques.
- Modéliser une situation de proportionnalité à l'aide d'une fonction linéaire, c'est-à-dire : donner son expression algébrique, savoir la représenter, l'exploiter afin de répondre au problème posé.
- Utiliser les grandeurs composées ou quotients : calculer une vitesse moyenne, calculer la distance d'un trajet, calculer la durée d'un trajet ; on pourra aussi se reporter au document grandeur et mesure.

Exemples d'activités

Plusieurs exemples de questions flash.

Trois tâches intermédiaires : croissance d'un chêne, analyse de photographies en lien avec les SVT et constructions de triangles.

Deux activités à prise d'initiative : production de pétrole et plan d'une maison.

Interdisciplinarité

Le travail sur la proportionnalité rencontre la plupart des thèmes du programme de mathématiques du cycle 4, par exemple au travers de l'utilisation des pourcentages, des échelles, des agrandissements/réductions, des homothéties et du théorème de Thalès.

C'est également un thème qui permet de nombreux liens interdisciplinaires. S'ils peuvent être mis en lumière dans le cadre des enseignements pratiques interdisciplinaires, ces liens méritent aussi d'être signalés dans le déroulement ordinaire des enseignements (en mathématiques et dans l'autre discipline concernée).

En physique, le travail sur la loi d'Ohm peut être mené en vérifiant expérimentalement que la tension aux bornes d'un résistor donné est proportionnelle à l'intensité du courant qui le traverse, le coefficient de proportionnalité définissant la résistance du résistor. D'autres lois physiques au programme du cycle 4 mettent également en jeu la proportionnalité. A contrario, la mise en évidence que l'énergie cinétique n'est pas proportionnelle à la vitesse permet de sensibiliser les élèves aux limites du modèle mathématique de la proportionnalité.

En SVT on pourra de même distinguer des situations de proportionnalité comme la dépendance de l'apport énergétique d'un aliment avec sa masse, de situations qui n'en relèvent pas, par exemple la croissance d'un enfant en fonction de son âge.

En géographie, si le contexte des échelles de cartes est un cadre privilégié pour aborder des situations de proportionnalité, il n'est pas le seul. Ainsi, le rendement par hectare d'un champ de céréales est un exemple concret permettant le réinvestissement de la notion mathématique de coefficient de proportionnalité.

D'autres situations s'y prêtent également : calculs de consommation d'eau ou d'énergie, évolution d'une production industrielle dans le temps, débit de transmission d'une liaison numérique, etc.

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder la notion de proportionnalité avec les élèves :

- proportionnalité au collège : une ressource d'accompagnement des anciens programmes
- Exemples de vidéos supports pour des situations relevant de la proportionnalité
- Dossier didactique des mathématiques APMEP n°457
- L'enseignement de la proportionnalité à la liaison primaire-secondaire in *Recherches en éducation* – rapport final
- Donner du sens aux mathématiques pour donner envie de réussir

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Résoudre des problèmes de proportionnalité

Un exemple de tâche intermédiaire

La croissance d'un chêne

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Résoudre des problèmes de proportionnalité :

- étudier des relations entre deux grandeurs mesurables pour identifier si elles sont proportionnelles ou non.

La situation peut mobiliser aussi les connaissances et compétences suivantes :

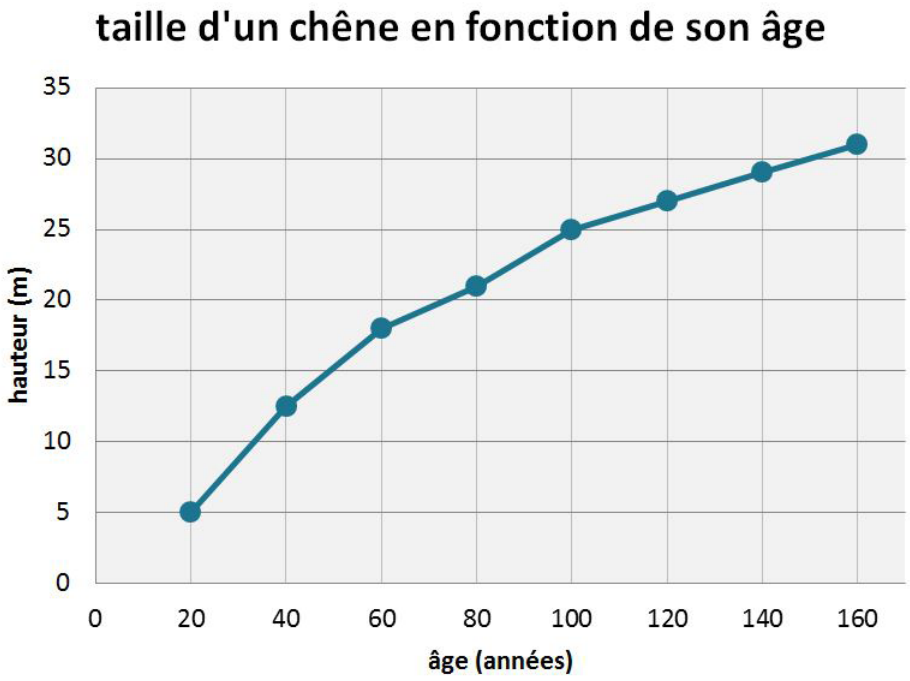
- interpréter, traiter des données ;
- passer d'un cadre graphique à un cadre numérique.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Raisonner, communiquer.

Énoncé

Le graphique ci-dessous donne la taille d'un chêne en fonction de son âge.
Peut-on prévoir combien il mesurera 200 ans après avoir été planté ? Expliquer.



Pistes pédagogiques

L'activité peut être donnée tout au long du cycle.

Toute réponse argumentée est à travailler au sein de la classe, par exemple :

- on ne peut pas répondre car ce n'est pas une droite passant par l'origine, ce n'est pas une situation de proportionnalité, la graduation de l'axe des abscisses s'arrête à 160 ;
- on peut répondre par extrapolation en continuant « harmonieusement » le graphique.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Résoudre des problèmes de proportionnalité

Questions « flash »

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Résoudre des problèmes de proportionnalité :

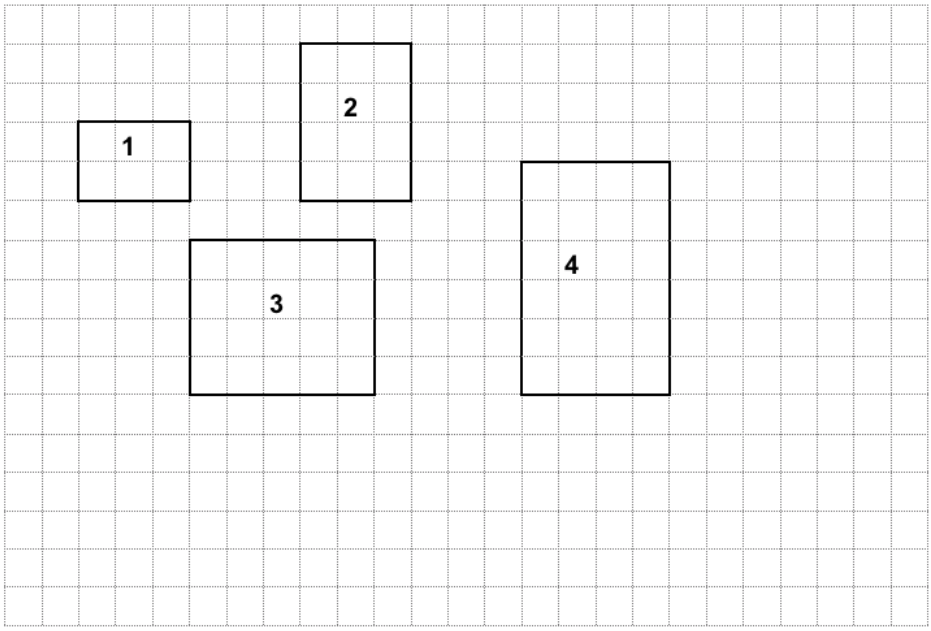
- étudier des relations entre deux grandeurs mesurables pour identifier si elles sont proportionnelles ou non ;
- résoudre des problèmes de recherche de quatrième proportionnelle ;
- compléter un tableau de proportionnalité ;
- calculer et interpréter des proportions ;
- faire le lien entre fonction linéaire et proportionnalité.

COMPÉTENCE TRAVAILLÉE

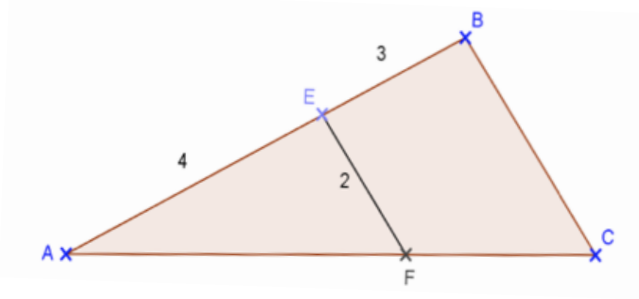
Calculer.

Énoncés

1. Parmi les rectangles 2, 3 et 4 y-a-t-il des agrandissements du rectangle 1 ?



2. Dans la figure ci-dessous, qui n'est pas à l'échelle, les droites (EF) et (BC) sont parallèles. Calculer la longueur BC.



3. Si on double les longueurs des côtés d'un rectangle d'aire 12 cm², quelle est l'aire du rectangle agrandi?

4. Sur une carte à l'échelle 1/50 000, quelle est la distance réelle entre deux villes distantes de 10 cm sur la carte?

5. Dans un magasin, chaque chaise est vendue au même prix. Un client achète cinq chaises pour 122,50 €. Quel est le prix de 10 chaises ? Quel est le prix de 11 chaises ?

6. Gaspard a 12 ans et chausse du 38. Quelle sera la pointure de Gaspard lorsqu'il aura 24 ans ?

7. Une voiture roule pendant 30 min à la vitesse moyenne de 84 km/h. Quelle distance parcourt-elle?

8. Compléter le tableau de proportionnalité suivant :

3		12
4	5	

9. Voici un tableau de proportionnalité. Trouver le coefficient de proportionnalité.

7	21	7,7
3	9	3,3

10. Le tableau suivant représente-il une situation de proportionnalité ?

36	45	54
$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{10}$

11. Vrai ou faux ?

- 50 % de 240 est égal à 130
- 100 % de 45 est égal à 90
- 10 % de 80 est égal à 8

12. Un article qui coûte 40 € voit son prix augmenter de 10 %. Quel sera son prix après l'augmentation ?

13. On sait que 125 $ = 100 €. On dispose d'étiquettes en euros et en dollars, pour 4 produits différents. Regroupez les étiquettes qui correspondent aux mêmes prix.

100 €	200 €	300 €	20 €
250 $	25 $	125 $	375 $

14. On considère la fonction linéaire f telle que : f(4) = - 2

- Quelle est l'expression algébrique de f ?
- Quelle est l'image de 2 par cette fonction ?

Pistes pédagogiques

On peut faire varier les variables didactiques comme la valeur des nombres utilisés, la nature de ceux-ci, ce qui permet de mettre en place de la différenciation et de faire varier les procédures mises en œuvre par les élèves.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Résoudre des problèmes de proportionnalité

Un exemple de tâche avec prise d'initiative

Le plan d'une maison

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Résoudre des problèmes de proportionnalité :

- étudier des relations entre deux grandeurs mesurables pour identifier si elles sont proportionnelles ou non ;
- résoudre un problème de recherche de quatrième proportionnelle ;
- calculer un pourcentage.

La situation peut mobiliser aussi les connaissances et compétences suivantes :

- utiliser un rapport de réduction ou d'agrandissement (échelle d'une carte) ;
- utiliser les instruments de tracé ;
- contrôler la vraisemblance de ses résultats.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, calculer, communiquer.

Énoncé

Lucie et Marc doivent poser le revêtement de sol dans leur pièce de vie principale (séjour, salle à manger et cuisine) de leur nouveau pavillon.

Ils veulent poser du carrelage dans la cuisine et du parquet dans le reste de la pièce.

Le carrelage qu'ils ont choisi est en promotion actuellement.

A l'aide du document 1 (page suivante) et du plan du rez-de-chaussée de leur pavillon (document 2 : plan d'une maison), aide Lucie et Marc à estimer le montant de leur facture.

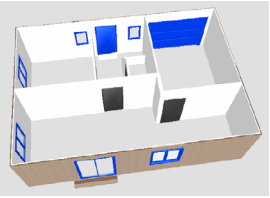
Pistes pédagogiques

L'activité peut être donnée tout au long du cycle.

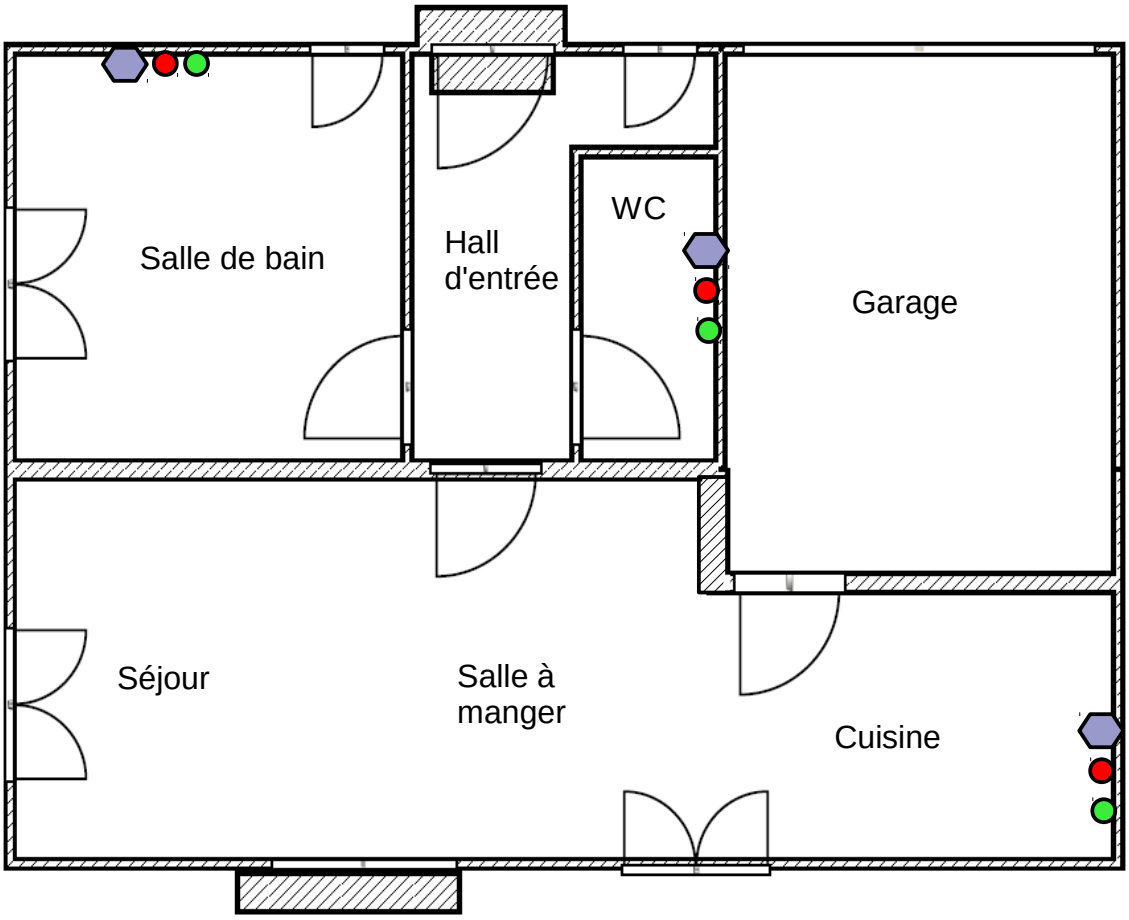
Pour aider les élèves, on pourra les conduire à identifier d'abord la surface de sol à recouvrir de parquet et de carrelage, identifier le prix de chacun des produits et la réduction à appliquer à ces prix.

Document 1

Document 2



Légende
- prise téléphonique
- arrivée d'eau
- évacuation des eaux usées
- évacuation / circulation d'air



Echelle 1/70

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Résoudre des problèmes de proportionnalité

Un exemple de tâche intermédiaire

La taille d'un ovule

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Résoudre des problèmes de proportionnalité :

- étudier des relations entre deux grandeurs mesurables pour identifier si elles sont proportionnelles ou non ;
- utiliser l'échelle d'une carte.

La situation peut mobiliser aussi les connaissances et compétences suivantes :

- confronter des idées, argumenter, démontrer ;
- utiliser les instruments de tracé.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, calculer.

Énoncé

D'après les photographies ci-dessous, il semble que l'ovule soit plus gros que la partie correspondante du spermatozoïde appelée la «tête ». Est-ce exact ?

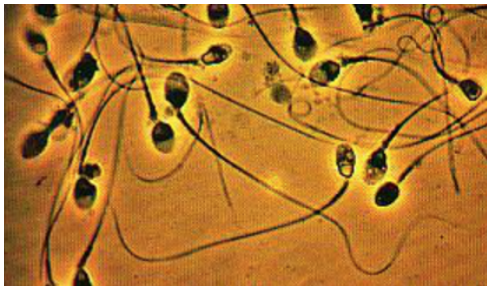


Photo a : spermatozoïdes observés au microscope optique
Echelle : 0,01 mm

Photo b : ovules observés au microscope optique
Echelle : 0,05 mm

Retrouvez Éduscol sur

Pistes pédagogiques

Cette activité peut être développée dans le cadre d'un EPI avec la SVT.

L'activité peut être donnée dès la classe de 5e.

Pour aider les élèves, on pourra les conduire à identifier d'abord les données utiles, puis à identifier les échelles utilisées dans les deux documents.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Résoudre des problèmes de proportionnalité

Un exemple de situation avec prise d'initiative
La production pétrolière journalière au Cameroun

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Résoudre des problèmes de proportionnalité :

- étudier des relations entre deux grandeurs mesurables pour identifier si elles sont proportionnelles ou non ;
- faire le lien entre fonction linéaire et proportionnalité.

La situation peut mobiliser aussi les connaissances et compétences suivantes :

- utiliser un logiciel pour produire une fonction.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Modéliser, représenter, communiquer.

Énoncé

Document

Source : Production pétrolière au Cameroun. Pic en 1985.
BP Statistical Review, 2010

Le tableau suivant donne, en fonction de l'année, le nombre de barils de pétrole (exprimés en milliers) produits quotidiennement au Cameroun pour la période 1977-1984.

ANNÉE	1977	1981	1982	1984
Production quotidienne en milliers de barils	1	86	105	146

Questions

1. Entre 1977-1984 la production de pétrole croît de manière régulière. À combien estimez-vous les productions quotidiennes de pétrole du Cameroun pour l'année 1979 ? Et pour l'année 1983 ?
2. La source d'où est extrait ce document indique une production quotidienne de 181 milliers de barils en 1985. Cela est-il conforme au modèle mathématique que vous avez mis en œuvre à la question 1 ?

3. Un économiste affirme : *« Entre 1978 et 1985, la production augmente régulièrement, d'environ 36% par an en moyenne »*. Qu'en pensez-vous ?
4. La production décroît à partir de 1985. Voici les données relevées pour la période 1986-1994. Pouvez-vous proposer un modèle mathématique pour rendre compte de l'évolution de la production camerounaise de pétrole pour cette période ?

ANNÉE	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
Production quotidienne en milliers de barils	174	165	163	160	155	143	134	130	115

Pistes pédagogiques

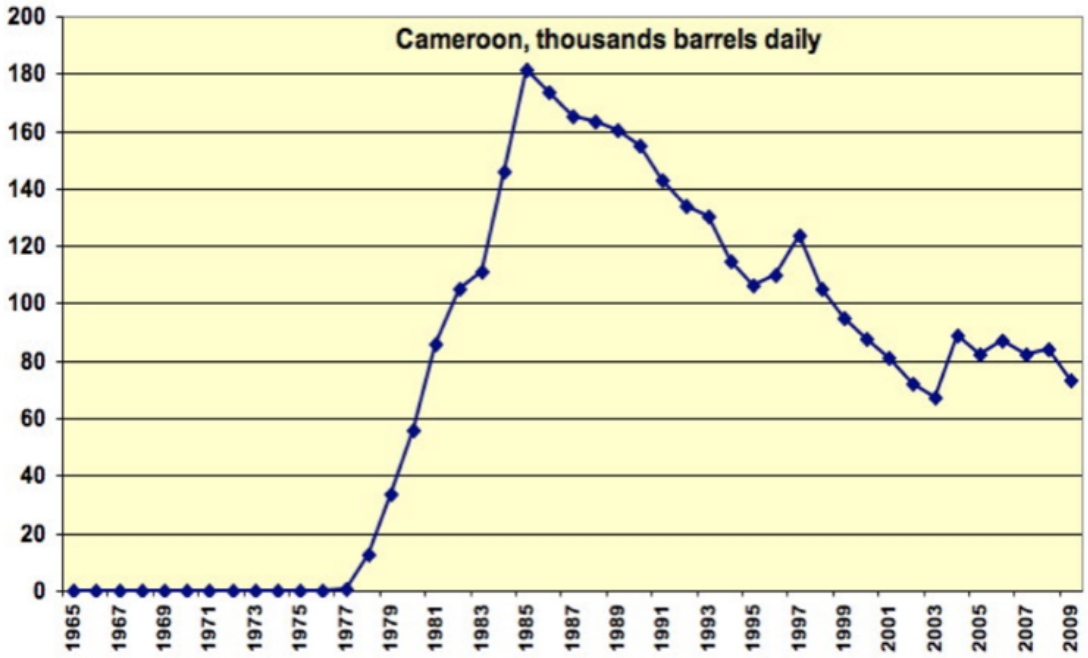
Cette activité peut être développée dans le cadre d'un EPI avec la géographie.

L'activité peut être donnée en classe de 3e. Une adaptation est nécessaire pour la mettre en œuvre dans les classes antérieures.

Cette tâche met en évidence qu'un certain nombre de situations de la vie courante ne relèvent pas dans leur ensemble de la proportionnalité. Elles peuvent se modéliser sur des intervalles choisis par de la proportionnalité.

Pour aider les élèves, on pourra les conduire à identifier et proposer des traductions d'expression comme « croît de manière régulière », « augmente régulièrement » et du vocabulaire spécifique (« barils », « production »).

Pour permettre à tous d'entrer dans la question 3 on pourra proposer la courbe originelle ou le tableau correspondant.



ANNÉE	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Production quotidienne en milliers de barils	1	12	34	56	86	105	111	146	181

La question 4 se traitera avec un outil numérique (geogebra, tableur).

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Résoudre des problèmes de proportionnalité

Un exemple de tâche intermédiaire

Des triangles

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Résoudre des problèmes de proportionnalité :

- reconnaître une situation de proportionnalité ;
- résoudre des problèmes de recherche de quatrième proportionnelle.

La situation peut mobiliser aussi les connaissances et compétences suivantes :

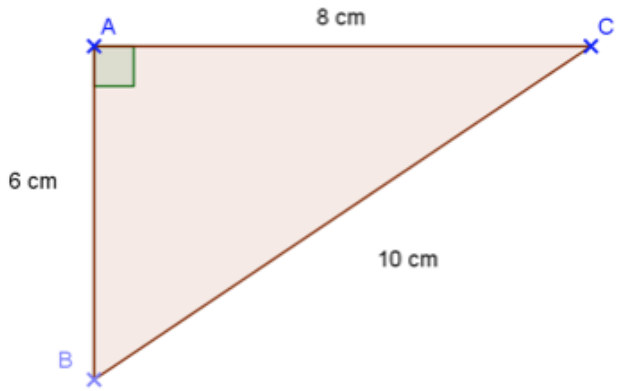
- contrôler la vraisemblance des résultats (notamment grâce à l'autocontrôle que constitue l'invariance de la mesure de l'angle droit, codé ou non) ;
- calculer avec des nombres rationnels.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

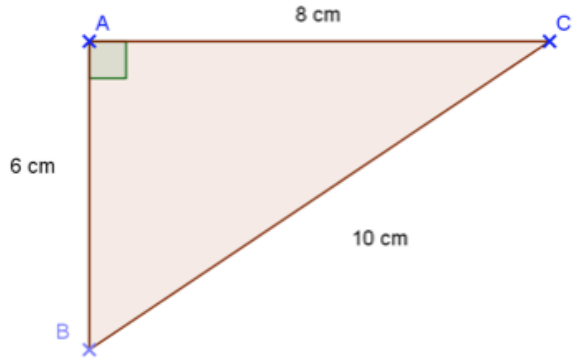
Calculer, modéliser.

Énoncés

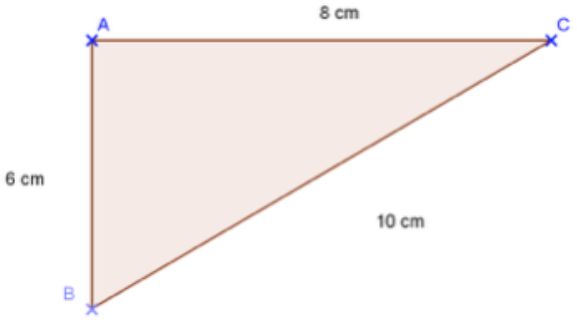
1. Construire un triangle A'B'C', agrandissement du triangle ABC, tel que A'B' = 9 cm.



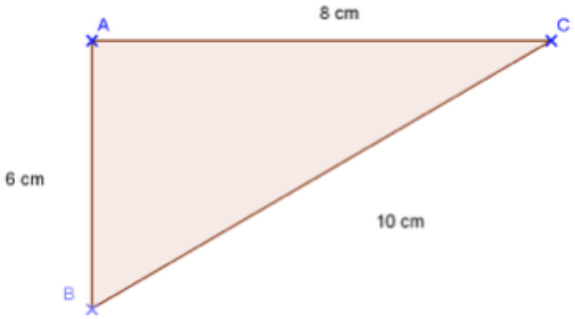
2. Construire un triangle A'B'C', agrandissement du triangle ABC, tel que A'B' = 7,5 cm.



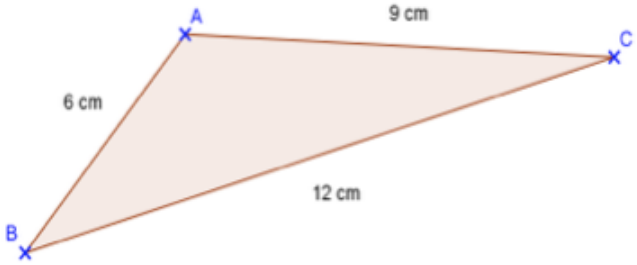
3. Construire un triangle A'B'C', agrandissement du triangle ABC, tel que A'B' = 9 cm.



4. Construire un triangle A'B'C', agrandissement du triangle ABC, tel que A'B' = 8,4 cm.



5. Construire un triangle A'B'C', agrandissement du triangle ABC, tel que A'B' = 8 cm.



Pistes pédagogiques

Les figures possédant un codage marquant l'angle droit pourront être données en 5e et en début de 4e.

Retrouvez Éduscol sur

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Grandeurs et mesures

Grandeurs et mesures

- Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées.
- Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques.

Objectifs

Le thème « grandeurs et mesures » figure au programme de mathématiques dès le cycle 2 et s'enrichit progressivement tout au long de la scolarité obligatoire. Aussi, la maitrise des connaissances et compétences sur ce thème doit s'appuyer sur une fréquentation régulière des notions abordées, ce qu'il est possible de faire en lien avec de nombreuses parties du programme.

Le travail sur les grandeurs et les mesures relève principalement de la résolution de problèmes, dans des situations empruntées à la vie courante ou issues d'autres disciplines ou encore dans d'autres thèmes du programme de mathématiques. Il permet de réinvestir des connaissances acquises en mathématiques mais aussi d'en introduire de nouvelles. Il permet également de mobiliser des valeurs approchées et d'aborder les notions d'ordre de grandeur et de chiffres significatifs, dans des contextes réalistes. De nombreux domaines des mathématiques sont concernés : géométrie, statistiques, proportionnalité, fonctions, calcul numérique et littéral.

Un travail spécifique sur certaines grandeurs, comme les longueurs, les aires ou les volumes, est nécessaire pour mettre en valeur les concepts sous-jacents et donner sens aux formules qui permettent d'en calculer des mesures. Il est important pour le professeur de distinguer les notions de grandeur et de mesure et de faire vivre les deux aspects auprès des élèves sans formalisme excessif.

Le traitement de situations concrètes pourrait faire penser que l'enseignement des grandeurs et des mesures est aisé mais les résultats des évaluations réalisées par la DEPP montrent qu'il en n'est rien. Ces difficultés ne sont en général pas de l'ordre de l'erreur de formule ou d'unité mais bien d'une difficulté de compréhension du concept initial.

Liens avec les domaines du socle

La résolution de problèmes portant sur les notions de grandeurs et mesures est fortement liée au domaine « les langages pour penser et communiquer » (domaine 1) : usage d'un vocabulaire mathématique adapté (périmètre, aire, vitesse, unités…), compréhension des énoncés des problèmes, expression des solutions.

Les notions de grandeurs et mesures sont fréquemment sollicitées dans la résolution de problèmes qui constitue un objectif du domaine « les méthodes et outils pour apprendre » (domaine 2).

Les calculs impliquant des grandeurs mesurables s'insèrent naturellement dans l'étude des systèmes naturels et techniques (domaine 4).

Des repères historiques sur les grandes étapes des découvertes scientifiques permettent également de relier l'étude des grandeurs et mesures au domaine « les représentations du monde et l'activité humaine », par exemple pour le calcul du rayon de la Terre ou la définition du système métrique (domaine 5).

Progressivité des apprentissages

Fin de cycle 2 (CE2)

Au cycle 2 l'élève travaille sur les grandeurs suivantes : taille des collections, longueur, masse, capacité, durée, prix. Il s'agit d'associer différentes grandeurs à un même objet : sa longueur, sa masse, sa capacité… Mesurer, estimer et utiliser les différentes unités permet de faire déjà le lien avec les nombres et les problèmes arithmétiques très simples.

Fin de cycle 3 (6e)

Au cycle 3 s'ajoutent les notions d'aire, de volume et d'angle. L'utilisation des nombres et des opérations arithmétiques permet de résoudre des problèmes impliquant des grandeurs mesurables (géométriques, physiques, économiques).

Fin de cycle 4 (3e)

Au cycle 4 les nouveautés essentielles portent sur les notions de grandeur produit ou quotient et l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires ou les volumes.

Néanmoins, le travail sur les grandeurs vues au cycle 3 doit être poursuivi au travers de la résolution de problèmes en lien avec la plupart des thèmes au programme. C'est cette fréquentation régulière des grandeurs, des mesures, des unités qui assurera que le concept reste vivant et que les techniques élémentaires sont maîtrisées de manière pérenne

Stratégies d'enseignement

Le thème « grandeurs et mesures » n'a pas vocation à être travaillé seul mais au service de la résolution de problèmes. Il permet d'aborder une diversité de situations qui relèvent d'autres parties du programme : calcul numérique, calcul littéral, équations, fonctions, géométrie. L'attendu de fin de cycle « mobiliser la proportionnalité pour résoudre un problème » y est fortement travaillé.

Savoir-faire travaillés

- Manipuler et interpréter des grandeurs.
- Comparer des grandeurs.
- Mesurer.
- Référer à des formules et calculer.
- Référer à des unités et effectuer des changements d'unités.

Utilisation des unités dans les calculs

L'utilisation des unités dans les égalités et les calculs est légitime. Elle permet un contrôle de l'unité finale (évitant par exemple des confusions entre périmètre et aire ou des erreurs de formules dans le

cadre des vitesses) ; elle peut aussi être une aide dans les changements d'unités. Un lien peut aussi être effectué entre les unités et les formules (par exemple entre l'unité km/h et la formule v=d/t) ou entre l'utilisation des unités dans les calculs et le calcul littéral (*cf. infra* pour le calcul d'aire). On privilégiera les écritures du type P = 2 × (3 cm + 5 cm) = 2 × 8 cm = 16 cm pour le calcul de la mesure d'un périmètre et $A = \frac{4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}}{2} = \frac{24 \text{ cm}^2}{2} = 12 \text{ cm}^2$ pour le calcul de la mesure d'une aire.

Conversions

Les conversions d'unités sont une source importante d'erreurs, en particulier lorsque qu'elles s'effectuent avec des tableaux de conversion dont le sens échappe souvent aux élèves. Si les techniques associées semblent maîtrisées dans un premier temps, elles relèvent souvent d'automatismes qui ne s'installent pas durablement et qui ne permettent pas toujours une vérification des résultats.

Il est plus efficace de consolider et de mémoriser les relations importantes entre les unités, qui permettent ensuite d'effectuer les conversions usuelles. Ainsi retenir que 1 m^2 = 100 dm^2, soit à partir d'un dessin donnant du sens, soit à partir de la relation 1 m^2 = 1 m × 1 m = 10 dm × 10 dm = 100 dm^2 permet ensuite d'effectuer des conversions par multiplication ou division par 100.

De la même manière les conversions de km/h en m/s sont facilitées. Ainsi
$132 \text{ km/h} = \frac{132 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{132\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = \frac{1\,320 \text{ m}}{36 \text{ s}} = \frac{110 \text{ m}}{3 \text{ s}} \approx 36{,}67 \text{ m/s}$.

Les conversions de durées doivent faire l'objet d'un traitement spécifique. Ainsi la conversion en mesure décimale de 3 h 50 min peut être traitée de différentes manières :

- en s'appuyant sur les connaissances antérieures sous la forme suivante : 60 min = 1h donc 1 min = $\frac{1}{60}$ h (ou en divisant 1 par 60) donc 50 min = 50 × $\frac{1}{60}$ h = $\frac{50}{60}$ h ≈ 0,8 h (ou en divisant 50 par 60) ce qui permet d'obtenir 3 h 50 min ≈ 3,8 h.
  On utilise ici le coefficient de proportionnalité existant entre les mesures de temps en minute et en heure.
- en partant de la relation fondamentale 60 min = 1h donc 10 min = $\frac{1}{6}$ h donc 50 min = 5 × 10 min = 5 × $\frac{1}{6}$ h = $\frac{5}{6}$ h ≈ 0,8 h. Ce qui permet d'obtenir le même résultat en utilisant cette fois le coefficient de linéarité existant entre 60 min et 10 min.

La conversion de la mesure décimale en mesure sexagésimale peut également se traiter de différentes manières. Par exemple pour 1,7 h :

- en s'appuyant sur les connaissances antérieures sous la forme suivante : 1 h = 60 min donc 1,7 h = 1 h + 0,7 h = 1 h + 0,7 × 1 h = 1 h + 0,7 × 60 min = 1 h + 42 min = 1 h 42 min
  1,7 h = 1 h + 0,7 h puis sachant que 1 h = 60 min donc $\frac{1}{10}$ h = 0,1 h = 6 min donc 0,7 h = 7 × 0,1 h = 7 × 6 min = 42 min on obtient le résultat. Cette méthode a l'avantage d'être très opérationnelle en calcul mental
- Une fois encore on utilise le coefficient de proportionnalité entre minute et heure ou un coefficient de linéarité.

Remarques

- Dans ces calculs certaines étapes sont à faire mentalement.
- On peut aussi varier la présentation et utiliser des équivalences du type : 1 h = 60 min donc 0,1 h = 6 min (on divise par 10) donc 0,7 h = 42 min (on multiplie par 7).
- On rappelle que les calculatrices utilisées au collège permettent d'effectuer ces conversions.
- On veillera à n'effectuer que des conversions « réalistes » avec la situation travaillée.

Grandeurs quotient

Pour la résolution de problèmes utilisant des grandeurs quotients, trois démarches peuvent être utilisées :

- le recours à plusieurs formules à connaître et utiliser en fonction de la grandeur cherchée ;
- le recours à la seule formule de la grandeur quotient que l'on utilise par égalités successives ;
- l'utilisation de la proportionnalité.

Par exemple pour trouver le temps nécessaire pour parcourir 700 m à une vitesse constante de 4,5 km/h, on peut :

- connaître l'égalité $t = \frac{d}{v}$ et l'utiliser en calcul écrit ou à l'aide d'une calculatrice.

  $t = \frac{700\ m}{4,5\ km/h} = \frac{0,7\ km}{4,5\ km/h} = \frac{7}{45}$ h, résultat à convertir en 9 min 20 s ;
- connaître uniquement l'égalité $v = \frac{d}{t}$ et l'utiliser :

  $v = 4,5km/h = \frac{4,5km}{1h} = \frac{4500\ m}{3600s} = \frac{500m}{400s} = \frac{100m}{80s} = \frac{700m}{560s}$. Il reste ensuite à convertir 560 s en 9 min 20 s ;
- utiliser le fait que 4,5km/h revient à parcourir « 4,5 km en 1 h » et utiliser des conversions et la proportionnalité pour se ramener à 700 m.

On peut remarquer que les deux dernières méthodes reviennent strictement au même mais avec une présentation différente. Elles ont l'avantage de préserver le sens.

On encouragera les élèves à se familiariser avec diverses procédures, certaines étant plus ou moins opérantes suivant les situations.

L'utilisation des unités dans les calculs est ici indispensable, faute de quoi, les égalités deviendraient fausses. De plus cela permet aussi d'éviter des erreurs fréquentes du type :
$t = \frac{700}{4,5} \approx 156$ s = 2 min 36 s.

Différenciation

Pour différencier dans la classe il est possible d'agir sur les contenus, les processus, les productions, les structures ou dispositifs de classe.

La différenciation des contenus peut consister à proposer des tâches permettant des résolutions différentes ou plus ou moins expertes, des énoncés plus ou moins mathématisés, des données numériques plus ou moins aisées à manipuler, des utilisations variées de logiciels. Elle ne dispense pas de garder des objectifs communs, fixés par les programmes, mais avec des niveaux de maîtrise différents.

La différenciation des processus repose entre autre sur le fait de permettre différents niveaux de maîtrise et de réalisation pour un même contenu, plusieurs techniques de résolution pour une même tâche. Cette différenciation est en lien direct avec les stratégies d'enseignement dont certaines ont été décrites précédemment, notamment pour les conversions et les calculs utilisant des formules.

Il est important d'aider les élèves à mettre en place des images mentales voire de continuer à les faire manipuler, par exemple en dénombrant le nombre de cm^2 présents dans un dm^2.

Les outils numériques et l'usage de la calculatrice permettent aussi de différencier. Pour la conversion de durées par exemple, la connaissance des fonctions de la calculatrice permet de vérifier et donc de s'auto-corriger mais aussi tout simplement de faire ces conversions.

De même, permettre de faire des figures à la règle et au compas sur papier quadrillé ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique dans le cadre de problèmes visant à trouver une longueur, une aire

ou un angle est aussi un moyen de permettre aux élèves ayant des difficultés avec la trigonométrie ou les formules de proposer une solution.

Il convient cependant d'être attentif à ne pas créer des groupes de niveaux hermétiques. Il est important que les différentes techniques, les différents niveaux de maîtrise soient rencontrés par tous les élèves. Le but étant qu'ils puissent faire un choix, savoir ce qu'ils connaissent des concepts étudiés et ce qu'il leur reste à acquérir. Ce temps n'est pas forcément celui de la synthèse, il peut aussi exister au sein de travaux en groupes hétérogènes.

La différenciation des structures ou dispositifs de classe porte en particulier sur la façon de créer et de faire varier les groupes (travail en autonomie, en binômes, en groupes homogènes ou hétérogènes). L'important étant qu'ils soient favorables aux échanges, à la coopération, à la confrontation d'idées et au travail.

La différenciation des productions permet comme son nom l'indique de différencier les réalisations et les restitutions des tâches effectuées. Les élèves peuvent proposer des exposés écrits ou oraux, des affiches, des vidéos, des documents électroniques... Il pourra par exemple être intéressant de faire réaliser et d'afficher dans la classe des mesures réellement observables (1cm, 1dm, 1m ; 1cm², 1dm², 1m² ; 1cm^3 1dm^3, 1L, 1m^3 ; périmètre, aire, volume), ou des agrandissements d'une figure de base...

Un des intérêts de cette différenciation porte sur la communication de ces productions aux autres élèves de la classe ou du collège.

Exemples de situations d'apprentissage

Exemples de questions flash :

- Grandeurs et calculs
- Agrandissement et réduction de volume
- Expression d'une grandeur en fonction d'une autre
- Comparaison de périmètres et d'aires

Exemples de taches intermédiaires :

- Épicentre d'un séisme
- Aire, prix et pourcentage : isolation d'une maison
- Calcul de volumes et utilisation d'un débit : lampes à huile
- Calcul d'une vitesse et conversion dans un contexte historique - James Cleveland Owens dit Jesse Owens
- Paris – Marseille
- Calcul d'un temps dans un contexte réel - Record de vitesse terrestre
- Calcul d'une vitesse en nœuds marins - Régate de voile
- Calcul d'une durée - Gousses de vanille

Tâches avec prise d'initiative :

- Un char pour défiler
- Le saut à ski
- The largest cup of coffee in the world (en interdisciplinarité avec l'anglais)
- Un train à prendre
- La water-ball

Interdisciplinarité

Le thème « grandeurs et mesures » se prête particulièrement bien aux activités interdisciplinaires, lesquelles permettent de mettre en œuvre les connaissances et savoir-faire du programme. Cela peut concerner aussi bien des tâches intermédiaires (Introduction de la notion de vitesse moyenne), des tâches avec prise d'initiative (comme la ressource d'accompagnement de l'ancien socle Le piton de la fournaise) et aussi s'ouvrir à la pratique d'une langue étrangère comme l'illustre l'activité sur la plus grande tasse de café.

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder le thème grandeurs et mesures avec les élèves. Certains de ces documents ont été produits dans le cadre de l'accompagnement de programmes de mathématiques antérieurs. À ce titre, ces ressources s'inscrivent dans un contexte pédagogique désormais ancien. Néanmoins, elles proposent des éléments toujours pertinents.

- Grandeurs et mesures au collège
- Ressources d'accompagnement des anciens programmes et de l'ancien socle
- L' Edubase mathématique propose de nombreux scenarios pédagogiques qui s'appuient souvent sur les outils numérique.
- La tâche complexe et Tâches complexes, IREM de Clermont-Ferrand
- Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique - ROUCHE N., 1994, Repères - IREM, n° 15, pp. 25-36.
- Les grandeurs en mathématiques au collège, Partie I : Une Atlantide oubliée - CHEVALLARD Y., BOSCH M., 2000
- Les grandeurs en mathématiques au collège, Partie II : Mathématisations - CHEVALLARD Y., BOSCH M., 2002
- Aire et Périmètre, une ressource publiée en 2011 dans le cadre des dispositifs relais.
- Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs (6 volumes : les angles, les longueurs, les aires, les volumes, les durées, les prix) - IREM de Poitiers, Groupe collège.
- Les volumes au collège - IREM d'Orléans-Tours, groupe collège.
- Activités mentales et Automatismes au collège - IREM de Clermont-Ferrand, 2010, Brochure A.P.M.E.P. n°191.
- Grandeur, mesure, Brochure A.P.M.E.P. n° 46, collection Mots, Tome 6, 1982.
- Le sens de la mesure - ROUCHE N., 1992, Didier Hatier.
- Mathématiques d'école. Nombres, mesures et géométrie - PERRIN D., 2005, Cassini, Paris.

Sur la différenciation

- Document ressource pour l'ancien socle commun dans l'enseignement des mathématiques au collège - Palier 3 (fin de scolarité obligatoire) - Compétence 3 : Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique
- La différenciation pédagogique
- Exemples de dispositifs sur la différenciation pédagogique
- CEDRE 2014 – Mathématiques en fin de collège : une augmentation importante du pourcentage d'élèves de faible niveau – DEPP, Note d'information n°19, mai 2015

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Grandeurs et mesures

Grandeurs et mesures

Exemples de questions flash
Grandeurs et calculs

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées :
- mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités.

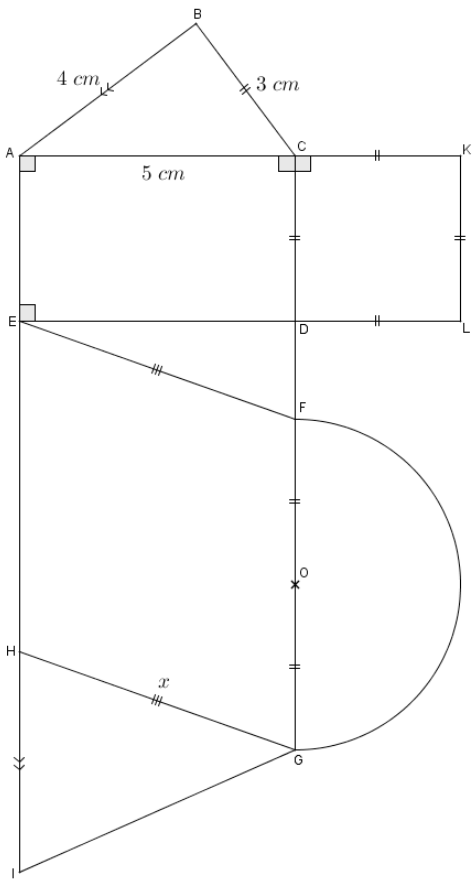
COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, raisonner, calculer.

Longueurs, aires et périmètres

Déterminer :

1. l'aire du triangle ABC ;
2. l'aire du quadrilatère ACDE ;
3. l'aire du quadrilatère CKLD ;
4. l'aire du quadrilatère EFGH ;
5. l'aire du triangle HGI ;
6. l'aire du demi-cercle de diamètre [FG] ;
7. la longueur de l'arc de cercle FG ;
8. le périmètre du polygone ABCDE ;
9. le périmètre du polygone ABCKLE ;
10. le périmètre du quadrilatère EFGH en fonction de x.

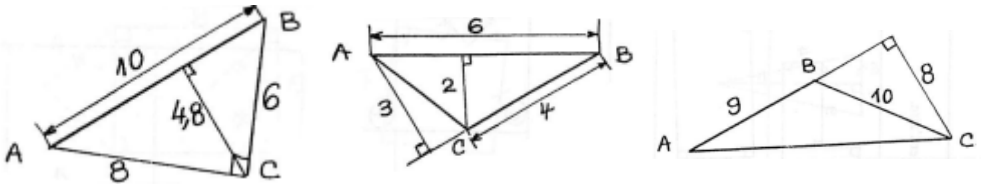
Source : IREM de Clermont, Calcul mental. Automatisme. 1994.



Pistes pédagogiques

Cet exercice est destiné à faire fonctionner les formules d'aires et la formule de la longueur du cercle. Les élèves doivent décoder une figure complexe et utiliser les codages.

Aire du triangle



Dans chacun des cas calculer l'aire du triangle ABC.

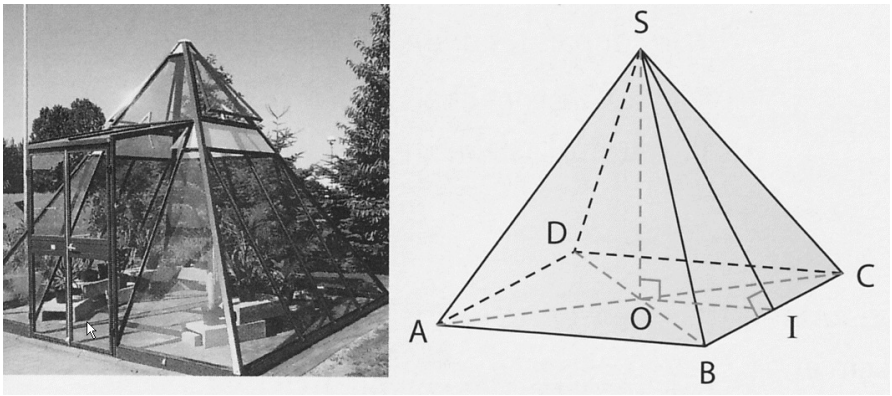
Source : IREM de Clermont, Calcul mental. Automatisme. 1994.

Pistes pédagogiques

Il ne s'agit pas uniquement de réciter la formule de l'aire d'un triangle mais plutôt de l'appliquer en faisant le choix correct des dimensions.

Lors de la correction, il est intéressant de montrer que certaines aires peuvent être calculées de deux façons.

Calcul du volume d'une pyramide dans une situation concrète



Le salon de jardin photographié ci-dessus a la forme d'une pyramide régulière à base carrée de côté 3,30 m. Sa hauteur mesure 2,80 m. On y accède par une entrée à double porte placée sur une de ses faces.

Pierre achète un diffuseur de parfum pour l'installer dans ce salon de jardin. Il lit sur l'emballage « pièce jusqu'à 9 m3 ».Doit-il conserver ce diffuseur ou en changer ? Expliquer.

Pistes pédagogiques

L'intérêt de ce type de question réside essentiellement dans le fait qu'on ne demande pas explicitement le calcul du volume.

Différents calculs dans le cadre des vitesses

1. Que signifie qu'un véhicule roule à une vitesse constante de 100 km/h ?
2. Un véhicule parcourt 258 kilomètres en 4 heures.
   Quelle est sa vitesse moyenne en km/h ?
3. Une personne effectue de la marche rapide à une vitesse moyenne de 8 km/h pendant 2 h 15 min.

Quelle distance a-t-elle parcourue ?

4. Un sprinter court à une vitesse moyenne de 9,6 m/s.
   a. En combien de temps parcourra-t-il 120 m ?
   b. Exprimer sa vitesse en km/h

Pistes pédagogiques

Des exemples de ce type peuvent être créés à volonté.

Le premier a pour simple but de vérifier que les élèves savent écrire une phrase du type « 100 km/h correspond à 100 km en 1 h » ou l'égalité 100 km/h = $\frac{100\text{ km}}{1\text{ h}}$

Les exemples 2 et 3 peuvent être facilement effectués mentalement en utilisant des raisonnements en lien avec la proportionnalité.

Le 4 nécessite quant à lui l'usage d'une calculatrice. La vitesse étant donnée dans les bonnes unités par rapport à la distance parcourue.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Grandeurs et mesures

Grandeurs et mesures

Exemples de questions flash
Agrandissement et réduction de volume

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

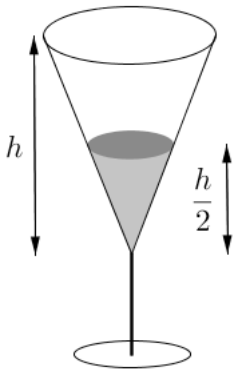
Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques :

- comprendre l'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires, les volumes ou les angles.

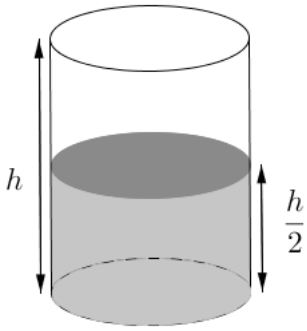
COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, raisonner, calculer.

Énoncé



1. Le liquide remplit exactement ...
   a. ... la moitié du verre ?
   b. ... le quart du verre ?
   c. ... le huitième du verre ?



2. Le liquide remplit exactement...
   a. ... la moitié du verre ?
   b. ... le quart du verre ?
   c. ... le huitième du verre ?

Pistes pédagogiques

La comparaison des deux volumes permet une meilleure compréhension du phénomène.

Ces exemples peuvent être donnés ou non sous forme de QCM.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Grandeurs et mesures

Grandeurs et mesures

Exemples de questions flash
Expression d'une grandeur en fonction d'une autre

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Comprendre et utiliser la notion de fonction :

- dépendance d'une grandeur mesurable en fonction d'une autre ;
- cas particulier d'une fonction linéaire, d'une fonction affine.

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées :

- mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités ;
- formule donnant le volume d'un cylindre.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, raisonner, calculer.

Énoncé

1. Pour trouver l'énergie électrique en watt-heure consommée par une lampe de puissance 100 *watts*, on multiplie cette puissance par la durée t en heure d'utilisation de la lampe. Exprimer cette énergie $E(t)$ en fonction de t.
2. Pour trouver la tension électrique en volt aux bornes d'un appareil de résistance 20 ohms, on multiplie cette résistance par l'intensité en ampère I du courant qui traverse l'appareil. Exprimer en fonction de I cette tension $U(I)$.
3. Le degré Celsius (°C) et le degré Fahrenheit (°F) sont deux unités de température.
   Une température en °F est obtenue en multipliant par 1,8 une température t exprimée en °C puis en ajoutant 32.
   Exprimer en fonction de t la température $f(t)$ en °F.
4. Une éprouvette cylindrique a une base de rayon 3 cm. On y verse de l'eau atteignant une hauteur h cm.
5. Exprimer en fonction de h le volume $V(h)$ en cm^3 de l' eau.

Pistes pédagogiques

Ce travail est à la fois l'occasion de travailler sur le calcul littéral et les fonctions dans le cadre de grandeurs et mesures.

Ces exemples peuvent être donnés ou non sous forme de QCM.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Grandeurs et mesures

Grandeurs et mesures

Exemples de questions flash
Comparaison de périmètres et d'aires

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire, volume, angle :

- comparer des périmètres avec ou sans recours à la mesure ;
- comparer, classer et ranger des surfaces selon leurs aires sans avoir recours à la mesure.

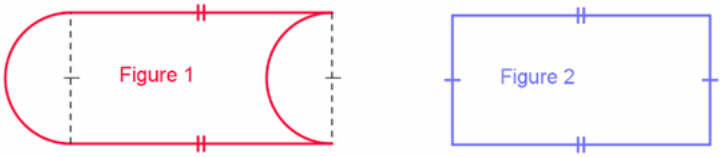
Il s'agit ici d'attendus de fin de cycle 3.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, raisonner.

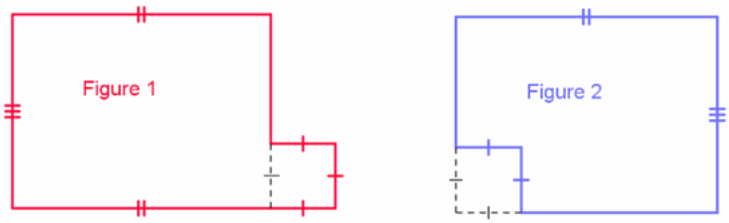
Énoncé

Dans chaque cas comparer le périmètre et l'aire des figures bleue et rouge.

Cas 1



Cas 2



Pistes pédagogiques

Ces comparaisons sont volontairement visuelles. Elle repose uniquement sur le sens du périmètre et de l'aire d'une figure. Elles peuvent être traitées dès la classe de 6e, voire même plus tôt mais reste utiles au cycle 4.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Grandeurs et mesures

Grandeurs et mesures

Un exemple de tâche avec prise d'initiative
Un char pour défiler

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées :

- mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités ;
- notion de grandeur quotient – masse volumique ;
- formule donnant le volume d'une pyramide ;
- commenter des documents authentiques.

Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques :

- comprendre l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs ou les volumes ;
- utiliser un rapport de réduction ou d'agrandissement (architecture, maquette).

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, modéliser, représenter, raisonner, communiquer.

Énoncé

La situation

Pour la fête de son village, Simon décide de construire une réduction de la pyramide de Kheops (située en Égypte) et de défiler avec une remorque sur laquelle elle sera posée (voir document 1).

À l'aide des documents ci-après, répondre à la question suivante.

Question

Pour fabriquer sa réduction de la pyramide de Kheops, Simon souhaite que le côté de la pyramide réduite soit égal à la largeur de la remorque. Il veut que sa pyramide soit pleine, afin de la rendre solide, mais il se demande quels matériaux seraient utilisables pour que la remorque supporte la charge. En particulier s'il peut utiliser le matériau d'origine : c'est-à-dire de la pierre.

Pouvez-vous aider Simon à faire son choix ? Expliquez.

Source : les volumes au collège - groupe collège de l'IREM d'Orléans

Documents

Document 1 : Remorque pour charge

Description :

- Dimensions : 406 cm sur 184 cm
- PTAC 2 700 kg
- Hauteur du plancher : 63 cm
- 2 essieux

(PTAC : Poids Total Autorisé en Charge)

Document 2 : La pyramide de Kheops

La pyramide de Kheops est une pyramide à base carrée construite en pierre.

Hauteur : environ 147 m

Longueur d'un coté à la base : environ 230 m

Surface couverte : environ 5 hectares

Document 3 : Les masses volumiques

Les masses volumiques de différents matériaux sont données en kg/m^3.

Aluminium	2 700
Fer	7 860
Bronze	8 800
Argent	10 500
Cuivre	9 000
Granit	2 700
Hêtre	800
Liège	240
Polypropylène (plastique)	800
Polystyrène	600
Pierre	1 920
Béton léger	1 800
Plomb	11 350
Chêne (cœur de chêne)	1 200

Pistes pédagogiques

Une appropriation individuelle est nécessaire avant de passer à un travail en groupes devant aboutir à une production. La question permet un partage des tâches, mais la confrontation des méthodes de calcul peut aboutir à une méthode générale, pour déterminer quels sont les matériaux utilisables et, en particulier, s'il est possible de fabriquer cette pyramide en pierre.

La représentation (mentale) de la situation est importante pour comprendre le positionnement de la pyramide et l'association de la largeur de la remorque avec le côté de la pyramide réduite.

Les élèves doivent ensuite penser à chercher le coefficient de réduction et à l'appliquer aussi à la hauteur. Ce coefficient est volontairement décimal, que les élèves utilisent une procédure par multiplication ou division des longueurs ou du volume (en fonction du niveau où l'activité est proposée).

Remarque : les dimensions de la pyramide choisie sont celles de sa construction. Actuellement la hauteur n'est plus que de 139 m. De plus, elles ont été arrondies. Ces choix font partie des variables didactiques de l'activité, tout comme le choix de la largeur de la remorque.

Une autre variable est de préciser ou non dans l'énoncé la position de la pyramide. On pourrait par exemple demander de la placer afin que l'aire de base soit maximale, sans pour autant que la pyramide ne dépasse de la remorque. Dans ce cas, l'activité comporte une étape de recherche de cette position. Dans les expérimentations faites, soit les élèves positionnent naturellement la pyramide avec un côté coïncidant avec la largeur de la remorque, sans aucune justification, soit ils bloquent. Dans tous les cas, il n'est pas si évident de justifier la position donnant l'aire maximale. L'usage d'un logiciel de géométrie dynamique est par contre un outil intéressant pour observer l'évolution de l'aire en fonction de la position du côté et pour émettre une conjecture.

Dans l'activité proposée, il est choisi de préciser le positionnement dans l'énoncé et de ne pas parler d'aire maximale.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Grandeurs et mesures

Grandeurs et mesures

Un exemple de tâche intermédiaire en interdisciplinarité avec les sciences de la vie et de la Terre
Épicentre d'un séisme

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées :
- mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités ;
- notion de grandeur quotient – *Vitesse* ;
- *commenter des documents authentiques.*

Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques :
- comprendre l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs - *Utiliser l'échelle d'une carte.*

Interpréter, représenter et traiter des données :
- lire des données sous forme de graphique.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

En mathématiques
Chercher, modéliser, raisonner, communiquer.

En sciences de la vie et de la Terre
Pratiquer des démarches scientifiques :
- interpréter des résultats et en tirer des conclusions.

Pratiquer des langages :
- lire et exploiter des données présentées sous différentes formes : tableaux, graphiques, diagrammes, dessins, conclusions de recherches, cartes heuristiques, etc.

Énoncé

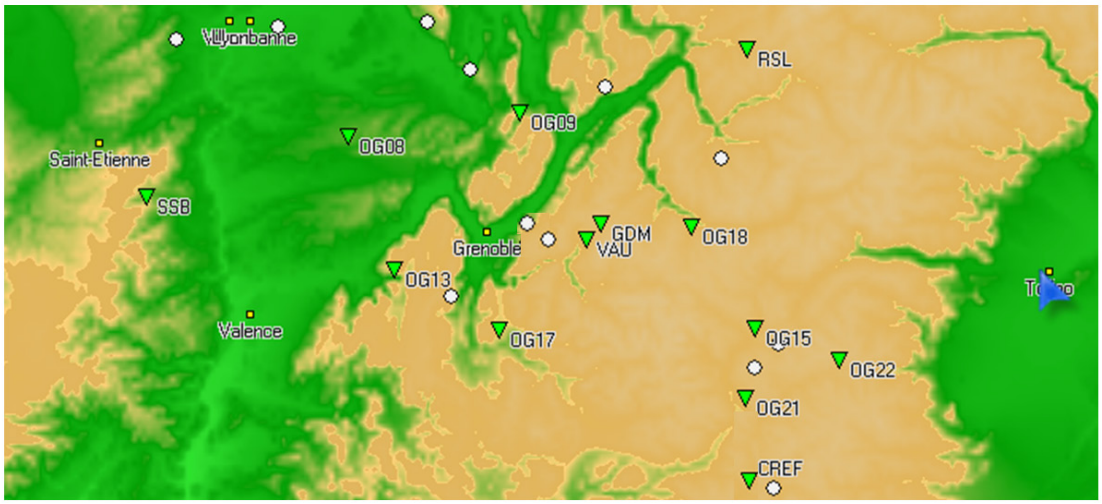
Les ondes dues à une secousse sismique ont été enregistrées dans la région de Grenoble.

Le but de cette activité est de localiser le foyer de cette secousse (l'épicentre) sur la carte (document 1). Trois sismogrammes sont mis à disposition (document 2).

Pour cela répondre aux questions suivantes :

1. Les ondes sismiques P et S ont été enregistrées dans trois stations : RSL ; CREF et SSB. À quelle heure les ondes P ont-elles commencé à être enregistrées dans chacune d'entre elles ?

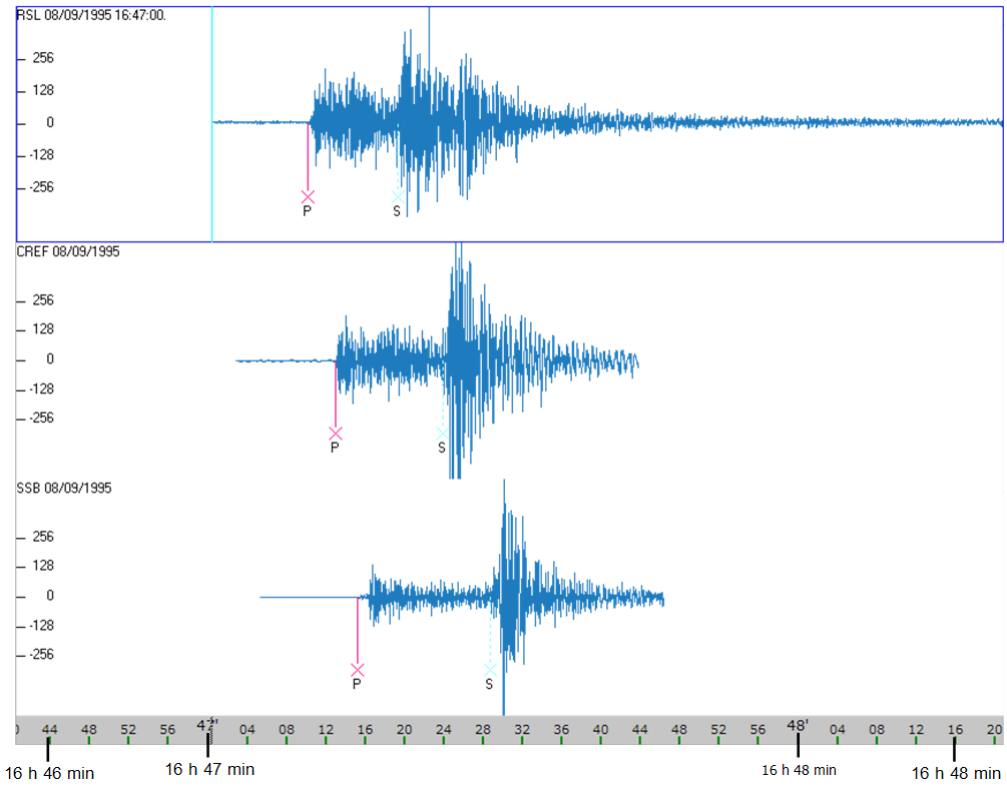
2. Nous savons, grâce à d'autres mesures, que ce séisme est apparu à 16 h 46 min 56 s et que les ondes P parcourent en moyenne 5,8 km par seconde.
   Calculer la distance séparant chacune des trois stations de l'épicentre du séisme.
3. Sur la carte ci-dessous, plusieurs épicentres ont été positionnés.
   Localiser, à l'aide de tracés, celui qui correspond au séisme enregistré.



Échelle : 1cm pour 20 km

Légende de la carte : Ville : Saint-Etienne Station : CREF Épicentre :

Document 2 : sismogrammes enregistrés dans les trois stations RSL, CREF et SSB



Retrouvez Éduscol sur

Pistes pédagogiques

Le but de cette activité est l'introduction de la notion de vitesse moyenne en classe de quatrième.

La lecture d'un sismogramme doit avoir été effectuée au préalable en cours de SVT.

Ainsi posée, cette activité n'est pas vraiment à prise d'initiative car la démarche est guidée. Néanmoins les étapes nécessitent d'utiliser le bon document et de trouver les bonnes démarches de calculs ou de tracés.

Le bilan de cette activité permet d'introduire la notion de vitesse moyenne en mathématiques et d'évaluer la compréhension du cours sur les séismes avec en particulier la lecture d'un sismogramme en SVT.

Il est à noter que la méthode classique de détermination de la position de l'épicentre d'un séisme, qui utilise la différence de temps de parcours des ondes S et P, n'est pas développée dans ce travail.

Pour les plus rapides, on peut ensuite demander « à partir de quelle heure les ondes P auraient-elles pu être enregistrées à Saint-Etienne ? » par exemple.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Grandeurs et mesures

Grandeurs et mesures

Exemple de tâche intermédiaire
Aire, prix et pourcentage : isolation d'une maison

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées :
- mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités ;
- notion de grandeur produit – Aire.

Résoudre des problèmes de proportionnalité :
- reconnaître une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité ;
- résoudre des problèmes de pourcentage – Appliquer des pourcentages.

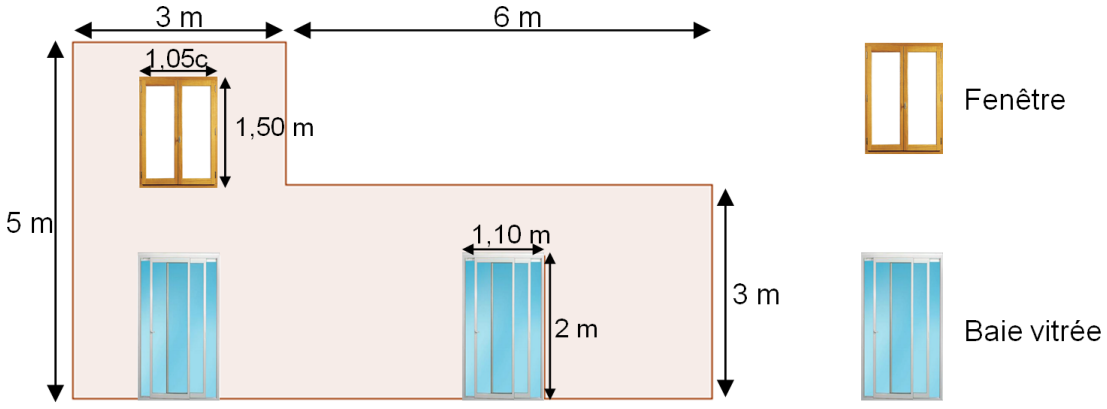
COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, calculer.

Énoncé

Pour améliorer l'isolation de sa maison, Stéphane décide de couvrir de lames isolantes l'extérieur du mur situé au nord.

Document 1 : Caractéristiques du mur situé au nord de la maison



Sur ce mur il y a 2 baies vitrées de 1,10 m de large sur 2 m de haut et une fenêtre de 1,05 m de large sur 1,50 m de haut.

Document 2 : Dimensions des lames isolantes choisies

Longueur = 360 cm
Largeur = 19 cm
Épaisseur = 12 mm

Document 3 : Information importante

Prévoir une marge de 5 % de la surface couverte pour les chutes.

Question

Stéphane repère une promotion proposant les lames à 24,86 € l'unité (le prix d'une lame est de 24,86 €). Quel sera le coût total des lames isolantes nécessaires pour couvrir le mur s'il profite de la promotion ?

Pistes pédagogiques

Ce type de problèmes, assez classique, reste néanmoins à travailler avec les élèves.
La difficulté principale réside dans la lecture et l'organisation des informations de l'énoncé.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Grandeurs et mesures

Grandeurs et mesures

Exemple de tâche intermédiaire
Calcul de volumes et utilisation d'un débit : lampes à huile

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées :
- mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités ;
- notion de grandeur produit et de grandeur quotient – Volume, Débit ;
- formule donnant le volume d'une pyramide.

Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques :
- comprendre l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs ou les volumes ;
- *utiliser un rapport de réduction ou d'agrandissement.*

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer :
- résoudre un problème de géométrie plane ;
- théorème de Pythagore ;
- théorème de Thalès.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, calculer.

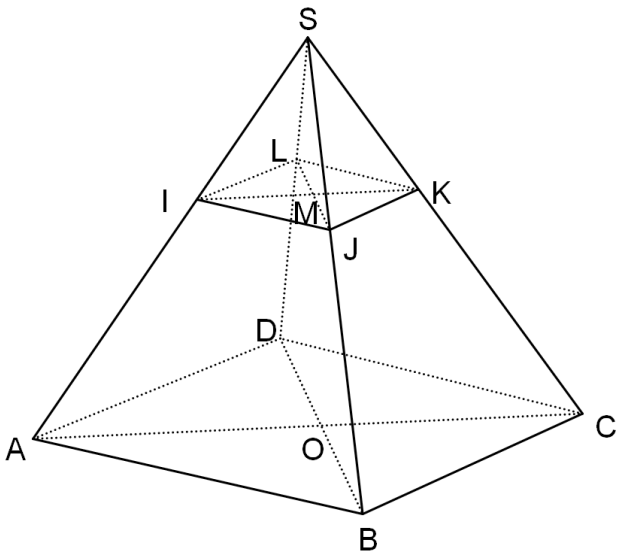
Énoncé

Un artisan fabrique des lampes à huile en forme de pyramide. Pour cela il considère une pyramide régulière SABCD à base carrée où O est le centre du carré ABCD. (SO) est donc la hauteur de cette pyramide et est donc perpendiculaire à la base ABCD.

On a : OA = 12 cm ; SA = 20 cm et Aire ABCD = 288 cm^2

La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur et les proportions ne sont pas respectées.

Rappel : Volume pyramide = $\frac{\text{Aire de la Base} \times \text{hauteur}}{3}$



1. Montrer que le volume de la pyramide SABCD est égal à 1536 cm^3.
2. L'artisan coupe cette pyramide SABCD par un plan parallèle à la base tel que SM = 4 cm où M est le centre de la section IJKL ainsi obtenue. Dans la pyramide SIJKL se trouve le mécanisme de la lampe et la partie en dessous constitue le réservoir d'huile.
   a. Quelle est la contenance du réservoir ?
   b. Le mode d'emploi de la lampe précise que, une fois allumée, la consommation est de 125 cm^3 d'huile par heure.
   Si la lampe est allumée avec le réservoir plein, au bout de combien de temps s'éteindra-t-elle ?

Pistes pédagogiques

Suivant le nombre de questions, cet exercice peut-être ou non « à prise d'initiative ». On peut ou non parler explicitement de débit.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Grandeurs et mesures

Grandeurs et mesures

Exemple de tâche intermédiaire
Calcul d'une vitesse et conversion dans un contexte historique - James Cleveland Owens dit Jesse Owens

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées :
- mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités ;
- notion de grandeur quotient – vitesse ;
- commenter des documents authentiques.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, calculer.

Énoncé

James Cleveland Owens, appelé plus communément Jesse Owens (né le 12 septembre 1913 à Oakville – USA - et mort le 31 mars 1980 à Tucson - USA) est un athlète américain considéré comme le premier sportif noir de renommée internationale.

Le 20 juin 1936, il bat le record du monde du 100 m en 10,2 s et un mois et demi plus tard, aux Jeux olympiques d'été de 1936, qui se déroulent au stade olympique de Berlin, il remporte quatre médailles d'or, sous les yeux d'Adolf Hitler. Ce dernier refusera de les lui remettre et quittera le stade.

1. Calculer la vitesse à laquelle Jesse Owens a couru son 100 m ?
2. Exprimer cette vitesse en m/s puis en km/h.

Pistes pédagogiques

Comme dans tous les exercices sur les grandeurs produits ou quotients, on mettra en avant le fait que ces situations peuvent être résolues en utilisant la proportionnalité et les changements d'unités.

Lors de l'utilisation des formules il est important de mettre les unités dans les égalités portant sur des grandeurs, surtout lorsqu'un changement d'unité s'opère.

Au-delà des mathématiques le contexte historique est intéressant.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Grandeurs et mesures

Grandeurs et mesures

Un exemple de tâche intermédiaire
Paris - Marseille

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées :
- mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités ;
- commenter des documents authentiques.

Interpréter, représenter et traiter des données :
- lire des données sous forme de tableau.

Attendus de fin de cycle 3 et donc aussi de cycle 4 :
Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs :
- identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs – Comparer quantité d'essence consommée et distance parcourue.

Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul :
- proportionnalité : reconnaître et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, modéliser, calculer, raisonner, communiquer.

Énoncé

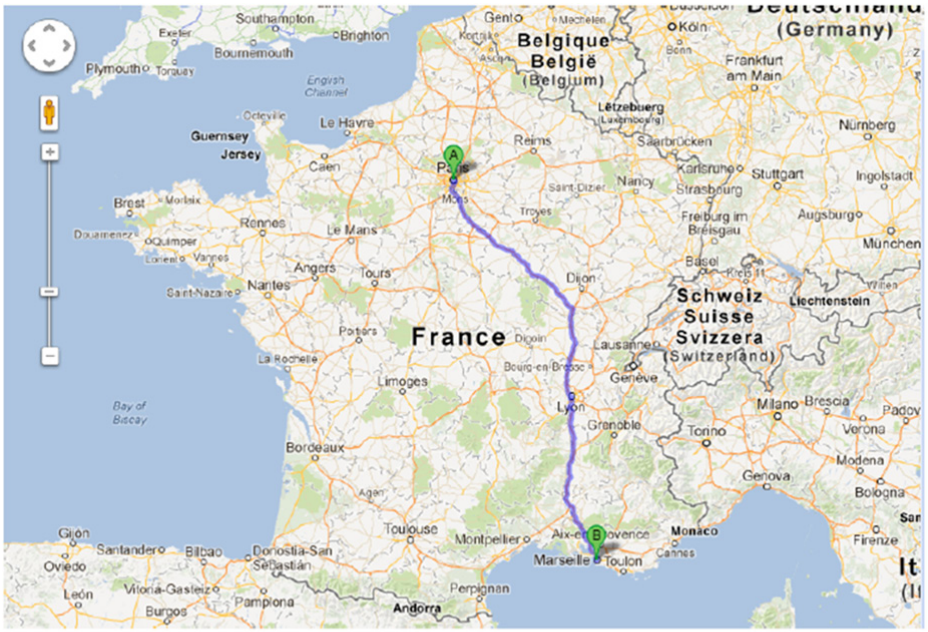
Joffrey doit effectuer un trajet Paris (75000) – Marseille (13000), il hésite entre deux options : par autoroute et hors autoroute. Le prix d'un litre de carburant est de 1,33 euro.

La consommation de son véhicule pour 100 km est de

- 5,2 L sur autoroute ;
- 6,1 L hors autoroute.

Joffrey dispose de 120 euros pour ses frais de transports. Quel trajet lui conseilleriez-vous de choisir ? Justifiez la réponse à l'aide des documents ci-après .

Source : Paris-Marseille IREM de Clermont Ferrand – Rectorat de Clermont Ferrand, d'après le site de la finance pour tous.



	Trajet en évitant les autoroutes	Trajet en favorisant les autoroutes
Temps	13 h 50	7 h 37
Distance	791 km	777 km
Coût péage	0,00 €	55,80 €

Source : http://www.viamichelin.fr/web/Itineraires

Pistes pédagogiques

Cette activité peut être proposée dès la classe de 5e. On veillera à actualiser le prix du carburant, voire, si on le souhaite, à laisser les élèves le chercher. Il en va de même pour la consommation du véhicule.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Grandeurs et mesures

Grandeurs et mesures

Exemple de tâche intermédiaire
Calcul d'un temps dans un contexte réel - Record de vitesse terrestre

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées :
- mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités ;
- notion de grandeur quotient – vitesse ;
- commenter des documents authentiques.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, calculer.

Énoncé

Le 15 octobre 1997, le Britannique Andy Green a établi le record de vitesse terrestre en parcourant 1 km à une vitesse moyenne de 1223,65 km/h. Ce record a été établi dans le désert du Nevada (USA), à bord d'un engin surnommé Thrust SSC.

À cette vitesse, combien de temps lui a-t-il fallu pour parcourir 1 km ?

Pistes pédagogiques

Comme dans tous les exercices sur les grandeurs produits ou quotients, on mettra en avant le fait que ces situations peuvent être résolues en utilisant la proportionnalité et les changements d'unités.

Lors de l'utilisation des formules il est important de mettre les unités dans les égalités portant sur des grandeurs, surtout lorsqu'un changement d'unité s'opère.

On pourra ici faire un prolongement afin de voir si ce véhicule dépasse ou non le mur du son.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

Grandeurs et mesures

Exemple de tâche intermédiaire
Calcul d'une vitesse en nœuds marins - Régate de voile

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées :
- mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités ;
- notion de grandeur quotient – vitesse ;
- commenter des documents authentiques.

Résoudre des problèmes de proportionnalité :
- reconnaître une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, calculer.

Énoncé

Lors d'une course à la voile, le vainqueur a parcouru les 3704 mètres de la régate en 8 minutes.

On sait que 1 mille marin vaut 1,852 km et que 1 nœud marin vaut 1 mille/h. Quelle est la vitesse moyenne de ce bateau en nœud marin ?

Pistes pédagogiques

Comme dans tous les exercices sur les grandeurs produits ou quotients, on mettra en avant le fait que ces situations peuvent être résolues en utilisant la proportionnalité et les changements d'unités.

Lors de l'utilisation des formules il est important de mettre les unités dans les égalités portant sur des grandeurs, surtout lorsqu'un changement d'unité s'opère.

Le fait de travailler en nœud marin est une occasion de calculer des vitesses dans un autre cadre, avec d'autres unités.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Grandeurs et mesures

Grandeurs et mesures

Un exemple de tâche avec prise d'initiative
Le saut à ski

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

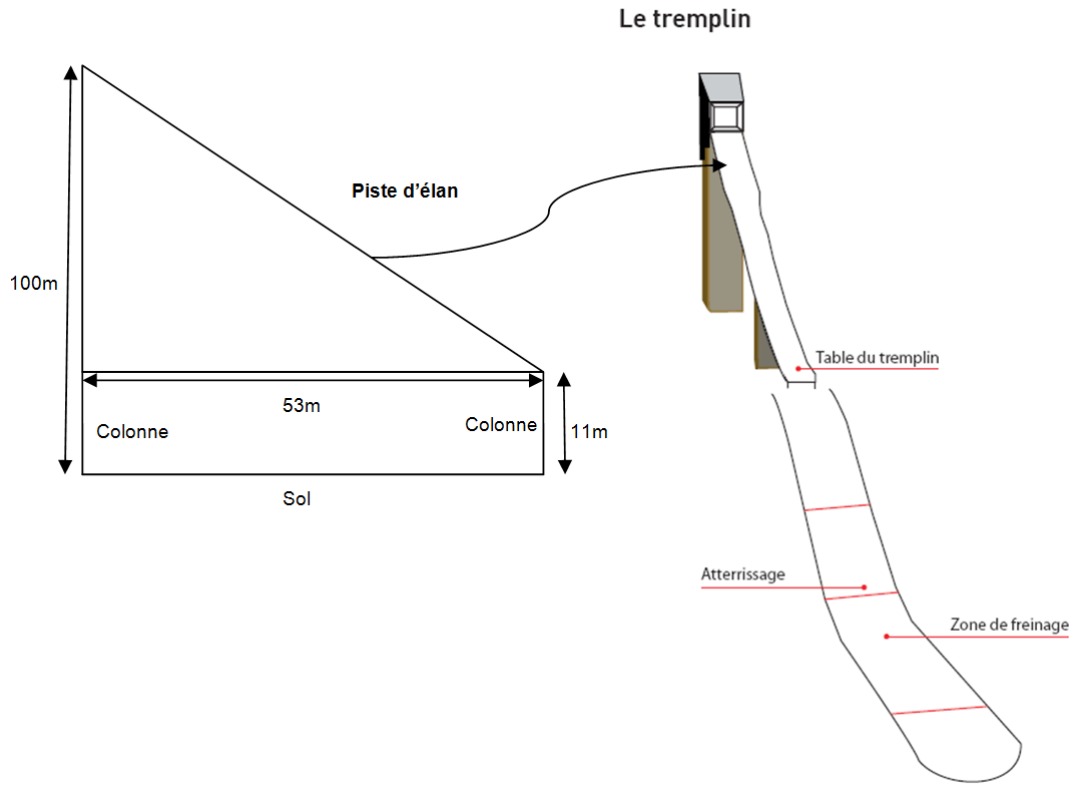
Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées :

- mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités ;
- notion de grandeur quotient – vitesse ;
- résoudre un problème de géométrie plane ;
- théorème de Pythagore.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

Énoncé



Le saut à ski comprend trois étapes distinctes :

- l'athlète descend la piste d'élan avant de s'élancer dans les airs ;
- il saute et atterrit sur la piste de dégagement ;
- il ralentit et s'arrête sur la partie plane de la piste.

Le schéma ci-dessus représente la piste d'élan.

Lors d'une compétition de ski, un présentateur annonce au micro :

> « Le skieur a dévalé la piste d'élan en 5 secondes. Sa vitesse moyenne sur cette longueur doit être au moins de 70 km/h ! ».

L'affirmation du présentateur est-elle vraie ?

Source

Banque de situations d'apprentissage et d'évaluation pour la compétence 3 - Saut à ski (d1, 4e-3e)

Pistes pédagogiques

L'intérêt de cette activité repose sur le fait qu'elle permet plusieurs mises en œuvre : calcul de la vitesse moyenne du skieur, calcul de la distance parcourue en 5 secondes à une vitesse de 70 km/h, calcul du temps nécessaire pour parcourir la piste d'élan à une vitesse de 70 km/h.

Elle permet en outre une évaluation de la maîtrise du théorème de Pythagore et des conversions d'unités de vitesse, de longueur et de temps.

Elle peut être proposée comme introduction aux conversions d'unités de vitesse et aux calculs de vitesses moyennes. Il est cependant préférable d'avoir déjà introduit la notion de vitesse moyenne.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Grandeurs et mesures

Grandeurs et mesures

Un exemple de tâche avec prise d'initiative en interdisciplinarité avec l'anglais
The largest cup of coffee in the world

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées :
- mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités ;
- formule donnant le volume d'un cylindre ;
- commenter des documents authentiques.

Comprendre et utiliser la notion de fonction :
- résoudre des problèmes modélisés par des fonctions ;
- cas particulier d'une fonction linéaire – lien entre unités anglo-saxonnes et françaises.

Utiliser les unités – *Attendu de fin de cycle 3 et donc aussi de cycle 4*
- relier les unités de volume et de contenance.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, modéliser, raisonner, calculer, communiquer.

CAPACITES MOBILISÉES EN ANGLAIS

Écouter et comprendre :
- repérer des indices pertinents, extralinguistiques ou linguistiques, pour identifier la situation d'énonciation et déduire le sens d'un message ;
- savoir lire des documents vidéo et savoir mettre en relation images et documents sonores.

Lire et comprendre :
- s'approprier le document en utilisant des repérages de nature différente : indices extralinguistiques, linguistiques, reconstitution du sens, mise en relation d'éléments significatifs.

Découvrir les aspects culturels d'une langue vivante étrangère et régionale :
- mobiliser des références culturelles pour interpréter les éléments d'un message, d'un texte, d'un document sonore.

Énoncé

L'énoncé est la vidéo. Au début le titre de celle-ci est volontairement écrit en anglais et la question finale prononcée. À la fin, la question est dite puis écrite : « *How many liters can this cup contain ?* »

La seconde vidéo peut servir de correction ou d'aide. En effet à la fin de celle-ci se trouve un panneau sur lequel on peut lire : « *New world record cup of coffee ! 2010 gallons !* »

Consulter les vidéos largest_cup_coffee_eleve.mp4 *et* largest_cup_coffee_aide.mp4

Retrouvez Éduscol sur

Sources

Groupe de recherche « mathématiques et numérique » de l'académie de Nantes menant des expérimentations autour de l'utilisation des outils numériques et en particulier des vidéos pour animer et faire vivre des problèmes ouverts en cours de mathématiques.

Les vidéos originales proviennent du site Gourmet Gift Baskets.

Pistes pédagogiques

Cette activité permet l'entretien et consolidation des notions suivantes : proportionnalité, calcul et conversion de volumes, maîtrise de la langue anglaise.

Elle repose sur l'idée d'un groupe d'employés d'un café américain souhaitant battre le record du monde de la plus grande tasse à café. L'extrait vidéo et les données fournies permettent d'estimer puis de calculer plus ou moins précisément la capacité de cette tasse géante.

Deux stratégies sont possibles :

- en utilisant le début de la vidéo, il est possible d'estimer la hauteur et le rayon de la tasse et de calculer son volume en l'assimilant à un cylindre. Une capture d'image et l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique peuvent permettre une plus grande précision. Les longueurs estimées sont cependant incertaines car elles reposent sur une comparaison avec la taille de l'ouvrier qui n'est pas connue ;
- une autre stratégie est de bien écouter la bande audio à la fin de la vidéo. Le volume y est donné en US gallons. Le travail consiste alors à réussir à convertir des US gallons en litres pour les mathématiques et à comprendre un message oral en l'anglais.

Une première vision collective de la vidéo peut être effectuée mais il est indispensable que les groupes puissent la revoir plusieurs fois et la réécouter dans un environnement le plus calme possible.

La question a été volontairement énoncée puis écrite en anglais dans la vidéo afin d'inciter les élèves à s'intéresser à la bande audio.

Il sera intéressant de comparer les résultats obtenus avec la vraie capacité de la tasse et d'essayer de voir s'ils sont « normaux » ou non (travail sur l'erreur).

La situation peut déstabiliser car ni les données ni le travail à réaliser ne sont explicitement indiqués.

Le professeur pourra encourager les élèves à prendre des initiatives et à prélever dans la vidéo toute information utile. Il pourra signaler que si on dispose de la mesure d'une des grandeurs, toutes les autres deviennent accessibles (hauteur et diamètre de la tasse). Il pourra proposer de se référer à la taille d'un des personnages. Il pourra aussi indiquer que l'écoute est très importante mais que l'unité utilisée n'est pas le litre.

Remarque : il ne semble pas opportun de préciser que ce record date de 2010 et qu'il a été depuis battu. En effet la contenance étant 2010 US gallons, un risque de confusion est possible.

En prolongement, on pourra demander : « Combien de petites tasses peut-on remplir avec le contenu de la tasse géante ? »

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

Grandeurs et mesures

Un exemple de tâche avec prise d'initiative
Un train à prendre

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées :
- mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités ;
- notion de grandeur quotient – *Vitesse* ;
- commenter des documents authentiques.

Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques :
- comprendre l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs - *Utiliser l'échelle d'une carte.*

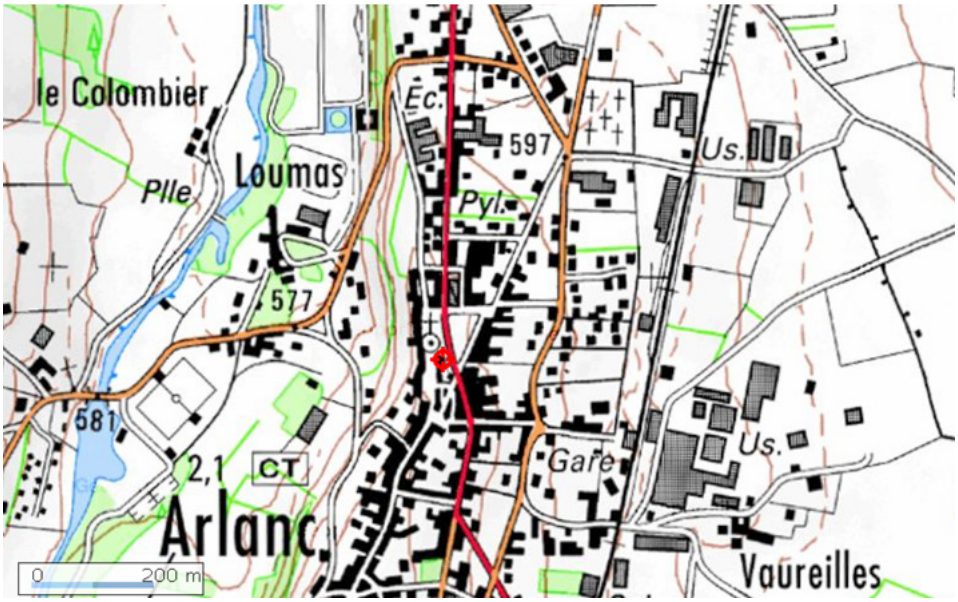
Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs - Attendu de fin de cycle 3 et donc aussi de cycle 4 :
- calculer la durée écoulée entre deux instants donnés.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

Énoncé

Tom prépare la rentrée. Il sait que la sonnerie du collège (Ec. sur la carte) retentit à 16 h 45 pour la fin des cours. Peut-il prévoir de prendre le train de 17 h 01 ? Répondre par un texte présentant la démarche, les calculs et les arguments.



Source

Groupe IREM de Clermont-Ferrand – rectorat de Clermont-Ferrand : un train à prendre.

Pistes pédagogiques

Cette activité permet l'entretien et consolidation des notions suivantes : proportionnalité, calcul avec des durées, utilisation de l'échelle d'une carte.

Après une appropriation individuelle, les élèves peuvent résoudre le problème en travaillant en groupes.

La donnée manquante de la vitesse du piéton pose problème si les élèves ne sont pas habitués à résoudre des tâches dans lesquelles il manque des données. Leur première réaction est de dire que le problème est impossible. C'est en ce sens que cette tâche est à prise d'initiative. Les élèves auront aussi à se questionner sur le temps estimé pour quitter la salle de classe et arrivée à la sortie du collège et intégrer cette durée dans leur réponse.

Un fois le choix de cette vitesse fait, les démarches sont multiples : calcul de vitesse moyenne, de temps ou de distance.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Grandeurs et mesures

Grandeurs et mesures

Exemple de tâche intermédiaire
Calcul d'une durée - Gousses de vanille

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées :
- mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités ;
- notion de grandeur quotient – vitesse ;
- commenter des documents authentiques.

Résoudre des problèmes de proportionnalité (Attendu de fin de cycle 3 et donc aussi de cycle 4) :
- déterminer un instant à partir de la connaissance d'un instant et d'une durée.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, calculer.

Énoncé

Un producteur cultive des gousses de vanille à Tahaa, île de la Polynésie française située à environ 15 750 km de Paris. Les gousses de ce producteur sont acheminées en France dans un avion, volant en moyenne à 840 km/h (moyenne calculée sans prendre en compte les temps de ravitaillements). Cet avion doit cependant prévoir un ravitaillement tous les 6 500 km dont la durée est de 1 h 30. L'avion part de Tahaa lundi matin à 8 h 00 (heure de Paris).

Quand arrivera-t-il à Paris ?

Pistes pédagogiques

Comme dans tous les exercices sur les grandeurs produits ou quotients, on mettra en avant le fait que ces situations peuvent être résolues en utilisant la proportionnalité et les changements d'unités.

Lors de l'utilisation des formules il est important de mettre les unités dans les égalités portant sur des grandeurs, surtout lorsqu'un changement d'unité s'opère.

La question du nombre de ravitaillements nécessaires ajoute une difficulté pour certains élèves.

Dans le cadre de la différenciation, on peut indiquer l'heure de départ de l'avion en heure locale : l'avion part de Tahaa mercredi matin 8 h 00.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Grandeurs et mesures

Grandeurs et mesures

Un exemple de tâche avec prise d'initiative
La water-ball

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées :
- mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités ;
- notion de grandeur quotient ;
- formule donnant le volume d'une boule ;
- commenter des documents authentiques.

Résoudre des problèmes de proportionnalité :
- reconnaître une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité ;
- résoudre des problèmes de pourcentage – appliquer des pourcentages.

Interpréter, représenter et traiter des données :
- lire des données sous forme de graphique.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, modéliser, raisonner, communiquer.

Énoncé

Un forain vient d'acheter cette Water-Ball mais malheureusement la notice d'utilisation n'était pas fournie avec.

À l'aide des documents répondre aux questions suivantes.

1. Estimer la masse de cette Water-Ball.
2. Combien de temps cette personne peut-elle rester dans la boule sans craindre de problème de respiration ?

Document 1 : photo du produit

Document 2 : Les normes de sécurité

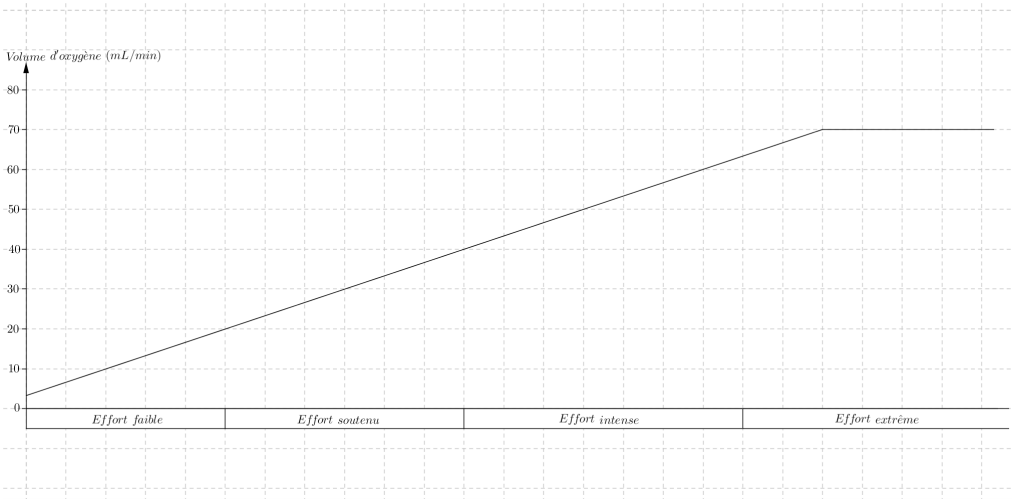
L'air ambiant contient en général 21 % d'oxygène. À plus faible concentration, cela peut avoir des effets néfastes pour l'homme. Pour une concentration :

- inférieure ou égale à 15 %, cela entraîne des céphalées, la sudation et l'hyperventilation ;
- inférieure ou égale à 10 %, cela entraîne une incoordination motrice pouvant aller jusqu'à l'amnésie ;
- inférieure ou égale à 7 %, cela entraîne une perte de connaissance voire un arrêt cardiaque.

Document 3 : Fabrication

La Water-Ball est fabriquée en PVC dont la masse surfacique est de 1,06 kg/m².

Document 4 : Consommation moyenne d'oxygène à l'effort pour un kilogramme[1]



Source

Les volumes au collège - Groupe collège de l'IREM d'Orléans

1. Voir agrandissement à la fin du document.

Pistes pédagogiques

Une appropriation individuelle est nécessaire, avant de passer à un travail en groupes devant aboutir à une production. Les deux questions permettent un partage des tâches et une répartition en fonction du niveau de chacun.

Le but premier est de calculer l'aire et le volume de la water-ball afin d'estimer, respectivement sa masse et la quantité d'oxygène qu'elle renferme et la quantité d'oxygène à partir de laquelle il peut être néfaste d'être encore dedans.

Les formules de l'aire de la sphère et du volume de la boule peuvent être données ou non aux élèves, seules ou dans un formulaire. Dans le cas contraire, la prise d'initiative réside aussi dans la recherche de ces formules ou dans le fait de les demander au professeur.

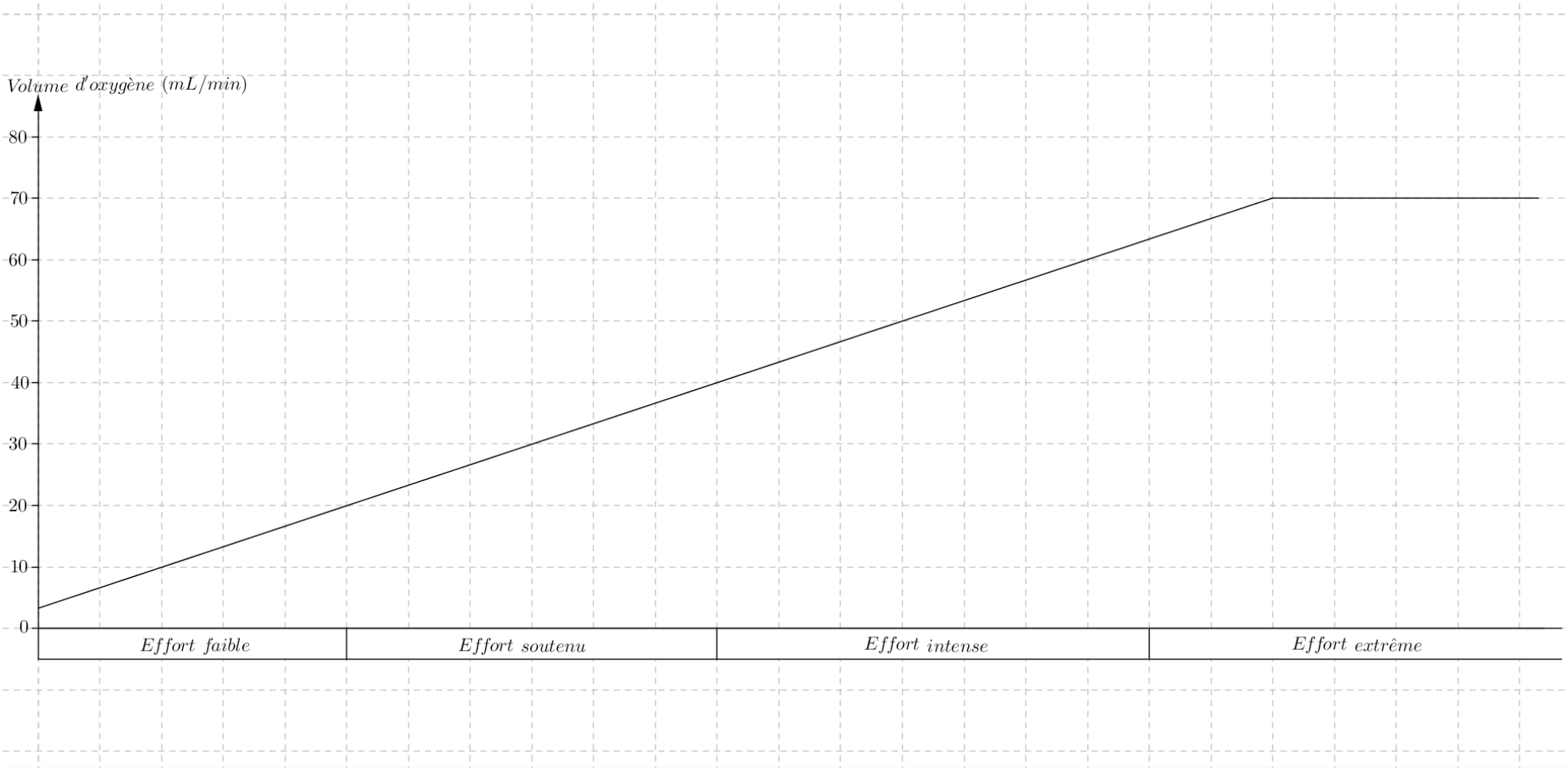
Remarque : contrairement à la formule du volume d'une boule, celle de l'aire d'une sphère n'est pas au programme du cycle 4. Il n'y a donc pas d'exigence particulière à avoir quant à sa mémorisation.

Cette activité nécessite aussi une prise d'initiative quant au choix du rayon de la sphère (en lien avec celui de la hauteur de la personne), de la masse de la personne, du type d'effort fourni par la personne se trouvant dans la boule. Il n'y a donc pas de réponse absolue. Par contre la vraisemblance des choix effectués ainsi que la justesse des raisonnements et des calculs menés sont à regarder en détail. Le travail de rédaction est donc ici important pour les élèves.

Le graphique n'est pas simple à comprendre. Il ne faut pas hésiter à épauler les élèves dans cette tâche, en particulier afin de saisir qu'il représente la quantité d'oxygène consommée pour un kilogramme. À noter que celui proposé ci-dessus est petit du fait du format de ce document. Il est nécessaire que chaque groupe dispose d'un graphique de plus grande taille, sur lequel la lecture est aisée (un agrandissement est proposé page suivante).

En résumé, la situation peut déstabiliser car les données ne sont pas toutes indiquées. Le professeur pourra encourager les élèves à prendre des initiatives et à estimer les informations utiles, à partir de l'image et de leurs connaissances. Il pourra signaler que si on dispose de la mesure d'une des grandeurs, d'autres deviennent accessibles (taille de la personne - diamètre de la boule). Il encouragera la recherche de la formule donnant l'aire de la sphère, ainsi que celle de la boule si elle n'est pas encore connue des élèves. Il pourra proposer de se référer à la taille du personnage et de proposer une masse réaliste pour déterminer la consommation d'oxygène.

Document 4 (agrandissement) : Consommation moyenne d'oxygène à l'effort pour un kilogramme.



Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Objectifs

Au cycle 2, l'élève a travaillé sur une géométrie de la perception, partant de l'espace ambiant pour décrire et reproduire des figures planes usuelles, et contrôler leurs propriétés par les sens.

Au cycle 3, l'élève s'est progressivement orienté vers une géométrie où les propriétés des objets sont contrôlées par le recours à des instruments, puis par l'explicitation de ces propriétés. Il a appris à nommer, comparer, reconnaître, décrire, des figures simples ou d'autres plus complexes, telles que : triangles et triangles particuliers (rectangle, isocèle, équilatéral), quadrilatères et quadrilatères particuliers (carré, rectangle, losange), cercle. Il s'est entraîné à reproduire, représenter, construire des figures simples et des configurations planes plus élaborées, à réaliser ou à rédiger un programme de construction. Il a identifié des relations entre objets géométriques et des propriétés de ces objets en mettant en place un vocabulaire adéquat (polygone, côté, sommet, angle, segment, cercle, rayon, diamètre, milieu, médiatrice, hauteur, etc.). L'élève a appris à effectuer des tracés et des constructions correspondant à certaines relations (perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs ou de mesures d'angles, figures symétriques par rapport à un axe de symétrie, symétriques d'une droite, d'un segment, d'un point, médiatrice d'un segment, agrandissement ou réduction). Pour ces constructions, il a utilisé des instruments usuels de tracé (règle graduée, équerre, compas), des supports variés (papier uni, quadrillé ou pointé, calque, gabarits d'angles, bandes de papier), et s'est initié à l'usage de logiciels (géométrie dynamique, initiation à la programmation, visualisation de cartes, de plans).

Au cycle 4, l'élève s'appuie toujours sur une géométrie perçue par les sens et contrôlée par les instruments, mais s'oriente progressivement vers une géométrie où les propriétés des objets sont validées par le raisonnement. Il poursuit et enrichit sa connaissance des figures et configurations clés (triangles, quadrilatères, cercles), et de leurs propriétés géométriques et métriques. La définition et les propriétés de ces configurations sont explicitées avec un formalisme raisonnable, à partir de situations qui en révèlent la nécessité. Les théorèmes de Thalès (classe de 3e) et de Pythagore (classe de 4e), ainsi que les rapports trigonométriques, sont introduits avec progressivité. L'élève entretient sa pratique des problèmes de construction à l'aide des instruments de tracé, la prolonge avec un usage renforcé des outils numériques (géométrie dynamique, programmation) et de l'algorithmique. Les frises, rosaces et pavages sont un terrain fertile pour utiliser ces outils, en liaison avec les transformations de figures. Le repérage sur la droite est introduit en liaison avec les nombres relatifs. Les tracés à la main levée ont toute leur importance, que ce soit pour chercher des conditions nécessaires dans les

problèmes de construction, ou pour conduire des raisonnements. Le repérage dans le plan à l'aide des coordonnées cartésiennes est relié aux représentations graphiques (organisation de données, proportionnalité, fonctions). Le repérage sur une carte peut donner l'occasion d'utiliser les coordonnées géographiques. Les différentes formes de raisonnement sont travaillées en formation, notamment le raisonnement déductif. Voir à ce sujet la ressource « Raisonner ».

Lien avec les domaines du socle

Le vocabulaire lié aux objets et notions géométriques (médiatrice, hauteur, inégalité triangulaire, triangles égaux et semblables, rapports trigonométriques, théorèmes de Pythagore et de Thalès) relève de l'utilisation d'un langage mathématique adapté. Le codage des figures est lui-même une autre forme de langage mathématique (domaine 1).

L'écriture d'un protocole est une méthode efficace pour comprendre ou réaliser une construction (domaine 2). Un logiciel de géométrie dynamique est un outil pour construire, déformer ou transformer une figure plane (domaine 2). Établir le lien entre le théorème de Thalès, l'homothétie et la proportionnalité, ainsi qu'avec les triangles semblables, lier parallélisme et translation, ou encore cercle et rotation, se rattachent également au domaine des méthodes d'apprentissage.

Le fait de distinguer un résultat de portée générale d'un cas particulier observé sur une figure, de prouver un résultat général par une démonstration, comme celui de valider ou de réfuter une conjecture, relèvent de la formation de la personne et du citoyen (domaine 3).

Les principaux résultats et connaissances mathématiques de géométrie plane (propriétés des configurations, théorèmes de Pythagore et de Thalès, trigonométrie), ainsi que leur utilisation dans la résolution de problèmes, participent de la culture mathématique de base (domaine 4). Il en va de même de la démonstration, dès lors qu'elle est perçue et utilisée comme une démarche mathématique permettant de prouver un énoncé ou un résultat général.

La modélisation en géométrie plane est une façon de représenter le monde (domaine 5). Certains exemples de situations d'étude du programme, comme les frises, pavages, rosaces, ou encore des méthodes historiques ayant permis d'estimer le rayon de la Terre ou la distance Terre-Lune, illustrent les connexions de la géométrie plane avec des activités humaines (domaine 5).

Progressivité des apprentissages

La pratique des figures usuelles et de leurs propriétés, entamée au cycle 3, est poursuivie et enrichie dès la classe de 5e, et tout au long du cycle 4. Le théorème de Pythagore est introduit en 4e, réinvesti tout au long des classes de 4e et de 3e dans des situations variées du plan et de l'espace. Le théorème de Thalès est introduit en 3e. L'étude des configurations « triangles emboîtés » puis « papillon » permet progressivement d'aboutir à la version générale du théorème, en liaison étroite avec la proportionnalité et l'homothétie ainsi qu'avec les agrandissements et les réductions. L'étude des rapports trigonométriques peut être répartie entre les classes de 4e et de 3e.

Stratégies d'enseignement

De la géométrie perçue à la géométrie abstraite

Du cycle 2 au cycle 4, le contrôle des propriétés géométriques passe de la perception au dessin, puis à une géométrie plus abstraite, contrôlée par le raisonnement, qu'il soit formalisé ou non par une démonstration écrite. Lorsque la géométrie modélise une situation concrète, ou dans la géométrie dessinée[1], les instruments (règle, équerre) peuvent servir à valider une propriété (alignement de points, angle droit). Dans ces cas, les grandeurs sont exprimées par des nombres décimaux : la diagonale d'un carré dessiné de côté 10 cm mesure 14,1 cm, et non pas $10\sqrt{2}$ cm ! Lorsque le professeur propose une situation modélisée par la géométrie plane, les propriétés géométriques établies et les calculs de grandeurs réalisés à l'intérieur du modèle doivent donner l'occasion au professeur d'expliciter ses attentes auprès de l'élève. Ce dernier doit savoir si l'on attend de lui des propriétés et calculs nécessairement exacts et théoriques dans le modèle mathématique, ou des réponses « convenables » dans le monde physique. D'autre part, il est souhaitable que ces attentes soient cohérentes avec la situation initiale : pour le calcul de la diagonale d'un champ rectangulaire, il est déraisonnable – et même inadapté – d'attendre une réponse qui ne s'exprime pas par un nombre décimal. Dans chaque activité, le professeur doit préciser le contrat, notamment s'il attend une propriété théorique ou une valeur exacte.

Pour passer de la géométrie perçue à la géométrie abstraite, le changement de paradigme doit être motivé par des activités qui en montrent la nécessité. Par exemple, le recours à une propriété caractéristique peut être motivé par une figure codée, un programme de construction téléphoné, le jeu du portrait, … ; l'emploi d'une argumentation raisonnée peut l'être en réponse à une question du type « *le triangle est-il à peu près rectangle, ou exactement ?* », par un raisonnement à partir d'une figure à main levée ; etc. Il est plus difficile de motiver un travail avec des valeurs exactes non décimales (rationnels, racines carrées), en dehors de la problématique historique des constructions à la règle et au compas. Sur ce point, il est intéressant de différencier les exigences entre élèves, en prenant en compte ceux qui maîtrisent mal les nombres non décimaux.

Configurations usuelles

• La **médiatrice** d'un segment a été abordée au cycle 3, en liaison avec la symétrie axiale. Il convient au cycle 4 d'en formaliser la définition, ainsi que la propriété d'équidistance et sa réciproque. Cette dernière est utilisée pour une construction de la médiatrice à l'aide du compas.
• Les **hauteurs** d'un triangle, déjà introduites au cycle 3, sont réinvesties en liaison avec le calcul d'aire. D'autres **droites remarquables** du triangle peuvent être envisagées en situation, mais leur connaissance et leurs propriétés ne sont pas un attendu de fin de cycle. La **concourance des médiatrices** peut faire l'objet d'une activité de démonstration intéressante.
• Pour les configurations usuelles (**triangles et quadrilatères particuliers, cercles**), la définition et les propriétés usuelles déjà envisagées au cycle 3, font l'objet d'une formalisation précise au cycle 4 (propriétés métriques, parallélisme ou orthogonalité, éléments de symétrie). Il n'est cependant pas souhaitable de mener une étude exhaustive de ces propriétés. Le **parallélogramme**, déjà introduit au cycle 3, est revisité en classe de 5e, en dégageant ses propriétés en liaison avec la symétrie centrale. Les propriétés caractéristiques des quadrilatères particuliers peuvent être admises et utilisées dans certaines démonstrations, mais ne sont pas un attendu de fin de cycle.

1. Voir La géométrie dessinée et la géométrie abstraite - Jean-Philippe Rouquès et Catherine Houdement – Mars 2016

• Les **cas d'égalité des triangles** sont admis dès la 5e, essentiellement pour justifier qu'un triangle peut être construit connaissant certains de ses éléments métriques. Leur emploi dans certaines démonstrations doit demeurer très modeste. **Les triangles semblables** fournissent un vocabulaire commode dans les différents énoncés du théorème de Thalès.
• Sur les angles, les notions du cycle 3 sont entretenues et complétées. Il est utile de définir l'angle plat et de préciser sa mesure. La notion d'angles alternes-internes offre un vocabulaire commode pour donner une caractérisation angulaire du parallélisme. La **somme des mesures des angles d'un triangle** peut être exploitée notamment pour des problèmes de construction ou pour établir une propriété géométrique d'une figure.

EXEMPLES

1. Construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 4 cm et un angle aigu mesure 30°.
2. On considère un point C d'un cercle de diamètre [AB], distinct de A et B, et tel que BAC = 25°. Que peut-on dire du triangle ABC ? (Cet exercice peut se prêter à une différenciation si l'on veut généraliser le résultat à un point C quelconque du cercle, distinct de A et B.)

• Pour les théorèmes de **Pythagore** et de **Thalès**, il convient dans l'apprentissage de distinguer un énoncé direct et un énoncé réciproque. Chacun de ces théorèmes est formalisé en deux énoncés séparés, l'un direct et l'autre réciproque. Cependant, le distinguo entre énoncé direct et réciproque peut n'être pas perçu par tous les élèves ; c'est pourquoi, en évaluation, on accepte par exemple que l'élève invoque le théorème de Pythagore sans autre précision lorsqu'il applique l'un ou l'autre de ces énoncés.
• Le **théorème de Thalès** est amené avec progressivité, d'abord avec la configuration des « triangles emboîtés ». Les deux points de vue « commencer par le théorème de la droite des milieux, puis généraliser » ou « présenter le premier comme une conséquence du deuxième » sont acceptables, et relèvent de la liberté pédagogique. La démonstration du théorème de la droite des milieux n'est pas un objectif. Le théorème de Thalès peut être formalisé en termes de proportionnalité, ce qui est plus immédiatement perceptible et plus simple à manipuler que l'écriture de rapports de longueurs. Le lien avec les triangles semblables, les agrandissements et réductions, et les homothéties de rapport positif peut être établi à cette occasion. La configuration « en papillon » peut donner l'occasion de mentionner les homothéties de rapport négatif, notamment en liaison avec les logiciels de tracé ; cependant, au-delà de ce lien, ces dernières homothéties n'ont pas vocation à être développées au cycle 4.

Problèmes de construction

Les **problèmes de construction** constituent un champ privilégié de l'activité géométrique. Ces problèmes doivent être diversifiés : reproduction d'une figure, figures sous contrainte, protocoles ou algorithmes de construction, analyse et modélisation de situations complexes issues du monde réel, des arts visuels, de l'architecture, du design, etc. Ces problèmes développent l'aptitude à observer une figure et à la représenter dans le modèle géométrique abstrait pour y raisonner.

L'élève doit entretenir et consolider au cours du cycle 4 sa compétence dans la manipulation des **instruments de tracé et de mesure**, et se familiariser progressivement avec les fonctionnalités d'un **logiciel de géométrie dynamique** permettant des constructions. Pour certaines figures relevant d'une procédure **algorithmique**, un logiciel adapté peut être utilisé.

Exemple : la séquence d'instructions ci-contre permet au lutin du logiciel Scratch de construire un carré.

Transformations usuelles

La **symétrie axiale**, envisagée au cycle 3, fait l'objet d'une définition formalisée. La **symétrie centrale** est introduite dès la classe de 5e, en liaison avec le parallélogramme, pour lequel on admet que le point d'intersection des diagonales est centre de symétrie. Les symétries sont envisagées et définies en tant qu'applications ponctuelles ; leurs propriétés de conservation et de transfert peuvent être mises en évidence et utilisées, mais ne sont pas exigibles en évaluation.

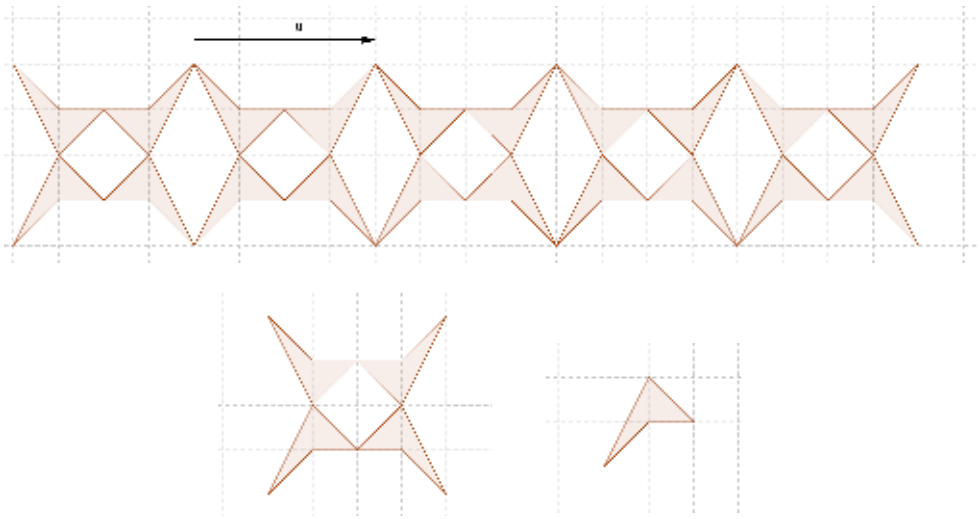
Les autres transformations (**translations, rotations, homothéties**) sont introduites pour décrire ou pour construire certains objets, notamment les frises, pavages et rosaces. Elles peuvent être découvertes avec les fonctionnalités des logiciels de géométrie. Elles sont essentiellement utilisées avec ces logiciels, et leur définition formalisée en tant qu'applications ponctuelles n'est pas un attendu.

Frises, pavages, rosaces, polygones réguliers

Les frises, pavages et rosaces sont introduits pour modéliser des situations issues des arts visuels (fresques, bas-reliefs, vitraux, ...), du design (papier peint, carrelages, logos, ...), de l'architecture. Ces objets ne font pas l'objet d'une définition formalisée ni d'une étude en soi. L'élève peut être progressivement amené à observer, décrire et analyser certaines de ces figures dans des domaines variés, puis à en construire des modèles géométriques, exacts ou simplifiés. Les logiciels de géométrie sont privilégiés pour ces constructions. On peut adopter un petit nombre de conventions de vocabulaire destinées à faciliter l'analyse et la compréhension de ces objets. Les indications suivantes sont un guide de présentation pour le professeur, avec un vocabulaire possible. Ce vocabulaire, qui peut être introduit en situation, ne doit ni faire l'objet d'une institutionnalisation en classe, ni être évalué. Chaque énoncé permet de conforter ce vocabulaire, en conciliant précision et simplicité.

• Une **frise** est une bande de plan dans laquelle un **motif** se répète régulièrement par une même **translation**, schématisée par un **vecteur**. Un motif associé à une translation la plus courte possible est un **motif de base** ; celui-ci peut lui-même être obtenu à partir d'un **motif élémentaire**, reproduit par d'autres transformations (symétries, rotations).

EXEMPLE
Voici une frise et un des deux vecteurs qui schématise une translation la plus courte.



Un motif de base

Un motif élémentaire associé

Un motif de base et un motif élémentaire associé ne sont pas uniques. Un motif de base peut être envisagé ou non avec un polygone ou une forme géométrique qui l'entoure, et qui peut par des translations successives recouvrir entièrement la bande de plan, quitte à négliger le chevauchement des bords. Chaque situation guidera le choix du motif envisagé, qui doit être précisé.

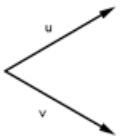
L'approche considérée permet de présenter le **vecteur** comme un **codage** de la translation. Elle n'est pas la seule : A et B étant deux points donnés, on peut aussi parler de translation qui transforme A en B.

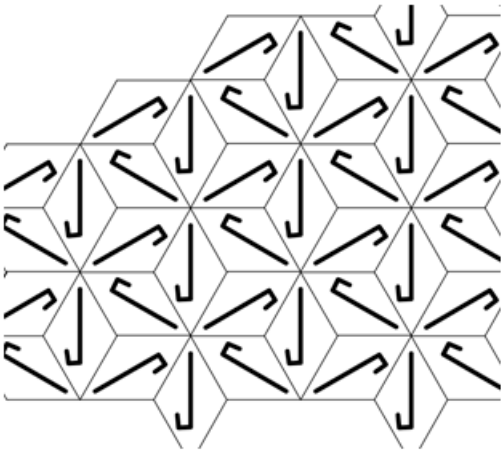
• Un **pavage** est une portion de plan dans laquelle un **motif** se répète régulièrement par deux translations, schématisées par des **vecteurs** non colinéaires (ou non parallèles). Comme pour les frises, un motif associé à deux translations les plus courtes possibles est un **motif de base** ; celui-ci peut lui-même être obtenu à partir d'un **motif élémentaire**, reproduit par d'autres transformations (symétries, rotations).

EXEMPLE

Voici un pavage, et deux vecteurs qui schématisent les translations les plus courtes.

Comme pour les frises, la nature du motif (simple dessin ou dessin inclus dans un « pavé » qui l'entoure, comme le losange du pavage ci-avant) sera précisée dans chaque situation.





Un motif de base

Un motif élémentaire associé, reproduit par deux rotations

• Une **rosace** est formée d'un **motif** de base, qui se répète régulièrement par une rotation de centre O donné, et dont l'angle a pour mesure en degré un diviseur entier de 360. Une telle rosace est contenue dans un cercle de centre O.
• Les polygones réguliers, qui ne sont pas mentionnés en tant que tels dans le programme, n'ont pas à faire l'objet d'une définition formalisée. Ce sont néanmoins des objets d'étude intéressants qui, à l'instar des précédents, permettent de modéliser des situations naturelles (étoiles de mer, nids d'abeilles hexagonaux, ...), des objets technologiques (écrous, enjoliveurs d'une roue de voiture, ...), des œuvres d'art visuelles (rosaces, vitraux, ...), etc. Les polygones réguliers peuvent être vus comme des rosaces particulières, ce qui autorise une construction à l'aide de rotations.

Les outils numériques

Les outils numériques sont intégrés à la résolution de problèmes dans les constructions pour elles-mêmes, mais aussi dans la démarche d'investigation, dans l'observation, l'analyse et l'induction. L'élaboration d'un algorithme de construction sur le logiciel Scratch peut être proposée de façon différenciée à certains élèves, en formation. Cependant, cette élaboration n'est pas un objectif du collège et, de ce fait, ne doit pas être un objet d'évaluation.

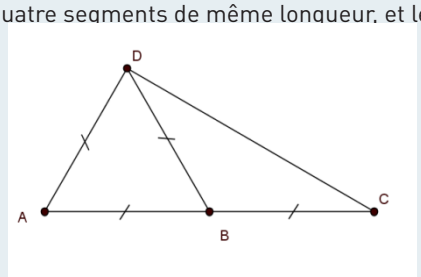
Le raisonnement et la démonstration

Le raisonnement intervient de façon diversifiée (déductif, par l'absurde, etc.). La **démonstration** est introduite avec prudence, sur des situations simples, qui nécessitent un argument de vérité dans le modèle de la géométrie abstraite[2], et sans décourager les élèves. Pour créer la possibilité d'îlots de démonstration, le professeur peut donner une liste – de longueur raisonnable – de définitions et théorèmes à connaître, en veillant à ce que cette liste soit cohérente et qu'elle permette de résoudre un nombre suffisant de problèmes.

Dans ces problèmes, il convient de dissocier l'exigence de résoudre la tâche, qui est source de motivation, de celle de communiquer cette résolution en rédigeant une démonstration. Cette dernière activité, pourtant essentielle et spécifique aux mathématiques, est plus délicate ; elle doit être conduite de façon progressive, non systématique, différenciée selon l'appétence et le niveau des élèves. Il convient surtout d'éviter les rédactions trop longues, trop lourdes, qui égarent les élèves et les détournent de la résolution d'un problème. **Si la rédaction formalisée d'une démonstration n'est pas un attendu du collège, l'exercice progressif du raisonnement est un objectif fondamental.**

EXEMPLE

La figure codée comprend quatre segments de même longueur, et les points A, B, C sont alignés.



Quelle est la nature exacte du triangle ACD ?

2. Voir à nouveau La géométrie dessinée et la géométrie abstraite - Jean-Philippe Rouquès et Catherine Houdement – Mars 2016

La solution peut d'abord être appréhendée à l'aide d'une figure tracée en vraie grandeur et en utilisant l'équerre, ou encore avec un logiciel de géométrie dynamique affichant les mesures d'angles, ou encore offrant un test d'orthogonalité.

Un débat peut s'ensuivre, autour de la question : le triangle est-il *exactement rectangle* en D, ou *à peu près* ? Tout dépend du contrat didactique : s'agit-il de la figure dessinée ou du modèle abstrait ?

Le choix du modèle abstrait justifie le fait de produire une preuve pour convaincre. La preuve peut être simplement trouvée par l'élève, par exemple en marquant successivement sur la figure les mesures des angles que l'on peut trouver : d'abord 60° dans le triangle équilatéral, puis 120° et 30° dans le triangle BCD isocèle en B, enfin 90° pour l'angle ($\widehat{ADC}$).

Le fait de rédiger une démonstration est un autre niveau d'exigence, qui peut être omis ou demandé à l'élève, en motivant la tâche par exemple par la nécessité de communiquer la preuve par écrit ou par téléphone.

Un exemple de modélisation en géométrie

EXEMPLE

Un professeur d'EPS trace un circuit de course à pied avec des plots :
- le plot n°2 est situé à 36 m au nord du plot n°1, qui est le plot de départ ;
- le plot n°3 est situé à 69 m à l'est du plot n°2 ;
- le plot n°4 est situé à 72 m au sud du plot n°3.

Chaque élève va d'un plot au suivant en ligne droite, et parcourt un certain nombre de fois le circuit 1-2-3-4-1. Il continue sur le même circuit jusqu'au plot d'arrivée, placé sur ce circuit de telle sorte le trajet total ait une longueur de 1,5 km.

Où le professeur doit-il placer le plot d'arrivée ?
Combien de fois un élève doit-il parcourir le circuit ?

Pour déterminer la distance entre les plots n°4 et n°1, un élève peut modéliser la situation de deux manières :
- par un dessin à l'échelle sur lequel il effectue une mesure de longueur ;
- par un schéma à main levée, support du raisonnement et de l'application du théorème de Pythagore.

Les deux méthodes sont correctes. Il est important de discuter avec les élèves de l'intérêt de chacune : la première ne nécessite pas de calculatrice, la deuxième permet d'obtenir une réponse plus précise ou plus sûre. Dans la même veine, voir l'activité Le cross du collège.

Différenciation

Dans ce thème, les possibilités de différenciation peuvent s'exercer de façon très diversifiée :
- en délivrant un accompagnement spécifique, que ce soit pour des travaux en classe ou hors la classe ;
- en changeant une variable didactique dans un problème (exemple : s'il s'agit de reproduire une figure par un agrandissement, le rapport 2, le rapport 1,6 et le rapport $\frac{7}{3}$ présentent des degrés de technicité graduels, et peuvent être donnés à différents élèves) ;
- en demandant une preuve sur un cas particulier à certains élèves, dans le cas général à d'autres ;
- en prolongeant une étude pour certains élèves ;
- en développant des scénarios pédagogiques collaboratifs (entraide, travail de groupe, ...) ;

Retrouvez Éduscol sur

• en offrant aux élèves des espaces où plusieurs types de démarches sont possibles (voir ci-avant l'exemple du circuit de course).

Exemples de situations d'apprentissage

Classes de problèmes

• Reconnaissance d'une configuration de base dans un environnement complexe.
• Programmes de construction.
• Compréhension et modification d'une construction donnée par un dessin ou un algorithme.
• Construction de frises, de rosaces, de pavages, à l'aide des instruments de tracé ou un logiciel.
• Calcul de grandeurs (longueurs, angles, aires).
• Modélisation de situations réelles (plans, frises, pavages) par des configurations et des transformations simples.
• Problèmes d'alignement, de parallélisme.
• Problèmes d'orthogonalité.

Exemples d'activités

Exemples de questions flash

Exemples de tâches intermédiaires :
• Le tangram
• Les frises de gouttes
• Analyse et construction d'un pavage

Exemples d'activités avec prise d'initiative :
• Le cross du collège
• La tour Charles le Téméraire
• La rosace de Sarajevo

Interdisciplinarité

L'interdisciplinarité donne du sens aux notions mathématiques, et doit s'exercer au sein de la classe et dans les enseignements complémentaires. Certaines notions de géométrie plane peuvent notamment trouver place dans le cadre des EPI (enseignements pratiques interdisciplinaires).

Par exemple :
• dans la thématique « Culture et création artistiques » : rosaces frises, pavages ;
• dans la thématique « Culture et création artistiques » : les figures géométriques dans le design, dans l'architecture, dans les jeux vidéo, dans la civilisation médiévale musulmane ;
• dans la thématique « Monde économique et professionnel » : la modélisation plane pour traiter certains problèmes liés au monde économique et professionnel ;
• dans la thématique « Sciences technologie et société » : distances astronomiques (estimation du rayon de la Terre par Ératosthène, de la distance Terre-Lune au XVIIIe siècle) ; travaux sur plans et cartes, etc.

Ressources complémentaires

- Géométrie au collège
- La géométrie dessinée et la géométrie abstraite - Jean-Philippe Rouquès et Catherine Houdement – Mars 2016
- Logiciel Pavages, créé par Pascal Peter
- Frises ornementales et groupes 11e chapitre Recherches en éducation : pour une culture mathématique accessible à tous : élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes disponible sur www.enseignement.be
- Pavages rosaces et frises, réalisé à l'occasion de l'exposition 2000 Symétries du monde
- Frises et pavages, Philippe Garulo
- On trouvera de nombreuses activités faisant intervenir la construction de « belles » figures de géométrie plane, notamment liées aux arts plastiques, sur le site de l'IREM de Paris Nord.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Un exemple de tâche avec prise d'initiative

Le cross du collège

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer :

- théorème de Pythagore ;
- mettre en œuvre ou écrire un programme de construction d'une figure géométrique.

Résoudre des problèmes de proportionnalité (selon la méthode choisie).

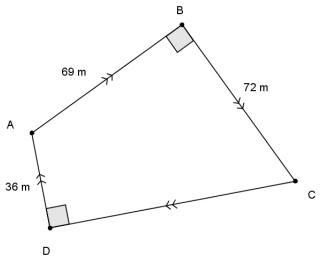
COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, représenter, calculer, raisonner, communiquer.

Énoncé

Le cross du collège s'effectue sur le parcours schématisé ci-contre , en partant du point A et en suivant le sens des flèches. Les élèves de quatrième doivent parcourir 1,5 km.

Où doit-on placer la ligne d'arrivée sur le circuit ?



Pistes pédagogiques

Une telle activité peut être développée dans le cadre d'un EPI en relation avec l'éducation physique et sportive.

En classe de 5e, ou pour certains élèves de 4e et 3e, une méthode non experte fondée sur la mesure et les échelles peut être utilisée.

Une autre méthode non experte peut être basée sur la construction de la figure avec un logiciel de géométrie ; dans ce cas, le professeur peut donner une indication pour la construction du point D, en utilisant le cercle de diamètre [AC].

Ces deux méthodes ont toute leur validité, car elles donnent un résultat satisfaisant dans la mesure où il s'agit d'un problème de la vie courante

Avec les données, la valeur intermédiaire attendue de AC est une approximation décimale, par exemple AC ≈ 99,7. (La valeur exacte AC = $\sqrt{9945}$ n'est pas un attendu raisonnable dans le contexte). On trouve ensuite . La longueur du circuit ABCD est donc entière, et vaut 270 m. L'arrivée est donc située sur le segment [CD], à 9 m du point C.

Variante

On peut juger l'arrivée sur l'un des sommets : le sommet A avec un cross de longueur de 1350 m ou de longueur 1890 m. Dans les deux cas, l'arrivée est jugée au point A.

Aides possibles

En cas de blocage de l'élève, le professeur pourra amener celui-ci à s'interroger afin de mettre en œuvre une stratégie appropriée : calculer le périmètre du quadrilatère, inciter à exploiter les angles droits, si besoin inviter à tracer la diagonale [AC] pour faire apparaître la configuration du triangle rectangle, etc.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Des exemples de questions flash
Géométrie plane

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

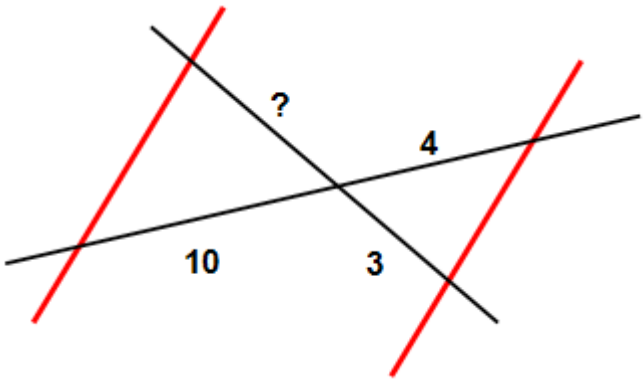
Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer :

- théorème de Thalès (énoncé 1) ;
- théorème de Pythagore (énoncé 2) ;
- comprendre l'effet d'une homothétie sur une figure (énoncé 3) ;
- somme des angles d'un triangle (énoncé 4) ;
- trigonométrie dans le triangle rectangle (énoncé 4) ;
- comprendre l'effet d'une symétrie (axiale, centrale) et d'une rotation sur une figure (énoncé 5).

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, calculer, raisonner.

Énoncé 1 [3e]



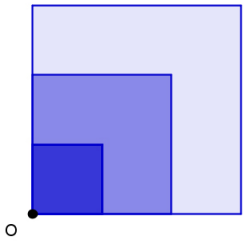
Les deux droites rouges sont parallèles. Calculer la longueur manquante.

Énoncé 2 [4e]

Donner le nombre entier le plus proche de la valeur cherchée.

Énoncé 3 [4e]

La figure représente 3 carrés de sommet O, dont les côtés mesurent 1 cm, 2 cm, 3 cm.

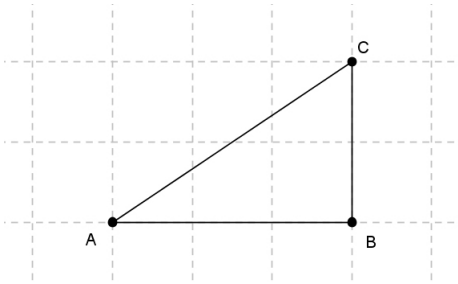


Donner le coefficient de l'agrandissement permettant de passer du petit carré au grand.

Donner le coefficient de la réduction permettant de passer du grand carré au moyen.

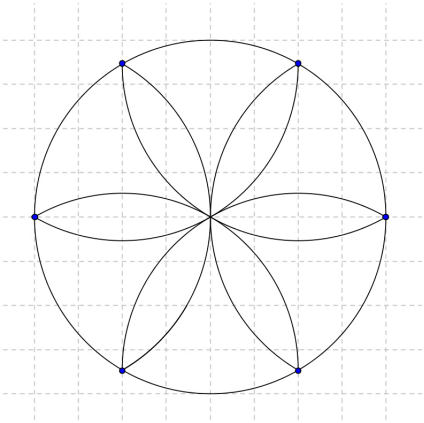
Énoncé 4 [3e]

Les points A, B, C sont représentés sur les nœuds d'un quadrillage régulier.
Déterminer la mesure, éventuellement arrondie au degré, de chacun des trois angles du triangle ABC.



Énoncé 5 (3e)

La figure suivante représente une rosace.



Décrire une symétrie centrale, deux symétries axiales et deux rotations qui laissent invariante cette rosace.

Pistes pédagogiques

Les années sont données à titre indicatif.

Pour chaque exercice, il peut être demandé une résolution mentale.

L'usage d'un brouillon ou d'une calculatrice peut être autorisé. C'est notamment indispensable pour la question 4.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Un exemple de tâche intermédiaire

Les frises de gouttes

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer :

- comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale) sur une figure ;
- construire des frises, des pavages, des rosaces ;
- utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, symétrie, rotation.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, représenter.

Énoncé

Chacune des frises suivantes est construite à partir du motif élémentaire suivant, qui représente une goutte d'eau :

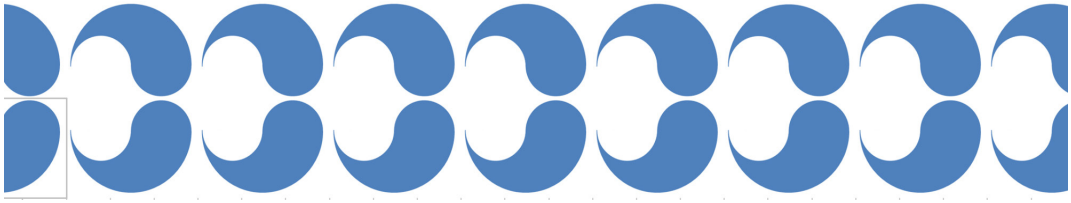
Pour chaque frise, ce motif est reproduit par plusieurs transformations.

Dans chaque cas, identifier les transformations, puis choisir un autre motif élémentaire et tracer à la main ou à l'aide d'un logiciel quatre frises analogues, qui reproduisent le motif choisi par les mêmes transformations.

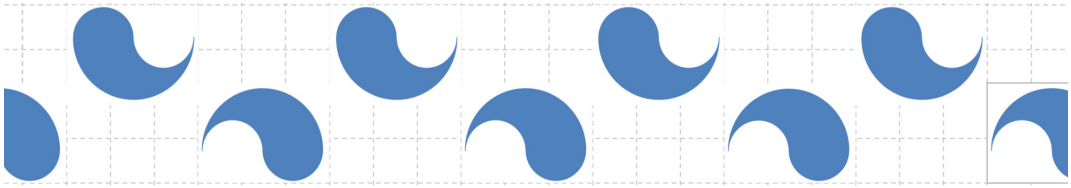
Frise 1

Frise 2

Frise 3



Frise 4



Pistes pédagogiques

L'activité peut être donnée en classe de 4e, ou en classe de 3e.

Pour aider les élèves, on pourra les conduire les élèves à identifier d'abord le motif de base qui est reproduit par des translations, identifier le vecteur d'une translation « minimale », puis éventuellement la transformation permettant de passer du motif élémentaire au motif de base.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Un exemple de tâche intermédiaire

Analyse et construction d'un pavage

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer :

- comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation sur une figure ;
- construire des frises, des pavages, des rosaces ;
- utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, symétrie, rotation.

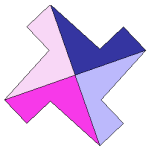
COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

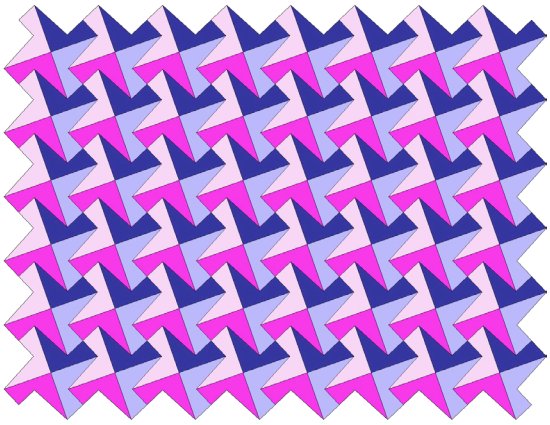
Chercher, représenter.

Énoncé

La figure ci-contre représente un pavage.[1]

Il est formé d'un motif de base (ou « pavé ») qui est reproduit à l'aide de deux translations :





Ce motif est lui-même constitué d'un motif élémentaire qui est reproduit par des transformations, pour donner le motif de base (on ne tient pas compte des couleurs).

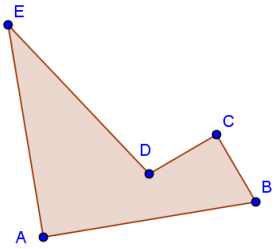
1. Décrire les translations donnant le pavage à partir du motif de base, en schématisant leurs vecteurs.

2. Dessiner à main levée un motif élémentaire, et préciser des transformations permettant d'obtenir le motif de base à partir de ce motif élémentaire.

1. Pavage réalisé à l'aide du logiciel Pavages, créé par Pascal Peter :

Retrouvez Éduscol sur

3. Représenter à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique le motif élémentaire, qui est schématisé ci-contre , à partir des indications suivantes :



- le motif élémentaire est un polygone ABCDE ;
- A, B, C sont des points libres ;
- le triangle ABE est rectangle et isocèle en A ;
- le triangle BCD est rectangle et isocèle en C.

4. Compléter la construction, en représentant le motif de base, puis une partie du pavage à l'aide des translations qui conviennent. (On pourra faire varier la position du point C et observer la déformation du pavage.)

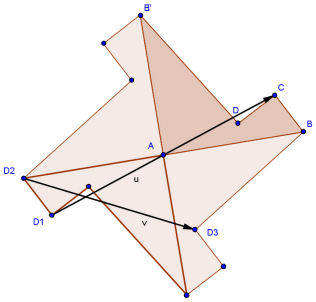
Pistes pédagogiques

Une telle activité peut être développée dans le cadre d'un EPI en relation avec l'enseignement des arts plastiques.

Elle peut être proposée en classe de 3e. Des pavages ne faisant pas intervenir une rotation peuvent être présentés dès la 4e.

Réponses

On passe du motif élémentaire au motif de base par des rotations d'angles de mesures respectives 90°, 180°, 270°.



À partir du motif de base tel qu'il est représenté dans l'énoncé, deux des translations possibles sont schématisées sur la figure ci-après :

- la translation qui transforme D_1 en C ;
- la translation qui transforme D_2 en D_3.

Aides possibles

Pour aider l'élève dans l'analyse de la figure, on peut lui dire qu'on a reproduit le pavé de base sur 6 lignes et 8 colonnes.

Dans la question 3, la forme exacte du motif élémentaire (respect des angles et des dimensions) n'est pas imposée, ni la couleur des pavés élémentaires qui sont reproduits. On peut aider certains élèves en donnant davantage de précision pour construire la figure : longueur des côtés *AB* et *BC*, angle $\widehat{ABC}$.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Un exemple de tâche intermédiaire

Le tangram

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer :

- mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique ;
- démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, un losange, un rectangle, un carré (selon la question posée).

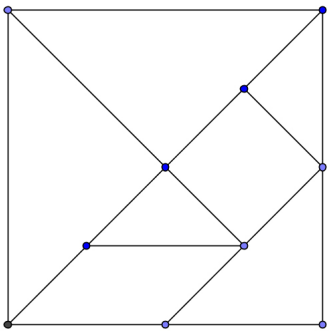
Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques :

- comprendre l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires (selon la méthode employée).

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, représenter, calculer, raisonner.

Énoncé [5e - 4e]



La figure ci-contre représente un puzzle chinois, appelé *tangram*.

Dans le modèle de la géométrie plane, la figure complète forme un carré, et le puzzle est constitué de sept pièces.

Chaque pièce est modélisée par un triangle ou un quadrilatère dont les sommets sont soit des sommets du grand carré, soit des points qui sont milieux de deux autres.

1. Construire la figure à partir d'un grand carré de côté 16 cm.
2. Donner la nature de chacune des sept pièces, puis calculer son aire.
3. Donner les dimensions des côtés de chaque pièce.
4. Quelle serait l'aire de chaque pièce avec un carré initial de côté 8 cm ?

Pistes pédagogiques

La question relative aux dimensions de chaque pièce peut être omise en 5e.

À ce niveau, on peut s'en tenir aux longueurs mesurées ou à celles affichées par un logiciel de géométrie.

On peut envisager une différenciation selon le type de papier utilisé (papier blanc, pointé, quadrillé…), un pavage par 16 triangles etc.

La notion de fraction peut être mobilisée pour les calculs d'aires.

Dans la question relative à la nature des pièces, le niveau d'approfondissement dépend du contrat didactique peut être modulé selon le degré de progression dans le cycle et selon les élèves ; cela peut aller de la simple reconnaissance perceptive de la nature des figures au contrôle par la mesure (ou par l'affichage du logiciel) et, plus avant, jusqu'à la démonstration de cette nature à l'aide des propriétés connues. Dans ce dernier cas, le contrat se doit de préciser que l'on se place dans le cadre de la géométrie abstraite – qui n'est pas a priori celle de l'énoncé initial puisque le tangram est un objet physique.

La dernière question peut être aménagée en modulant le côté du carré initial : par exemple, les valeurs 12 cm ou 7 cm permettent de graduer le niveau de technicité dans l'application de la proportionnalité ou des coefficients de réduction.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Un exemple de tâche avec prise d'initiative

La rosace de Sarajevo

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer :

- comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation sur une figure ;
- construire des frises, des pavages, des rosaces ;
- mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique ;
- utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, symétrie, rotation.

COMPETENCES TRAVAILLÉES

Chercher, modéliser, représenter.

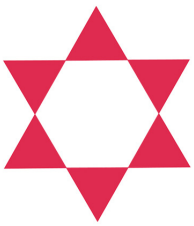
Énoncé

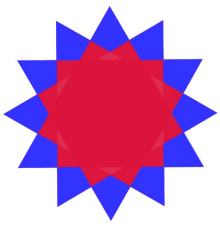
La photo ci-contre représente le vitrail ornant une coupole plate, dans une bibliothèque à Sarajevo (Bosnie), reconstruite en 2014. Ce vitrail est constitué de plusieurs rosaces. Chaque rosace est elle-même construite à partir d'un motif qui est reproduit plusieurs fois par une rotation.

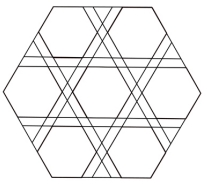
La rosace de la coupole de Gradska vijecnica à Sarajevo.
Photo : R. Férachoglou

Voici trois exemples de telles rosaces extraites, mais il y en a beaucoup d'autres :

1. Choisir une des rosaces dans le vitrail, représenter son motif et décrire une rotation qui permet, en la faisant agir plusieurs fois, d'obtenir la rosace.
2. Représenter la rosace choisie à l'aide d'un logiciel de géométrie.







Pistes pédagogiques

Une telle activité peut être développée dans le cadre d'un EPI en relation avec l'enseignement des arts plastiques.

Elle peut être proposée en classe de 4e, ou en classe de 3e.

Il y a plusieurs rosaces possibles, plus ou moins élaborées, que l'on obtient par une rotation d'angle minimal pouvant être égal à 120°, à 60° ou à 30° selon la rosace choisie.

On peut aussi faire observer que d'autres transformations sont à l'œuvre.

Cet exercice peut donner lieu à une différenciation de la tâche selon la rosace choisie ou donnée par le professeur, avec un plus ou moins grand degré de complexité ou de technicité. Un élève démuni peut aussi choisir l'une des trois rosaces de l'énoncé.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Un exemple de tâche avec prise d'initiative

La tour Charles le Téméraire à Charolles

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer :
- coder une figure.
- trigonométrie dans le triangle rectangle.

Représenter l'espace :
- développer sa vision dans l'espace.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, représenter, calculer, raisonner.

Énoncé

Visionner la vidéo suivante : Calculer la hauteur de la tour Charles le Téméraire.

Source : vidéo réalisée par I. Geoffray

Pistes pédagogiques

Il faut d'abord conseiller aux élèves de visionner la vidéo trois fois : la première pour comprendre, la deuxième en prenant des notes, la troisième pour s'assurer qu'on a assimilé toutes les données.

Un travail par groupes peut être envisagé.

Ainsi posé, cet exercice exige une prise d'initiative, qui consiste notamment à réaliser un croquis plan.

L'identification d'un triangle rectangle, et le report des données dans cette configuration viennent ensuite.

Le recueil des traces de recherche des élèves (essais, calculs, etc.) est essentiel pour apprécier la pertinence de la démarche.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

Représenter l'espace

Objectifs

Au cycle 3, la manipulation, l'observation, la description et la représentation de nombreux solides (pavé droit, cube, prisme droit, pyramide régulière, cylindre, cône et boule) ont permis à l'élève de développer et structurer sa vision de l'espace environnant. L'ensemble de ces travaux l'ont conduit à mettre en jeu des grandeurs géométriques (aire, volume, angle) et leur mesure. Ce travail s'est fait conjointement avec une première modélisation de l'espace familier (la classe, l'établissement, l'environnement urbain proche, etc.) ouvrant sur des problèmes simples.

Au cycle 4, l'élève prolonge ce travail et aborde des situations dans un environnement plus complexe. Confronté à des problèmes spatiaux et à des calculs de mesure de grandeurs, il mobilise les notions étudiées en cours de cycle, notamment celles relevant de la géométrie plane (parallélisme, orthogonalité, théorème de Pythagore, trigonométrie, etc.).

La définition des solides particuliers n'est pas un objectif du programme.

Par ailleurs, l'objectif est de développer la capacité de l'élève à appréhender l'espace et à s'y repérer. Le repérage dans le plan, travaillé au cycle 3, est ainsi poursuivi avec la définition de coordonnées dans un repère orthogonal. L'observation et le repérage dans un parallélépipède rectangle, l'utilisation en lien avec l'enseignement de technologie, d'un logiciel de représentation dans l'espace, d'une machine à commande numérique ou d'une imprimante 3D offrent des opportunités pour initier l'élève au repérage cartésien dans l'espace. Enfin, en lien avec une modélisation de la Terre, l'élève découvre le repérage sur une sphère. Les notions de latitude et de longitude trouvent tout naturellement un prolongement dans les enseignements de géographie et de sciences de la vie et de la Terre.

Liens avec les domaines du socle

La production et l'utilisation de représentations adaptées de l'espace, le recours à des plans ou des cartes pour se repérer permettent de développer la vision du monde en utilisant un langage mathématique et scientifique (domaine 1).

Les différents travaux menés à partir d'observations de l'espace environnant renforcent chez l'élève la compréhension du rôle des mathématiques dans la compréhension et la représentation des systèmes naturels (domaine 4).

La découverte du repérage sur la sphère permet à l'élève de découvrir et de comprendre des représentations du monde et de l'activité humaine (domaine 5).

Progressivité des apprentissages

Le travail conduit dès le début du cycle 4 permet de passer progressivement de l'observation de solides concrets à leur représentation à l'aide de patrons ou de vues partielles, afin d'aboutir ensuite à des représentations plus riches et plus abstraites.

La perspective cavalière, qui ne constitue pas un objet d'étude en soi, est utilisée en classe. L'élève, une fois familiarisé avec la représentation d'objets simples en perspective, peut s'appuyer sur l'utilisation régulière d'un logiciel de géométrie dynamique. L'enseignant veille à mettre en évidence l'apport de ce nouvel outil, notamment, dans l'observation et l'exploitation de différentes vues d'un même objet de l'espace.

La représentation de l'espace a sa place tout au long du cycle en lien avec d'autres thèmes du programme.

Stratégies d'enseignement

Les problèmes qui mettent en jeu des grandeurs (longueur, aire ou volume par exemple) fournissent des situations complexes propices au développement de la vision de l'espace. En lien avec la progression adoptée pour l'ensemble des thèmes du programme, l'enseignant veille à proposer tout au long du cycle des problèmes qui conduisent l'élève à mobiliser les savoirs et savoir-faire en cours d'acquisition.

On peut citer notamment :
- la réalisation de maquettes (pouvant être obtenues avec l'aide d'un logiciel), d'un patron (par exemple la construction du patron d'un cône sous contraintes : périmètre à la base donné, ou périmètre à la base et hauteur donnés, ou aire fixée), la lecture sur une carte ou sur un plan en lien avec l'utilisation d'un rapport d'agrandissement ou de réduction (résoudre des problèmes de proportionnalité, thème grandeurs et mesures) ;
- le calcul du volume d'un solide (thème grandeurs et mesures) ;
- le calcul de grandeurs géométriques grâce à l'utilisation du théorème de Pythagore, du théorème de Thalès ou grâce à l'utilisation de rapports trigonométriques dans un triangle rectangle (utiliser des notions de géométrie plane) ;
- la dépendance de deux grandeurs géométriques, comme par exemple le volume et le rayon d'une boule (comprendre et utiliser la notion de fonction et thème grandeurs et mesures).

Les travaux de description, de modélisation, de représentation du monde réel environnant fournissent un terrain fertile au développement des compétences dans la vision de l'espace et dans sa représentation. Il est souhaitable de s'appuyer autant que possible sur des objets présents et identifiables dans l'environnement familier des élèves.

Ainsi, le repérage sur un plan, initié au cycle 3, peut être étendu à l'espace que constitue l'environnement immédiat. La salle de classe ou la cour de l'établissement fournissent un terrain propice à des déplacements, des positionnements réalisables ou modélisables par les élèves. Ces activités élémentaires qui consolident le recours à un repérage dans le plan peuvent être illustrées par l'utilisation d'instructions de déplacement au cours d'activités de programmation (« aller à ... »). Inversement, des activités de déplacements automatisés à l'aide d'un repère offrent une situation élémentaire d'informatique débranchée que l'enseignant peut exploiter pour permettre aux élèves de s'approprier le repérage par les coordonnées.

Le repérage dans un parallélépipède rectangle à l'aide de trois coordonnées (abscisse, ordonnée, altitude) ne doit pas faire l'objet d'une introduction générale sur les repères

cartésiens de l'espace. Au contraire, il s'agit dans un premier temps, en prolongement de ce qui a été effectué dans le plan, d'illustrer pour l'élève la nécessité d'utiliser une troisième coordonnée. L'enseignant peut donc chercher à s'appuyer sur de nouvelles configurations simples où l'expérimentation directe est encore accessible dans un environnement proche (repérage d'un point du plancher ou du tableau, d'une lampe, etc.) avant de mettre en place un cadre plus rigoureux et plus général. L'enseignement peut également s'appuyer sur les liens existant avec d'autres enseignements, notamment celui de technologie. En effet, la représentation d'un objet à l'aide d'un logiciel ou sa conception à l'aide d'une imprimante 3D sont des exemples de situations qui nécessitent de faire appel aux coordonnées dans l'espace. Ces situations sont à privilégier car elles prennent leur sens dans le quotidien de l'élève, au service d'une réalisation concrète.

De même, le repérage sur la sphère ne doit pas faire l'objet d'une introduction générale ou abstraite. Pour amener à ce repérage, l'enseignant cherche à développer un travail expérimental. Il peut s'appuyer, par exemple, sur l'étude de la section d'une sphère par un plan, réalisée avec l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. En lien avec l'enseignement d'autres disciplines (géographie et sciences de la vie et de la Terre notamment), on se place dans la situation du globe terrestre modélisé par une sphère avec les pôles Nord et Sud placés sur un axe vertical. Cette étude peut alors permettre de mettre en évidence les cas particuliers d'une section par un plan vertical contenant les deux pôles ou par un plan horizontal et ainsi d'éclairer le vocabulaire qui sera ensuite utilisé : méridiens, équateur ou parallèles. En soulignant les liens existant avec d'autres disciplines, on aboutit à la définition des coordonnées terrestres (la longitude et la latitude). L'utilisation de ces grandeurs pour repérer un lieu géographique sur une mappemonde ou sur une carte est proposée et exploitée en cours de mathématiques.

Le calcul du rayon d'un parallèle en différents lieux du globe terrestre est un exercice mathématique intéressant qui renvoie à son observation sur une mappemonde ou sur une carte.

De même, le calcul de la distance à l'horizon, qui fait appel au théorème de Pythagore et à la trigonométrie, donne lieu à un travail sur les ordres de grandeurs. Il peut aussi faire intervenir la notion de fonction et donner lieu à l'utilisation d'un tableur.

L'utilisation de données réelles fournies par l'actualité (par exemple, les positions d'un skipper lors d'une course transatlantique) constitue également une situation propice à motiver ces apprentissages.

Différenciation

Dans ce thème, les possibilités de différenciation peuvent s'exercer :
- en diversifiant les supports et les outils pour appréhender l'espace : solides usuels, mappemonde, maquette, vue en perspective, vue en coupe, figure réalisée à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, etc. ;
- en délivrant un accompagnement spécifique, que ce soit pour des travaux en classe ou hors la classe : on peut par exemple envisager un travail collaboratif comme la construction d'un patron en imposant certaines contraintes ;
- en guidant plus ou moins l'élève dans la réalisation de la tâche, au moyen de supports concrets susceptibles de l'aider ou par le biais de questions supplémentaires ;
- en prolongeant une étude pour certains élèves.

Exemples de situations d'apprentissage

Exemples de questions flash
Exemple de tâches intermédiaires : L'usinage d'une pièce de bois
Exemples d'activités avec prise d'initiative :

- Curieux parcours sur la Terre
- Voyages sur un méridien
- La surface vitrée de la pyramide du Louvre

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder le thème « Espace et géométrie » avec les élèves. Certains de ces documents ont été produits dans le cadre de l'accompagnement de programmes de mathématiques antérieurs. À ce titre, ces ressources s'inscrivent dans un contexte pédagogique désormais ancien. Néanmoins, elles proposent des éléments toujours pertinents.

- Géométrie au collège : étude la ligne d'horizon, page 5
- Principaux éléments de mathématiques - Banque de problèmes : exercices 11, 12 et 20
- Repérage sur la sphère, Claire-Marie Aït-Aïssa, vice-rectorat de Nouvelle Calédonie
- De la sphère au plan, IREM de Besançon, 2009

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

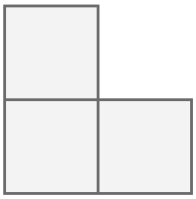
Représenter l'espace
Exemples de questions flash

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Représenter l'espace :
- utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides et de situations spatiales ;
- développer sa vision de l'espace.

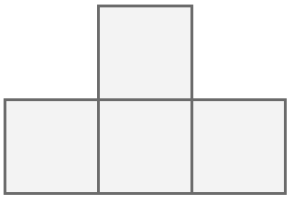
COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, représenter.

Énoncé 1

Un solide est constitué d'un assemblage de petits cubes identiques. On donne ci-dessous, différentes vues de ce solide.



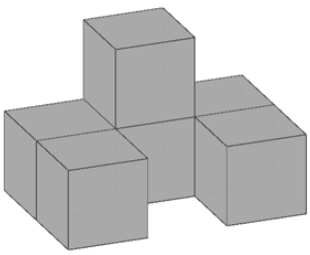
Vue de gauche

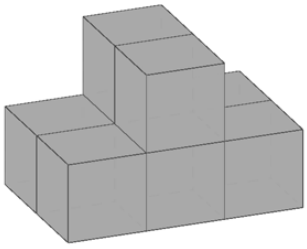


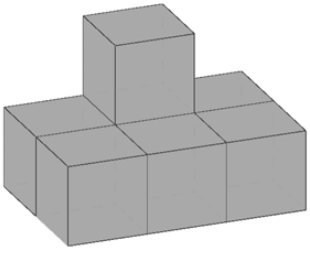
Vue de face

Vue de dessus

Un seul des trois solides représentés ci-dessous en perspective admet les trois vues précédentes. Préciser lequel.



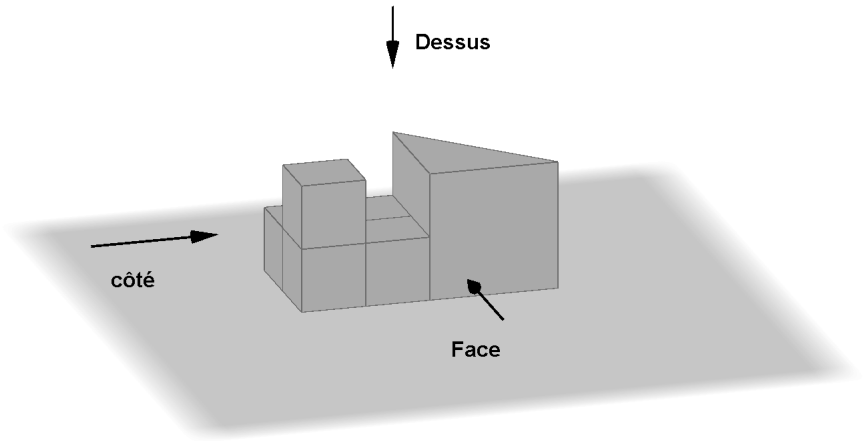




Énoncé 2

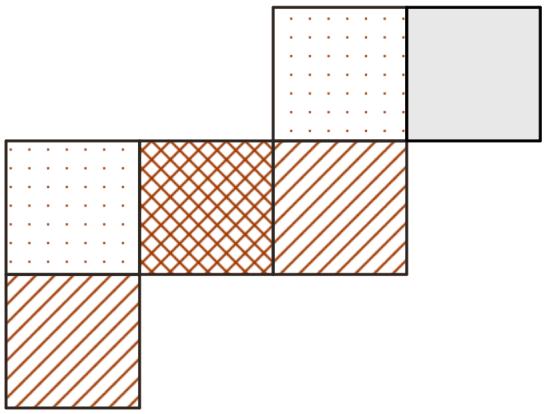
Un solide est représenté en perspective à l'aide d'un logiciel de géométrie. Ce solide est constitué de l'assemblage de cinq petits cubes identiques et d'un prisme droit dont la base est un triangle rectangle isocèle.

Construire une vue de face, une vue de côté et une vue de dessus de ce solide.

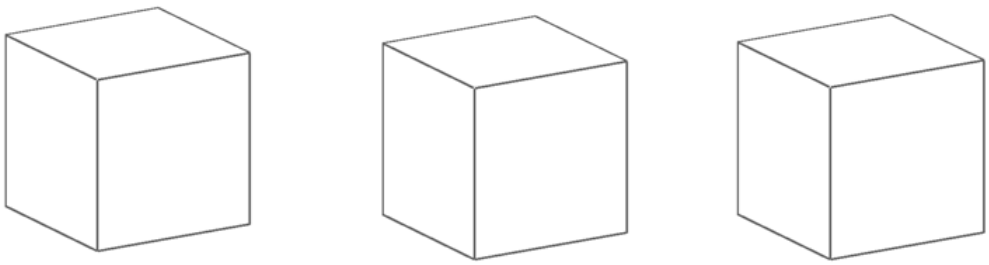


Énoncé 3

On donne ci-dessous le patron d'un cube avec divers motifs sur chacune des faces.



Sur les représentations en perspective ci-dessous, compléter les motifs sur chacune des faces visibles (on ne tiendra pas compte de l'orientation des hachures sur les faces) afin d'obtenir trois vues en perspective différentes du cube initial.

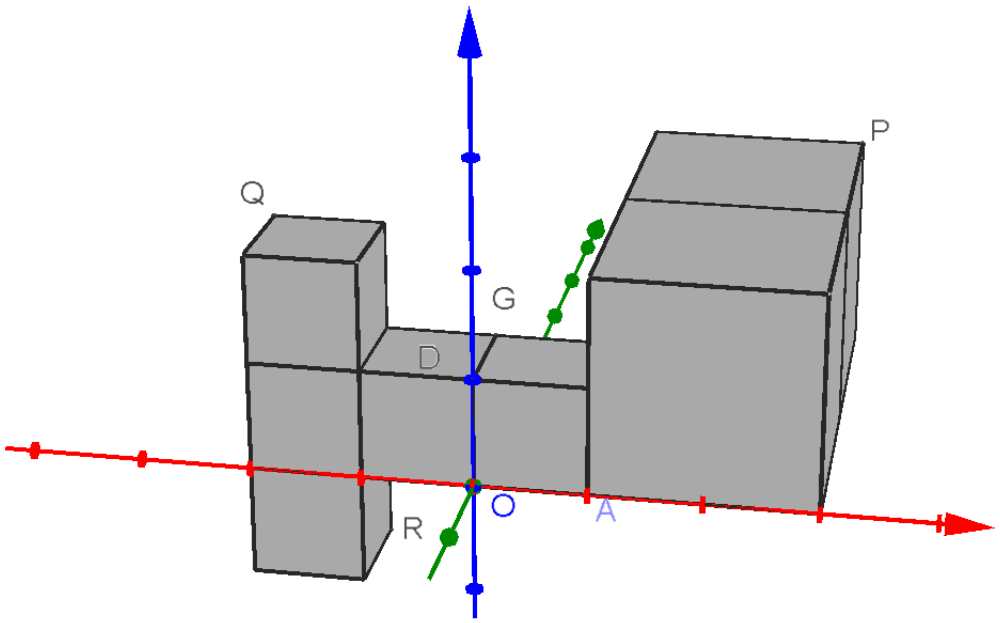


Énoncé 4

La figure ci-après représente un solide constitué de l'assemblage de cubes de côté 1 ou 2.

L'espace est repéré à l'aide d'un repère d'origine O (visible sur la figure) : dans ce repère, les points A, D et G sont les sommets d'un cube de côté 1 et ont pour coordonnées : A (1 ; 0 ; 0), D (0 ; 0 ; 1) et G (0 ; 1 ; 1).

Donner les coordonnées des sommets P, Q et R.



Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

Représenter l'espace

Un exemple de tâche avec prise d'initiative

Curieux parcours sur la Terre

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Représenter l'espace :
- se repérer sur une sphère ;
- latitude, longitude.

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer :
- utiliser la trigonométrie du triangle rectangle pour calculer des longueurs.

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, modéliser, raisonner, calculer.

Énoncé

On considère le parcours suivant, partant du point A de l'équateur ayant pour longitude 0 :
- on suit l'équateur vers l'Est sur 5000 km, jusqu'à un point B ;
- on suit vers le Nord le méridien passant par B sur 5000 km, jusqu'à un point C ;
- on suit vers l'Ouest le parallèle passant par C sur 5000 km, jusqu'à un point D ;
- on suit vers le Sud le méridien passant par D sur 5000 km, jusqu'à un point E.

Déterminer les coordonnées géographiques du point E, puis calculer la distance séparant les points A et E.

Pistes pédagogiques

La mise à disposition d'une mappemonde permet aux élèves de se repérer plus facilement et leur fournit un outil expérimental efficace.

Pour aider les élèves à calculer le rayon du parallèle passant par le point C, l'enseignant pourra les amener à réfléchir aux représentations spatiales les plus adaptées.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

Représenter l'espace

Un exemple de tâche avec prise d'initiative

La surface vitrée de la pyramide du Louvre

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Représenter l'espace :

- utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides et de situations spatiales.

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées :

- mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités.

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer :

- résoudre des problèmes de géométrie plane (utiliser le théorème de Pythagore).

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

Énoncé

La pyramide du Louvre à Paris est une pyramide régulière à base carrée de côté 35,42 m et de hauteur 21,64 m. Elle est recouverte d'un vitrage composé de losanges et triangles de verre de 21,52 mm d'épaisseur. La densité du verre utilisé est de 2400 kg/m^3.

Estimer, en tonnes, le poids de la surface vitrée de ce monument.

Pistes pédagogiques

Cette activité peut être développée dans le cadre d'un EPI en relation avec les disciplines artistiques.

La résolution, qui nécessite le calcul de la hauteur et de l'aire d'un triangle, mobilise le théorème de Pythagore. L'enseignant, pour aider les élèves en difficulté, veille à ce que les représentations spatiales choisies conduisent à l'utilisation de cet outil.

Une autre approche, plus ouverte, peut consister à fournir une photographie aérienne de la pyramide avec l'échelle, en laissant à la charge de l'élève le calcul de la longueur du côté de la base.

Une autre piste est la construction d'une maquette à l'échelle ou, plus simplement, la construction d'une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. Dans ce dernier cas, l'enseignant peut éviter l'utilisation du théorème de Pythagore afin de calculer la hauteur d'un triangle isocèle (représentant chaque face de la pyramide). Il doit néanmoins, pour construire la figure et placer les sommets de la pyramide faire appel aux coordonnées cartésiennes (abscisse, ordonnée et altitude) de ces points.

Dans une perspective de différenciation, on peut envisager la généralisation à une pyramide de hauteur h et se demander pour quelle valeur de h le poids du vitrage serait doublé.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

Représenter l'espace
Exemple de tâche avec prise d'initiative
Voyage sur un méridien

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Représenter l'espace :

- se repérer sur une sphère.

Résoudre des problèmes de proportionnalité :

- résoudre des problèmes de recherche de quatrième proportionnelle.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Modéliser, représenter, calculer.

Énoncé 1

Dunkerque (France) et Barcelone (Espagne) ont pratiquement la même longitude : 2,2°E
Sachant que la latitude de Dunkerque est de 51,034°N et que la latitude de Barcelone est de 41,38°N, calculer la distance séparant ces deux villes.

Enoncé 2

Un voyageur décolle de la ville d'Accra (Capitale du Ghana) à 12h00 (heure locale) à destination de Londres. L'avion volera à une vitesse moyenne de 800 km/h à une altitude moyenne de 5000 m. À quelle heure locale ce voyageur va-t-il atterrir ?

Indications géographiques : Accra et Londres ont toutes les deux une longitude égale à 0°, Accra a pour latitude 5,5°N et Londres a pour latitude 51,5°N.

Pistes pédagogiques

Une telle activité peut être développée dans le cadre d'un EPI en relation avec l'enseignement de la géographie.

L'introduction d'un tel problème pourra prendre appui sur une illustration figurant la position des villes concernées, ou sur un fichier réalisé à partir d'un logiciel de géométrie ou bien sur une animation vidéo.

La présentation de l'épopée des deux astronomes français (Jean-Baptiste Delambre et Pierre Méchain) qui ont réalisé la première mesure d'un méridien à partir de 1792 peut faire l'objet d'un approfondissement documentaire. L'enseignant peut s'appuyer sur la conclusion de cette activité pour proposer une mesure d'un arc de méridien toujours valable (1° d'arc de méridien représente approximativement une distance de 111,1 km).

Cela conduit également à motiver la mesure (plus délicate car faisant appel à l'utilisation d'un rapport trigonométrique dans un triangle rectangle) d'un arc de parallèle. En effet, à la différence d'un arc de méridien, la longueur d'un arc de parallèle de 1° que l'on peut visualiser sur une carte ou sur une mappemonde dépend de la latitude du lieu. Cette différence qu'il est facile de mettre visuellement en évidence sur une mappemonde peut être soulignée lors de la lecture des coordonnées géographiques sur une carte : on lit les valeurs en degré de la longitude et la latitude d'un point sur deux axes gradués différemment.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

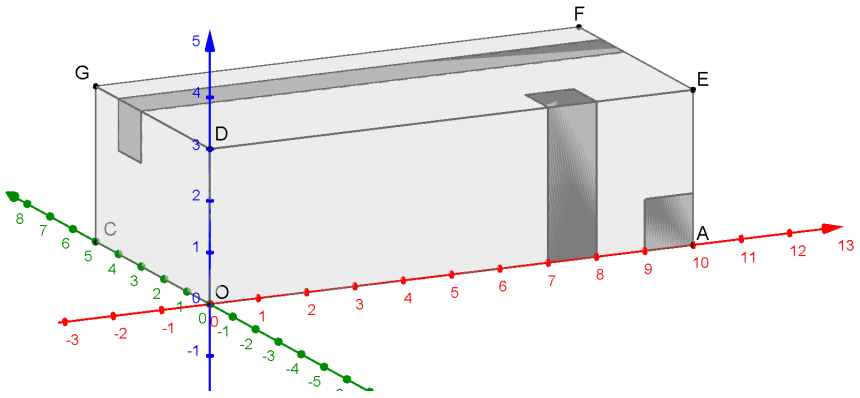
Représenter l'espace
Exemple de tâche intermédiaire
L'usinage d'une pièce de bois

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES
Représenter l'espace :
- se repérer dans un parallélépipède rectangle.
- utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES
Chercher, représenter.

Énoncé

La figure ci-dessous représente une pièce de bois qui est un parallélépipède rectangle de longueur 10, de largeur 5 et de hauteur 3.



L'espace est repéré à l'aide d'un repère d'origine O (visible sur la figure) : dans ce repère, les points A, C et D ont pour coordonnées : A (10 ; 0 ; 0), C (0 ; 5 ; 0) et D (0 ; 0 ; 3).

On crée un nouveau solide en retirant les trois parallélépipèdes rectangles dessinées sur la figure : les bases de ces parallélépipèdes sont des carrés de côté 1.

Représenter une vue de face, une vue de côté et une vue de dessus de ce nouveau solide.

Donner les coordonnées (abscisse, ordonnée, altitude) de tous les sommets visibles sur ces différentes vues de ce nouveau solide.

Pistes pédagogiques

La manipulation d'un parallélépipède rectangle et l'utilisation en classe d'une maquette représentant ce solide peuvent constituer une aide pour les élèves qui ne parviennent pas à se représenter un objet de l'espace à partir d'une figure du plan.

Dans le cadre de la différenciation, un prolongement peut consister à demander la surface latérale puis le volume de ce nouveau solide. On peut également faire représenter en perspective cavalière les chutes de bois avec leurs mesures.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Algorithmique et programmation

Algorithmique et programmation

SOMMAIRE

Introduction 2

- Objectifs de la formation 2
- Compétences développées 2
- Approches pédagogiques : élèments de réflexion 3
- Considérations didactiques : premiers éléments 6

Exemples de premieres séances avec les élèves 11

- Parcours d'un labyrinthe 11
- Programmation d'un dessin a l'écran 13

Quelques exemples d'activités 15

- Un jeu à trois personnages 15
- Un jeu de pong 16
- Un jeu avec des pièces 17
- Un jeu de tic-tac-toe 18

Annexe : présentation et installation de Scratch 19

- Installer Scratch 19
- Utiliser Scratch 19
- Les commandes de Scratch 20

Introduction

Comme l'indique le programme, l'enseignement de l'informatique au cycle 4 n'a pas pour objectif de former des élèves experts, ni de leur fournir une connaissance exhaustive d'un langage ou d'un logiciel particulier, mais de leur apporter des clés de décryptage d'un monde numérique en évolution constante. Cet enseignement permet d'acquérir des méthodes qui construisent la pensée algorithmique et développe des compétences dans la représentation de l'information et de son traitement, la résolution de problèmes, le contrôle des résultats. Il fournit également l'occasion de mettre en place des modalités d'enseignement fondées sur une pédagogie de projet, active et collaborative.

Le logiciel Scratch offre un environnement d'édition et d'exécution des programmes. Il s'agit d'un logiciel gratuit et disponible sur toutes les plates-formes usuelles, choisi pour sa simplicité, sa fiabilité et sa robustesse dans la mise en œuvre. Il permet de travailler tous les concepts figurant au programme, en particulier la programmation événementielle et la gestion de scripts s'exécutant en parallèle. L'annexe de ce document explique comment l'installer.

Objectifs de la formation

La lettre de saisine du Conseil supérieur des programmes datée du 19 décembre 2014 précisait les objectifs et démarches d'apprentissages : « L'enseignement de l'informatique et de l'algorithmique au cycle 4 n'a pas pour objectif de former des élèves experts, mais de leur apporter des clés de décryptage d'un monde numérique en évolution constante. Il permet d'acquérir des méthodes qui construisent la pensée algorithmique et développe des compétences dans la représentation de l'information et de son traitement, la résolution de problèmes, le contrôle des résultats. Il est également l'occasion de mettre en place des modalités d'enseignement fondées sur la pédagogie de projet, active et collaborative. [...] La maîtrise des langages informatique n'est pas la finalité de l'enseignement, mais leur pratique est le moyen d'acquérir d'autres démarches d'investigation, d'autres modes de résolution de problèmes, de simulation ou de modélisation. »

Compétences développées

Cet enseignement a pour objectif de développer chez les élèves les compétences suivantes :

- **décomposition** : analyser un problème compliqué, le découper en sous-problèmes, en sous-tâches ;
- **reconnaissance de schémas** : reconnaître des schémas, des configurations, des invariants, des répétitions, mettre en évidence des interactions ;
- **généralisation et abstraction** : repérer les enchaînements logiques et les traduire en instructions conditionnelles, traduire les schémas récurrents en boucles, concevoir des méthodes liées à des objets qui traduisent le comportement attendu ;
- **conception d'algorithme** : écrire des solutions modulaires à un problème donné, réutiliser des algorithmes déjà programmés, programmer des instructions déclenchées par des événements, concevoir des algorithmes se déroulant en parallèle.

Les modalités de l'apprentissage correspondant peuvent être variées : travail en mode débranché, c'est-à-dire sans utilisation d'un dispositif informatique, individuel ou en groupe, en salle informatique ou en salle banale, sur tablette ou sur ordinateur.

L'apprentissage associe trois types essentiels de démarche :

- une démarche de **projet** active et collaborative qui suppose l'établissement d'objectifs partagés et la répartition des tâches, la communication entre élèves contributeurs d'un même projet et qui permet l'intervention de plusieurs disciplines ;
- une démarche de **création** : l'enseignement permet la réalisation de productions collectives

Retrouvez Éduscol sur

(programmes, applications, animations, etc.), au cours desquelles les élèves développent leur autonomie, leur créativité et leur imagination, mais aussi le sens du travail collaboratif ;

- une démarche **interdisciplinaire** qui favorise la mise en œuvre de diverses activités de création numérique, en particulier dans le cadre des enseignements complémentaires.

L'apprentissage de la programmation en Scratch peut se développer sur les trois années du cycle suivant une progression liée à des concepts de programmation plutôt qu'à des éléments de syntaxe du langage :

- la programmation **événementielle** : conception de séquences d'instructions déclenchées par un événement (appui de touche, son reçu par le microphone, motif « touché » par un personnage, etc.) ;
- l'initiation à la programmation **parallèle** : déclenchement par le même événement de deux ou plusieurs séquences d'instructions ;
- le professeur pourra envisager une initiation de ses élèves à certains concepts simples de la **programmation-objet** par la programmation des « lutins » de Scratch, c'est-à-dire les objets tels que les différents personnages, en particulier pour la scénarisation d'une activité, comme il est expliqué plus bas dans « Déroulement de l'exécution d'un programme », mais aussi tout simplement en associant des scripts distincts aux différents lutins d'une même activité, comme il est expliqué plus loin par exemple dans le jeu de Pong.

Le thème « algorithmique et programmation » du programme de mathématiques du cycle 4

Le programme définit comme attendu de fin de cycle : *« Écrire, mettre au point et exécuter un programme simple. »* Il met l'accent sur l'analyse d'un problème en vue de concevoir un algorithme, mais aussi sur la phase de programmation effective, indissociable d'une étape de mise au point. Cependant, il ne faut pas nécessairement insister sur une chronologie précise, ces trois phases avançant souvent en parallèle : la mise au point comprend la phase d'essais-erreurs où l'élève construit petit à petit un programme qui répond au problème qu'il s'est posé. De même, au moment de la programmation effective l'élève peut se retrouver confronté à une question algorithmique qu'il n'avait pas prise en compte dès le départ.

L'attendu de fin de cycle évoquant un programme **simple**, il n'est pas question de formaliser d'aucune manière la distinction algorithme/programme. En particulier, il ne s'agit pas de définir un langage de description d'algorithme (ni pseudo-langage ni organigramme) même si son utilisation peut être envisagée, ponctuellement, mais sans souci de normalisation.

En revanche, il ne faut pas négliger la phase de mise au point : le professeur peut évoquer, si la situation s'y prête, l'utilisation d'un jeu de test. Les élèves sont amenés à comparer leurs solutions algorithmiques et leurs programmes, ce qui les conduit à une première approche, informelle, de la documentation d'un programme (commentaires et spécification[1]). Le partage de programmes entre classes ou entre collèges donne l'occasion de réutiliser en tout ou en partie les programmes écrits par d'autres, illustre la notion de réseau et introduit les questions liées à son usage, qui peuvent utilement être développées en lien avec le professeur-documentaliste.

Approches pédagogiques : éléments de réflexion

La mise en activité des élèves

Une séance d'apprentissage de l'algorithmique et de la programmation ne saurait se dérouler sous forme d'un cours descendant, magistral, où les élèves resteraient passifs. Ainsi, il serait par exemple inefficace de demander à des élèves de reproduire durant un tiers de la séance un programme que le professeur aurait expliqué au tableau durant les deux premiers tiers.

Si chaque séance doit viser des **objectifs de formation clairs et explicites**, par exemple découvrir

1. Spécifier un programme, ou un bloc de programme, c'est décrire avec précision les données attendues, les hypothèses éventuelles sur ces données, et l'action que réalise ce programme sur un tel jeu de données.

l'utilisation des variables, il convient de réserver l'essentiel du temps à une **activité autonome des élèves**.
Une séance peut commencer par quelques minutes où le professeur expose une situation-problème qui introduit la notion visée : par exemple, il propose de reprendre un jeu réalisé dans une séance précédente, en introduisant un score. Il montre comment créer une variable score[2], et comment l'incrémenter. Puis il laisse les élèves modifier leur programme, et peut proposer des défis pour aller plus loin, comme l'introduction de niveaux de difficulté, liés à la réalisation d'un score attestant chaque niveau. La séance peut se terminer par la récapitulation des instructions permettant d'utiliser les variables, éventuellement sous forme d'une fiche.

La pédagogie de projet

L'enseignement de l'algorithmique et de la programmation se prête particulièrement à la pédagogie de projet. L'objectif est de permettre à chaque élève de construire des connaissances et des compétences tout en développant son imagination et sa créativité dans le cadre d'un projet suivi sur quelques séances. Comme l'indique le programme, cet enseignement doit se traduire par la réalisation de productions collectives dans le cadre d'activités de création numérique, au cours de laquelle les élèves développent leur autonomie, mais aussi le sens du travail collaboratif. Pour autant, il ne s'agit bien sûr pas de monter des projets de trop grande envergure, qui se dérouleraient sur une année entière.

Une approche possible est la suivante : au cours d'une première séance, comme il est indiqué dans le paragraphe *« La mise en activité des élèves »*, le professeur propose une activité, dont il a fixé clairement les objectifs de formation et les concepts nouveaux qui devront être installés. Une deuxième séance peut permettre à chaque élève de développer son programme dans les directions qu'il aura lui-même choisies : la séance permet au professeur d'outiller l'élève selon ses besoins pour faire aboutir son projet. Il peut aussi aider l'élève à le redéfinir si la piste sur laquelle il s'est engagé est inadaptée. Une dernière séance peut permettre la finalisation des projets. Le professeur peut aussi proposer une mise en commun des concepts et des techniques utilisés par les uns et les autres.

Une mise en ligne de certains projets, sans distinction de niveau d'expertise, peut être envisagée afin de mettre en valeur les travaux des élèves. On peut également valoriser ces travaux par des ateliers-jeux, des expositions…

Mettre en œuvre la différenciation pédagogique

Les programmes du cycle 4 sont des programmes de cycle, et non pas des programmes annuels. L'organisation du cycle et la conception des enseignements ont pour objectif d'opérationnaliser l'acquisition par chacun des élèves des attendus du socle commun de connaissances, de compétences et de culture : il s'agit d'amener chaque élève à la meilleure maîtrise possible de tous ces attendus, dans le cadre d'un parcours de formation qui prend en compte ses acquis et ses marges de progression.

La différenciation pédagogique permet de réaliser cet objectif et ne saurait se réduire à de la remédiation pour les élèves qui ont plus de besoins. Il s'agit d'accompagner chaque élève, en permettant aux meilleurs de construire des méthodes expertes dans la résolution d'un problème algorithmique, de développer des projets personnels ambitieux, d'assimiler des concepts de programmation riches. Il s'agit en même temps de conduire les élèves les plus en difficulté à une maîtrise suffisante des attendus du programme pour valider l'acquisition du socle commun de connaissances, de compétences et de culture.

C'est ainsi qu'une séance peut comporter un « défi » permettant aux élèves qui auraient rapidement réalisé l'objectif commun de poursuivre en autonomie leur travail, pendant que le professeur se rend disponible auprès d'autres élèves.

2. Il suffit pour cela de cliquer sur le bouton « Créer une variable » dans la catégorie Données.

Par exemple, dans le cadre du *« Parcours d'un labyrinthe »* de la partie *« Exemples de premières séances avec les élèves »*, l'objectif commun peut être dépassé par certains élèves qui peuvent utiliser un bloc de répétition, ou analyser le fonctionnement des scripts cachés par le professeur, comme le bloc-utilisateur « départ ». On propose d'autres stratégies de différenciation pédagogique dans d'autres exemples de ce document.
De même, comme on l'a dit au paragraphe « La pédagogie de projet », le professeur guide l'élève dans la définition de son projet, en respectant ses choix, mais en les adaptant si besoin au degré de maîtrise effectivement atteint, que ce soit pour l'enrichir ou en réduire les objectifs.

La boucle essai-erreur en informatique

L'apprentissage de l'algorithmique et de la programmation bénéficie d'une boucle essai-erreur qui est très courte : en cliquant sur un bloc ou un script on peut observer immédiatement l'effet sur les lutins, les tracés du stylo… D'autre part, aucun jugement de valeur n'est porté sur l'élève ou ses performances, la machine se contente d'effectuer les commandes et c'est l'élève lui-même qui constate s'il s'est trompé ou pas, et qui est invité à essayer une autre solution en cas d'échec. De plus, l'obtention d'une solution ne signifie pas la fin du processus de création, qui peut se poursuivre, pour en améliorer la qualité ou la performance.

Pour le professeur, cela signifie qu'il accepte pour ses élèves la nécessité de phases de tâtonnement et d'essais-erreurs, durant lesquelles il intervient le moins possible. En particulier, il est recommandé de résister à l'envie de taper sur le clavier ou de manipuler la souris à la place de l'élève, et de se contenter de répondre oralement aux questions de l'élève, de lui rappeler éventuellement tel ou tel script déjà écrit qui pourrait l'inspirer ou encore de lui suggérer de nouvelles pistes pour résoudre la difficulté qu'il rencontre, mais sans intervenir directement sur la machine de l'élève.

La préparation d'une séance

Nous proposons ci-après quelques exemples de séquences. Il convient, comme on l'a déjà dit, de définir par avance les objectifs de formation correspondants et de prévoir une chronologie en trois phases : très courte introduction de présentation d'un concept ou d'un problème, activité autonome des élèves comportant éventuellement des défis ou d'autres éléments de différenciation, et, le cas échéant, phase finale d'institutionnalisation des nouveaux concepts, de mise au propre et par écrit des notions rencontrées.

Pour favoriser le travail autonome des élèves, il est possible de préparer la séance en proposant aux élèves, via le réseau ou une clé USB, une « trame » de programme, qu'ils seront amenés à compléter. Cette trame doit être limitée à ce que les élèves n'auraient pas le temps de préparer, ou aux objets qu'ils ne sont pas encore en mesure de programmer eux-mêmes.
Il serait par exemple malavisé de faire travailler les élèves durant toute une séance à la création d'un arrière-plan : le professeur peut demander que ce travail soit effectué à la maison, ou proposer un arrière-plan qu'il met à disposition des élèves en début de séance[3].

On verra plus loin tout l'intérêt qu'il peut y avoir que les élèves disposent d'un bloc utilisateur « reset », créé par le professeur, qui permette de réinitialiser systématiquement la configuration avant un travail sur le déplacement et les tracés dont on prévoit qu'il nécessitera de nombreuses tentatives avant d'aboutir.

En revanche, il n'est pas souhaitable de systématiquement proposer aux élèves un programme incomplet qu'ils seraient chargés de compléter, d'améliorer ou de corriger. En effet, la phase de mise au point qui accompagne toujours l'écriture d'un programme développe précisément ces

3. Les observations déjà conduites en école et au collège montrent que les élèves s'amusent volontiers à dessiner leurs lutins, les arrière-plans, ou à jouer avec les différents sons. Mais le risque est de limiter une séance à ces seules activités, sans plus aucun objectif de formation. En revanche, il peut être intéressant de travailler avec un professeur d'arts plastiques sur la création d'arrière-plans, avec un professeur d'histoire sur la création d'un lutin figurant un personnage historique, etc.

compétences, et il ne faut pas perdre de vue l'objectif d'autonomie des élèves. Ceux-ci doivent être amenés, le plus souvent possible, à écrire eux-mêmes leurs propres programmes en développant leur inventivité, leur imagination et leur créativité.

Considérations didactiques : premiers éléments

Le lecteur est invité à installer Scratch sur sa machine personnelle[4], et à tester au fur et à mesure de sa lecture les activités proposées.

Le vocabulaire de scratch

Comme en mathématiques, le travail sur la compétence Communiquer, sur la construction d'une expression écrite et orale précise est un objectif de formation important.
Il convient donc de s'accorder sur un vocabulaire précis. Dans l'environnement Scratch, on évoquera en particulier les points suivants.

- les lutins sont les objets manipulés par Scratch. Par défaut, il s'agit du chat, mais on peut utiliser plusieurs lutins, qui peuvent interagir en échangeant des messages, en détectant des collisions, etc. Chaque lutin a ses propres scripts. Tout lutin est muni d'un stylo, inactif (car relevé en position haute) par défaut, qui se déplace avec le lutin et qui, s'il est en position d'écriture, laisse une trace lors de ses déplacements.
- Un lutin peut porter différents costumes, ce qui permet par exemple d'animer les déplacements d'un lutin ou encore de prévoir un dé avec 6 costumes, un par face.
- On pourra par exemple consulter le tutoriel « Comment simuler un lancer de dés dans mon projet Scratch ? » du site MagicMakers ;
- les *blocs ovales* représentent des expressions, c'est-à-dire des valeurs, sur lesquelles on peut effectuer des calculs ;

- les *blocs pointus* représentent également des expressions, mais à valeurs booléennes, c'est-à-dire vrai ou faux, et sont utilisés pour réaliser des expressions conditionnelles, ou des tests ;

4. Il peut pour cela s'aider de l'annexe qui figure à la fin de ce document.

- les *blocs aimantés* représentent des instructions : en les accolant les uns aux autres on construit des blocs de script, souvent initiés par un bloc chapeau associé à un événement. À chaque lutin peuvent être associés différents scripts. C'est le principe de construction des programmes en Scratch ;

- les scripts sont construits en accolant des blocs aimantés. Chaque lutin peut être muni de plusieurs scripts.

La notion de variable

La notion de variable en informatique diffère de la notion mathématique.

En mathématiques, la variable apparaît dans des formules comme celle du périmètre du cercle $2\pi R$ ou dans l'expression symbolique des fonctions, comme dans $y = f(x)$. On distingue : les indéterminées, comme dans une identité remarquable $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, qui indique que l'égalité est vraie pour toutes les valeurs données à a et à b ; les inconnues, comme dans l'équation $2x+3 = 4x-7$, où cette fois il s'agit de déterminer pour quelles valeurs de la variable x l'égalité est vraie ; les paramètres, qui conservent une valeur fixe, mais de portée générale, comme a qui désigne le coefficient de la fonction linéaire $x \mapsto ax$.

Dans de nombreux langages informatiques, on est amené à écrire des instructions comme $x \leftarrow x+1$, souvent même sous la forme $x = x+1$, qui sont d'une nature totalement différente : il ne s'agit pas là d'une égalité, ni d'une équation, mais **d'une instruction d'affectation**, qui va modifier le contenu de la variable x et qui devrait être lue « x reçoit la valeur $x+1$ », et surtout pas « x égale $x+1$ ».

Il existe une façon à la fois claire et rigoureuse de présenter les variables informatiques.
On dira qu'une variable x est une **étiquette** collée sur une **boîte** qui peut **contenir** différentes valeurs. Il est important de faire comprendre que le contenu de chaque boîte varie au cours de l'exécution d'un programme, ce qui n'est pas le cas de la variable mathématique (la variable x pour une fonction ne varie pas au cours du calcul, ou encore la lettre x associée à une grandeur dans un problème reste attachée à cette grandeur pendant les calculs, cf la ressource thématique *Comprendre et utiliser la notion de fonction*).

Quand l'ordinateur évalue une expression dans laquelle figure une variable, comme

l'expression x + 4, le résultat de l'évaluation est la somme du nombre contenu dans la boîte étiquetée par x et de 4.

Une **instruction d'affectation** comme y = x + 4 signifie donc :

- évaluer l'expression x + 4, en ajoutant 4 à la valeur contenue dans la boîte étiquetée par x ;
- jeter le contenu de la boîte étiquetée par y, et le remplacer par la valeur calculée à l'étape précédente.

L'instruction x = x + 1 s'explique alors exactement de la même façon.

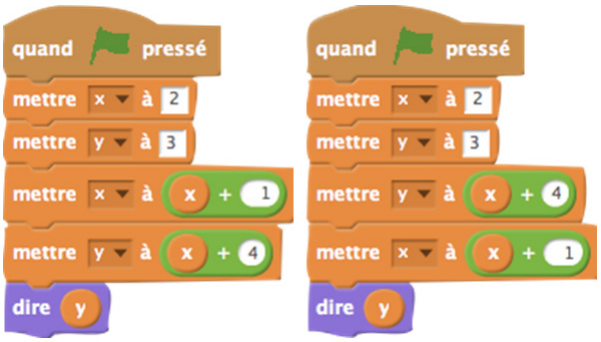
En Scratch, le risque de confusion est moindre puisqu'on dispose de blocs ovales comme

pour les expressions, et l'instruction d'affectation est le bloc aimanté ci-dessous, qui ne ressemble en rien à une équation mathématique, ni à une égalité[5].

Pour autant, il est important d'expliquer correctement la notion de variable, en illustrant le propos par exemple avec des boîtes dessinées au tableau. On fait évoluer le contenu en simulant l'exécution d'un programme. On fait ainsi explicitement la différence avec l'utilisation des variables en mathématiques.

Déroulement de l'exécution d'un programme

Quand on accole différents blocs aimantés, leur ordre est tout à fait essentiel. Ainsi, si l'on s'intéresse aux deux scripts suivants, en s'appuyant sur l'interprétation des variables que nous venons de développer, on observe des effets totalement différents :



Le script de gauche fera dire « 7 » au chat, le script de droite lui fera dire « 6 ». Pour expliquer le fonctionnement d'un programme, il est donc nécessaire de parler d'états ou de configurations successifs, la description d'une configuration précisant en particulier les étiquettes et les contenus de chaque boîte de mémoire. Ainsi est introduite une notion de temporalité, par la suite des états (ou configurations) successifs.

Il n'est évidemment pas question, au niveau du collège, d'entrer dans des détails trop précis sur le temps d'exécution de tel ou tel bloc, de tel ou tel script. Néanmoins, la notion d'états (ou configurations) successifs peut être introduite, pour expliquer le comportement d'un programme.

Si les deux scripts ci-dessus sont exécutés en même temps, que se passe-t-il ? On introduit ici la notion de parallélisme, c'est-à-dire d'exécution simultanée de deux scripts différents. Le terme *« parallélisme »* n'est d'ailleurs pas une connaissance attendue des élèves, c'est l'utilisation de

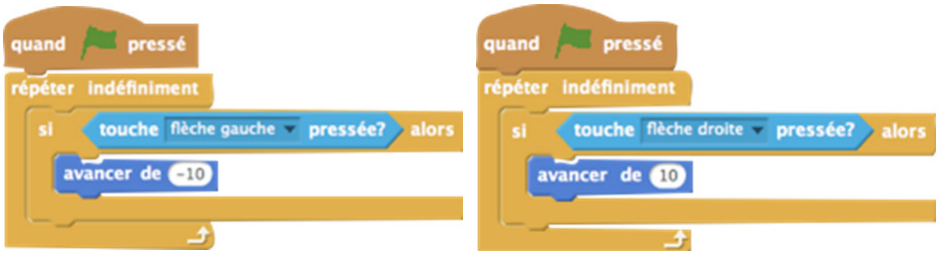
5. Il est sans doute préférable de ne pas recourir au bloc aimanté « ajouter à y 1 » dont la traduction n'est pas heureuse (« ajouter 1 à y » aurait assurément été plus clair).

scripts parallèles qui figure seule parmi les objectifs de formation. Bien sûr, tout développement théorique sur le parallélisme est à proscrire.

En l'occurrence, le résultat est assez imprévisible, car les deux scripts devraient se dérouler à peu près à la même vitesse, et on ne peut deviner ce qu'annoncera le chat…

Il est sans doute préférable de n'évoquer le parallélisme que dans des situations où les différents scripts amenés à se dérouler en parallèle sont déclenchés par des événements différents.

Par exemple :



On pourrait bien sûr n'écrire qu'un script, la boucle « répéter indéfiniment » comprenant les deux conditionnelles de façon consécutive : ce serait cependant un peu cacher le fonctionnement de l'algorithme, en compliquer la lecture et la compréhension. C'est ainsi un exemple typique d'utilisation pertinente de la notion de parallélisme.

Une activité prévoyant un scénario particulier, par exemple un dialogue entre plusieurs personnages, posera la question des « rendez-vous » : le personnage A commence, puis passe la main au personnage B qui réalise d'autres actions. Ceci peut être programmé à l'aide d'un message envoyé par A à B, qui lui indique que c'est à son tour d'agir ; pour ce faire, Scratch, dans la catégorie « Événements » propose deux blocs

et

. Cette utilisation, très modeste, de la programmation-objet permet un travail intéressant de scénarisation d'une activité.

Les déplacements et les dessins au stylo

Les lutins de Scratch sont tous munis d'un stylo[6]. Le stylo se déplace avec le lutin, mais il faut le mettre en position d'écriture pour que le tracé s'effectue lors des déplacements du lutin, ou le relever en position haute pour déplacer le lutin sans rien dessiner.

Il y a deux façons de se déplacer :

- en déplacement relatif. Les commandes

et

,

déplacent le lutin dans la direction qu'il regarde, depuis la position courante, ou le font tourner, par rapport à la direction courante ;
- en déplacement absolu. Les commandes

et

indiquent la nouvelle position ou la nouvelle direction du lutin.

Il est utile de faire le lien entre ces commandes et les notions mathématiques correspondantes, mais on peut également rapprocher la différence relatif/absolu des modes d'adressage d'une cellule dans un tableur.

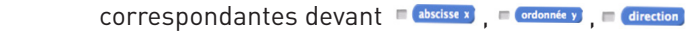
Les mouvements relatifs correspondent bien à des instructions de déplacement données à un être humain : elles peuvent être simulées physiquement, par exemple sur un quadrillage dessiné dans la cour du collège.

6. La position précise du stylo par rapport au lutin est au centre de celui-ci : en éditant le costume et en cliquant sur l'icône en forme de croix tout en haut à droite, on voit apparaître avec précision cet emplacement sur le dessin du lutin.

Il est sans doute utile, dans les premiers temps, de laisser apparent le lutin associé au stylo afin de comprendre la notion de direction courante : c'est la direction du regard du chat. Plus tard, on pourra cacher le lutin avant de dessiner.

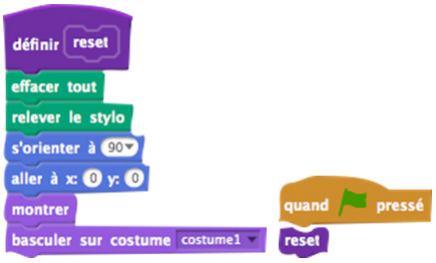
Les mouvements absolus permettent de travailler plus directement les notions de géométrie du programme.

Il convient de préciser les conventions de repérage de Scratch : l'origine est au centre de l'écran de travail, ses bords gauche et droit sont d'abscisses -240 et +240, les bords bas et haut d'ordonnées -180 et +180. Les angles sont mesurés dans le sens des aiguilles d'une montre, la direction 0° visant le haut de l'écran, la direction 90° la droite, etc.

On peut faire afficher les coordonnées absolues d'un lutin en cochant les cases correspondantes devant 

(dans la catégorie « Mouvement »).
A contrario, les coordonnées affichées sous le coin droit de la zone de dessin sont celles de la souris…

Une difficulté se rencontre fréquemment lors de la mise au point d'un programme de dessin : quand on clique sur le drapeau vert pour lancer un script, aucune initialisation particulière n'est effectuée par Scratch[7], qui reprend le lutin dans l'état courant (position et direction). Ce peut être une bonne pratique que le professeur crée un nouveau bloc-utilisateur « reset » que les élèves pourront systématiquement insérer en tête de leurs scripts, même sans entrer dans les détails de la conception d'un tel bloc lors de ses premières utilisations.



Blocs crées par les utilisateurs

La création d'un bloc-utilisateur permet d'aborder la notion de typage des arguments, puisque Scratch autorise des blocs à plusieurs arguments, chacun d'entre eux étant d'un type bien défini, à choisir parmi nombre, chaîne de caractères ou booléen. Une attention particulière sera portée au nommage d'un bloc-utilisateur et de ses arguments, Scratch permettant d'introduire du texte entre plusieurs arguments. Par exemple, on pourra choisir comme entête d'un bloc-utilisateur :

La création d'un bloc-utilisateur peut être envisagée dans le cas de la réutilisation fréquente d'un script. Elle permet donc également d'aborder les notions de réutilisation du code, de partage de programme et de spécification : pour partager un programme, il est important de le documenter. Cela passe par un nommage pertinent et parlant et le typage explicite des arguments, comme on l'a déjà dit, mais aussi par la description (en français) de l'action réalisée par le bloc-utilisateur et la déclaration des hypothèses qu'on fait éventuellement sur les arguments. Là encore, l'objectif n'est pas de formaliser des protocoles de documentation,

7. Il y a une exception : le chronomètre est remis à zéro à chaque clic sur le drapeau.

mais de sensibiliser à son importance, à l'occasion d'un partage effectif de « morceaux de code » entre élèves.

Malheureusement, Scratch n'offre pas la possibilité d'écrire des fonctions, c'est-à-dire des blocs-utilisateurs qui renvoient un résultat. Les blocs-utilisateurs de Scratch opèrent par « effet de bord », c'est-à-dire en modifiant l'état de la mémoire, les objets ou la fenêtre de tracé : on peut modifier la valeur d'une variable, déplacer les lutins ou les faire changer de costume, dessiner à l'écran, etc. Mais on ne peut renvoyer un résultat, par exemple numérique, qui serait réutilisé dans une expression. Dans la philosophie de Scratch, on a créé un nouveau bloc, à l'image des blocs usuels, qu'on peut empiler dans un script complexe, mais dont le contour comporte les encoches aimantées habituelles, ce qui montre bien qu'il ne peut s'agir d'une expression.

Exemples de premieres séances avec les élèves

Parcours d'un labyrinthe

Le lecteur est invité à ouvrir et expérimenter à partir du document joint PremierLabyrinthe.sb2 en parallèle de sa lecture.

Cet exemple de première séance a comme objectif principal la prise en main par les élèves du logiciel.

Il s'agit :
- de commencer à utiliser le vocabulaire de Scratch pour savoir nommer les objets de l'interface ;
- de comprendre le fonctionnement des blocs, leur « aimantation », leur duplication par un clic droit dans la fenêtre de script ;
- de savoir exécuter et mettre au point un script, de déclencher son exécution par un clic sur le drapeau vert ;
- d'enregistrer son programme.

On ne cherche surtout pas ici à découvrir l'intégralité des commandes disponibles !

On peut par exemple proposer d'ouvrir un fichier préparé par le professeur, avec un arrière-plan déjà dessiné, un bloc utilisateur « départ », un script détectant le succès.

L'arrière-plan peut être celui-ci[8] :
Le bloc « départ » permet de positionner le « chat » à sa bonne place et à la bonne taille.
Le défi proposé aux élèves est de combiner des déplacements (« avancer de » et « tourner ») pour amener le chat à la cible jaune.

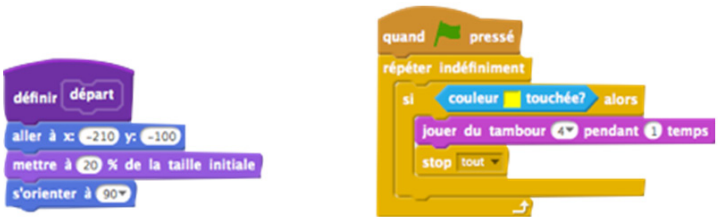
8. Spécifier un programme, ou un bloc de programme, c'est décrire avec précision les données attendues, les hypothèses éventuelles sur ces données, et l'action que réalise ce programme sur un tel jeu de données.

On peut présenter dans la fenêtre de script le squelette du script visé : déclenchement par le drapeau vert, utilisation du bloc départ, et les trois blocs aimantés qu'il faut dupliquer et « attacher » pour obtenir le script final.

En ayant déjà placé un bloc « avancer de 100 », l'élève peut tester que le chat arrive au bout du premier trajet horizontal, ce qui lui donne une première idée de l'échelle en pixels.

Il est d'ailleurs possible de proposer à l'élève, pour l'aider, d'afficher les coordonnées du chat en cochant les cases devant abscisse x et ordonnée y de la catégorie « Mouvement ».

Le professeur a préparé ces éléments de script, qu'il n'est pas nécessaire de présenter aux élèves lors d'une première séance :



Aux élèves qui réussiraient très vite à terminer l'exercice, on peut expliquer le fonctionnement de ces deux blocs. Une autre idée consiste à simplifier leur script à l'aide d'un bloc de répétition :

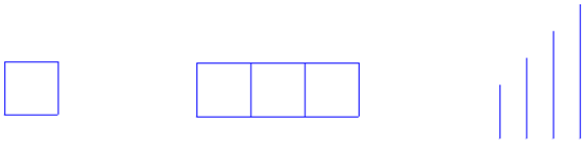
Cette façon de procéder, donner un même objectif à tous et proposer selon l'avancement de chacun des compléments de recherche, peut être utilisée régulièrement, tout au long du cycle.

Programmation d'un dessin a l'écran

Le lecteur est invité à ouvrir et expérimenter à partir du document joint PremierDessins.sb2 en parallèle de sa lecture.

Il s'agit là aussi d'une activité qui peut être menée dès le début du cycle, et qui a pour objectifs de faire découvrir les commandes de déplacement et de tracé.

On demande de réaliser des tracés très simples, comme, par exemple :

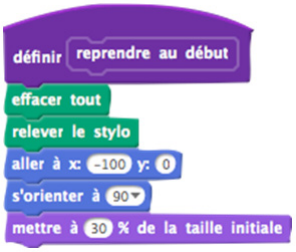


Comme il est indiqué dans le paragraphe « Les déplacements et les dessins au stylo », on peut commencer par une activité débranchée, où les élèves peuvent se répartir par paire : un élève écrit, à la main, un jeu d'instructions avancer, tourner, relever le stylo ou le descendre en position d'écriture, l'autre exécute en respectant scrupuleusement le « programme » de son camarade. On échange les rôles pour d'autres dessins.

On passe ensuite à la programmation en Scratch, le professeur montre rapidement quels sont les quelques blocs aimantés à utiliser (trois pour les mouvements, deux pour le stylo, et le bloc effacer tout), et propose de reprendre les tracés précédents, et éventuellement de nouvelles figures simples.

Il n'est pas ici besoin de travailler longuement sur les unités : on peut par exemple proposer que 1 carreau = 50 pixels, sans préciser une taille en millimètres. De même, l'objectif n'est pas que les élèves utilisent nécessairement un bloc de répétition avant qu'ils en ressentent eux-mêmes l'utilité : la différenciation pédagogique joue ici pleinement son rôle, et le professeur propose ces blocs aux seuls élèves qui en font la demande, et ne procède à leur institutionnalisation que dans une séance ultérieure.

Le professeur peut avoir préparé un bloc utilisateur « reprendre au début », pour effacer l'écran, positionner le lutin à un endroit de départ précis, dans une orientation précise.

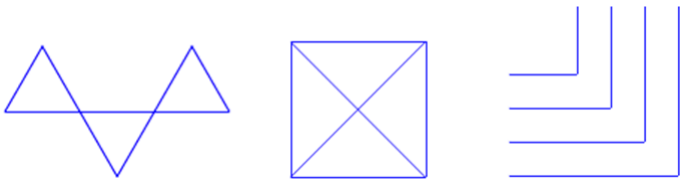


Afin d'aider les élèves à gérer les rotations, il est probablement préférable dans un premier temps de laisser le chat apparent, la direction de son regard pouvant aider à la mise au point des programmes.

Chacune des figures proposées ci-dessus peut être obtenue de nombreuses façons différentes. Par exemple, pour la troisième, on pourra simplement utiliser le script ci-dessous.

Des élèves peuvent chercher à utiliser des répétitions pour simplifier leur script, se confrontant à une difficulté : la taille variable des 4 bâtons à dessiner.

On peut dans une séance suivante, introduire la notion de variable et proposer ainsi de reprendre la figure des 4 bâtons, et en proposer d'autres, comme les suivantes : là encore, chaque élève doit pouvoir avancer à son rythme, et ne devrait pas être contraint à utiliser trop tôt des procédures expertes avant d'avoir maîtrisé les commandes élémentaires de mouvement et de tracé.



Il ne faut pas exclure que des élèves souhaitent eux-mêmes expérimenter sur des figures qu'ils auront choisies sans l'intervention du professeur. On veillera toutefois à éviter deux écueils : le choix de figures trop complexes, et une situation où un élève s'amuserait à jouer avec la couleur, l'épaisseur du trait, ou d'autres détails « cosmétiques » alors que l'objectif est de mettre en place des éléments de programmation et des compétences de repérage dans le plan[9].

Quelques exemples d'activités

Ces exemples d'activités ne prétendent pas recouvrir exhaustivement le programme.
Ils ne sont en rien prescriptifs, mais fournissent simplement des pistes de travail qui pourront inspirer les professeurs.

Un jeu à trois personnages

Le lecteur est invité à ouvrir et expérimenter à partir du document joint PoissonsChatChiens.sb2 en parallèle de sa lecture.

Cette activité se prête facilement à un découpage, en ajoutant au fur et à mesure un personnage et des interactions, ce qui permet une pédagogie différenciée.

Elle permet de revoir la gestion des déplacements et introduit l'utilisation conjointe de plusieurs personnages, ainsi que leur interaction. On rencontre également naturellement la notion de variable, et l'utilisation du chronomètre intégré à Scratch.

On peut commencer avec le seul lutin habituel (le chat). On demande d'abord aux élèves de gérer son déplacement à l'aide des quatre flèches du clavier, ce qui relève de la programmation événementielle.

On ajoute un nouveau lutin, un chien, qui doit effecteur indéfiniment des allers-retours du bord gauche au bord droit de l'écran, ce qui est facilement réalisé à l'aide d'une répétition infinie et des blocs et . Un défi supplémentaire, pour les élèves les plus à l'aise, consiste à demander de programmer un parcours aléatoire du chien. Pour l'intérêt du jeu, il convient de prévoir un déplacement pas trop rapide.

On souhaite alors que chaque lutin réagisse au moment où il rencontre l'autre : le chien pourra simplement dire bonjour et le chat exprimer sa frayeur. La « rencontre » est détectée par le capteur et il faudra la tester au sein d'une répétition infinie. Il est probable que la nécessité de cette boucle n'apparaisse pas immédiatement aux élèves et que certains se contentent d'effectuer le test une seule fois. Il peut être intéressant de comparer la gestion directe d'un événement comme l'appui d'une touche avec celle du contact détecté par la valeur d'un capteur. La distinction entre les scripts de chaque lutin est également un élément qui mérite d'être souligné.

On peut d'ores et déjà ajouter une variable globale qui permet de gérer un score, chaque rencontre du chat et du chien faisant baisser le score.

On propose alors d'ajouter un troisième personnage, un poisson. Il s'agit de programmer un déplacement aléatoire dans le plan de ce lutin.

Une fois cette étape franchie, on gère l'interaction chat-poisson : à chaque contact, on incrémente le score, et on souhaite faire disparaître le poisson (le chat l'a mangé) et le faire réapparaître à un endroit aléatoire après un délai fixé.

Il s'agit donc de simuler le fait que le chat mange les poissons qu'il réussit à attraper et qu'à chaque fois un nouveau poisson apparaît, même si c'est un lutin unique qui gère les poissons.
La difficulté tient au délai fixé. Cela permet d'introduire le chronomètre de Scratch, mais également une variable qui conservera l'heure où le poisson a été attrapé : le script du poisson étant le seul qui ait besoin de cette variable, on la définira comme variable privée du lutin, à la différence du score que plusieurs lutins ont besoin de modifier ou de consulter, qui doit

9. Le fichier joint *PremiersDessins.sb2* montre un exemple d'activité. L'utilisation d'un message a permis de regrouper les tracés de deux figures différentes dans le même script : ce n'est évidemment pas recommandé pour des premières séances.

donc être une variable publique (ou globale). Cette distinction est une première introduction aux concepts de la programmation-objet qui n'a évidemment pas à être formalisée.

La commande qui permet d'attendre le délai fixé (ici à 2 secondes) ne va pas de soi et mérite sans doute un moment collectif de réflexion et d'explication :

Une dernière étape consiste à ajouter un quatrième lutin, l'arbitre, qui apparaît quand le score devient négatif (après des rencontres du chat et du chien) ou dépasse une valeur fixée (le chat a réussi à manger suffisamment de poissons). Là encore, on met en évidence la nécessité d'une boucle infinie pour scruter la valeur d'une variable globale, le score, et il peut être utile de réfléchir au nombre de scripts qui se déroulent en parallèle à un moment donné.

On peut imaginer différents prolongements : par exemple, un étang où nage le poisson, le chat ne pouvant l'attraper, et le manger, qu'au bord de l'étang. Ou encore la présence de plusieurs poissons…

Un exemple de production est proposé dans le fichier joint PoissonChatChien.sb2.

Un jeu de pong

Le lecteur est invité à ouvrir et expérimenter à partir du document joint Pong.sb2 en parallèle de sa lecture.

Le professeur peut choisir ce type d'activité avec différents objectifs : travailler la notion de direction angulaire relative ou absolue, découvrir et utiliser les constructions conditionnelles, découvrir et utiliser des variables, programmer une gestion d'événements.

Selon le(s) choix qu'il effectue, il développera plus tel ou tel aspect de l'activité, proposera des défis différents aux élèves, prolongera l'activité suivant diverses directions.

On peut commencer par une activité concernant le rebond sur les bords d'une balle. Il vaut mieux choisir pour commencer un lutin dont la direction est immédiatement visible (le chat, une flèche), et reporter à plus tard l'utilisation d'un lutin en forme de balle. De la même façon, il est sans doute utile d'afficher la direction du lutin (en cochant la case appropriée tout en bas de la catégorie « Mouvement »).

Une répétition infinie de

,

, permet alors l'observation de ce qui se passe aux bords : un objectif est que les élèves conjecturent les règles de changement de direction.

On peut alors proposer un défi, qui est de réaliser le même processus, mais sans utiliser le bloc

. Il faut toutefois prendre garde à repérer l'approche des bords, en ajoutant des répétitions infinies de test sur l'abscisse (inférieure à -215 ou supérieure à 215) et sur l'ordonnée. Ce défi n'est pas si simple pour des élèves inexpérimentés.

On ajoute deux raquettes (que les élèves peuvent dessiner, un simple rectangle suffit). On pensera à les nommer de façon explicite, raquette gauche et raquette droite, par exemple. Il n'est pas très difficile d'associer à chaque raquette un script qui permet à l'utilisateur de la faire monter ou descendre, à l'appui d'une touche ou d'une autre. Il faudra donc choisir quatre touches différentes du clavier, pour le joueur gauche et le joueur droit.

Il s'agit là d'une programmation événementielle très simple à mettre en œuvre.

Pour l'instant, la balle et les raquettes agissent sans aucune interaction.

Il convient maintenant de gérer le rebond de la balle sur chaque raquette.

Pour cela on crée une boucle infinie qui teste le contact à l'aide du premier bloc de la catégorie « Capteurs ». Si la raquette gauche est touchée, il suffit de changer la direction de la balle en l'opposé de la direction actuelle. Remarquons que puisqu'il s'agit de modifier la direction de la

balle, c'est bien sur le script de la balle qu'il faut travailler, et non sur celui de la raquette !

C'est un objectif important que les élèves comprennent bien quelles commandes sont à écrire dans le script de la balle et quelles autres dans celui de chaque raquette : on introduit ici des concepts liés à la programmation-objet, sans avoir pour autant besoin du moindre formalisme.

Une autre remarque s'impose ici : on peut bien sûr créer un unique script long et compliqué pour la balle, mais il est sans doute plus simple de créer plusieurs scripts associés chacun à un comportement particulier : le déplacement perpétuel sur le terrain de jeu, la gestion du rebond sur les bords (si on ne veut pas utiliser la commande

), le contact avec la raquette gauche, le contact avec la raquette droite. Cela introduit à la fois la notion de programmation d'actions en parallèle et permet une mise au point beaucoup plus facile des programmes.

Plusieurs prolongements sont envisageables.

En premier lieu, on peut ajouter un score pour chacun des deux joueurs, en créant deux variables score gauche et score droit (toujours utiliser des identifiants explicites et non abrégés), qui sont incrémentées à chaque rebond réussi sur la raquette correspondante.

Les élèves peuvent décider si la balle rebondit sur les côtés gauche et droit au cas où les raquettes l'auraient ratée, ou si dans ce cas la partie continue avec la balle au centre et une direction tirée au hasard. On peut également ajouter des pénalités au score adéquat dans ce cas de balle ratée.

Un prolongement plus ardu consisterait à gérer des niveaux de difficulté, à chaque fois qu'un score dépasse une dizaine (par exemple) : ce pourra correspondre à une accélération de la balle, à des raquettes moins longues, etc.

Un exemple de production est proposé dans le fichier joint Pong.sb2.

Un jeu avec des pièces

Le lecteur est invité à ouvrir et expérimenter à partir du document joint Francs.sb2 en parallèle de sa lecture.

L'activité est reprise d'un exercice du rallye mathématique de l'académie de Lyon.

On dispose de quatre pièces, disposées initialement respectivement du côté face, pile, face, pile.

Chaque clic sur une pièce la retourne, ainsi que son éventuelle voisine de droite.

Le joueur gagne quand les quatre pièces sont du même côté.

Bien entendu, on peut varier le nombre de pièces, ainsi que la disposition initiale — mais attention, certaines dispositions ne sont pas résolubles !

L'objectif de cette activité est de travailler les notions suivantes :
- instructions conditionnelles ;
- utilisation d'une variable ;
- utilisation simple d'une liste ;
- gestion d'événements déclenchés par la souris ;
- déclenchement de plusieurs actions en parallèle ;
- échange de messages entre objets.

Chaque pièce est représentée par un lutin, avec deux costumes, pour le côté pile et le côté face.

On propose, dans le fichier joint Francs.sb2 , un exemple de production autour de cette activité.

Dans cet exemple, on a également créé deux costumes pour l'arrière-plan, avec un costume pour signaler la victoire et un autre pour préciser qu'on aurait pu gagner en moins de clics. En effet, avec la configuration initiale choisie, il existe des solutions en seulement 2 clics.

Une difficulté de l'activité tient à ce qu'un clic sur une pièce doit entraîner une action sur sa voisine : c'est une occasion naturelle d'introduire la notion de message entre lutins. Les actions déclenchées par un clic sur la pièce et la réception d'un message sont très similaires, mais différentes : c'est là aussi une difficulté.

Retrouvez Éduscol sur

Dans un objectif de différenciation pédagogique, on peut apporter de l'aide en fournissant le script de la pièce 3, par exemple, et demander d'écrire les scripts des pièces 1, 2 et 4, ce qui demande une bonne analyse des actions, et correspond bien aux compétences « mettre au point un programme simple » et « reconnaître des schémas ».

L'initialisation de la variable qui compte le nombre de clics et de la liste qui retient les faces courantes des pièces est réalisée, à l'appui du drapeau vert, par un script lié à l'arrière-plan. Cette méthode permet de distinguer ce qui relève du comportement global de l'application et ce qui est spécifique de chaque pièce. On notera qu'on a choisi également de tester la victoire dans le même script, lié à l'arrière-plan.

L'utilisation d'une liste paraît indispensable, car chaque lutin est le seul à avoir accès au numéro de son costume courant : aucun lutin ne peut donc tester l'égalité des côtés des quatre pièces en utilisant seulement le bloc

.

Cette activité ne demande qu'une utilisation très élémentaire d'une liste, et peut donc servir d'introduction à cette notion.

Le test de victoire peut être réalisé de plusieurs façons : par une imbrication de plusieurs conditionnelles, comme dans la production jointe, mais aussi en utilisant les connecteurs logiques. Ce peut être intéressant de ne pas guider les élèves sur telle ou telle voie, mais de les laisser choisir. On peut s'attendre à ce que les élèves cherchent un bloc pour tester des égalités simultanées, et expliquer qu'on ne peut tester que l'égalité de deux quantités.
On a choisi de représenter les valeurs pile et face par les nombres 1 et 0, ce qui permet d'utiliser

qui devra naturellement faire l'objet d'un travail spécifique : une fois qu'on aura trouvé comment modifier un élément d'une liste, il faudra encore trouver comment une seule expression arithmétique simple permet de passer de pile à face et vice versa.

L'utilisation d'images trouvées sur Internet pour les lutins figurant les pièces sera l'occasion d'évoquer la question de licence liée à l'utilisation de ces images : sont-elles du domaine public ? Est-ce le cas pour les pièces de 1 €, par exemple ?

Un jeu de tic-tac-toe

Le lecteur est invité à ouvrir et expérimenter à partir du document joint TicTacToe.sb2 en parallèle de sa lecture.

Le lecteur est invité à expérimenter à partir du fichier joint TicTacToe.sb2 , et à regarder en détail les scripts proposés en parallèle à sa lecture. Cette activité est plus ambitieuse, et le fichier joint n'est qu'un exemple de production qui demande un niveau de maîtrise important. Mais on pourra s'en inspirer, car elle se découpe aisément en sous-problèmes dont la résolution permet d'approcher de nombreuses notions différentes.

On se propose de faire jouer tour à tour le joueur (l'utilisateur du programme) et la machine. C'est le joueur qui joue le premier. Les marques du joueur sont des croix vertes, celles de la machine des disques rouges. Ainsi chacune des 9 cases du jeu peut-elle se retrouver dans 3 états différents.

Chaque case est simulée par un lutin, qui porte 3 costumes : un carré blanc, une croix ou un disque. Jouer revient donc à changer le costume d'une case blanche. On introduit ainsi le concept d'attribut d'un objet : il s'agit ici du costume. Ces attributs sont privés : seul un lutin peut savoir quel est son costume actuel. Or l'arbitre, pour décider de la victoire du joueur ou de la machine, doit connaître l'état de chaque case du jeu.

C'est pourquoi on introduit une liste des valeurs des différentes cases : cette liste étant une variable globale, les lutins pourront mettre à jour la valeur qui leur correspond, et l'arbitre examiner les valeurs de toutes les cases qui l'intéressent. On peut commencer en choisissant les valeurs 0, 1, 2 pour coder les trois états. La victoire est déclarée lors de l'alignement de 3 croix ou de 3 disques, et se teste donc en faisant par exemple la somme des trois valeurs

Retrouvez Éduscol sur

correspondantes 1+1+1 = 3 ou 2+2+2 = 6. En jouant on s'aperçoit cependant que l'arbitre rend des décisions inexactes. Il est sans doute intéressant de laisser les élèves trouver sans aide du professeur l'erreur commise : en effet, 0+1+2 = 3 donc l'alignement blanc / croix / disque provoque, à tort, la victoire. Une façon simple de corriger le programme consiste à choisir les valeurs 0, 1 et 4 pour coder les trois états : il suffit de vérifier que la seule décomposition de 3, respectivement de 12, comme somme de trois de ces valeurs est 3 = 1+1+1, respectivement 12 = 4+4+4.

Le joueur joue en cliquant une case blanche, chaque lutin a donc un petit script qui gère l'événement clic de souris. Il faut tester, par une conditionnelle, que la case cliquée était blanche, ce que le lutin peut faire en examinant son costume actuel (lui en a bien le droit) ou en consultant la liste globale des valeurs des cases. Après avoir joué, on passe la main à l'arbitre, pour qu'il puisse éventuellement constater une victoire, en lui envoyant un message, puis on cède la main à la machine, par un nouveau message « À la machine ! » que reçoit en fait l'arbitre.

L'arbitre choisit alors au hasard une case jusqu'à trouver une blanche (avec une boucle répéter tant que) qu'il conserve dans une variable globale case avant d'envoyer à son tour un message « coup machine ». Chaque lutin gère la réception de ce message, en testant s'il concerne bien sa case à l'aide de la variable de même nom. Si tel est le cas, il poursuit de façon analogue à ce qu'il sait déjà faire pour répondre à un clic.

Dans le cadre d'un projet courant sur plusieurs séances, on peut distribuer le travail de conception des scripts à différents élèves, en distinguant par exemple, pour un lutin simulant une case, le script à utiliser en réponse à un clic ou en réponse au message « coup machine », et, pour l'arbitre, le test de victoire et la commande du déroulé du jeu, avec la gestion des messages.

Annexe : présentation et installation de Scratch

SCRATCH est un langage de programmation visuel inventé par le laboratoire Lifelong Kindergarten Group du Massachusetts Institute of Technology à vocation ludique et éducative. Son interface ludique et la simplicité de sa prise en main le rendent accessible à tous.
Le logiciel est libre, gratuit et multiplateforme. Le petit chat orange est le « lutin » par défaut.

Site officiel

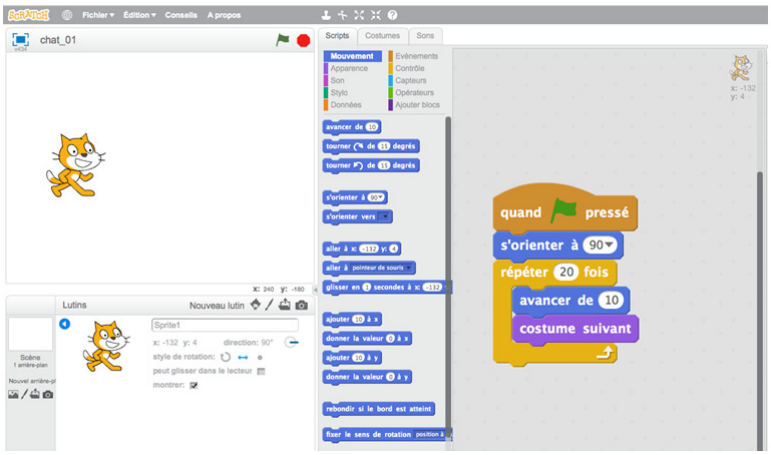
Installer Scratch

Il existe deux méthodes pour utiliser ce logiciel.

- Utilisation hors connexion
  Il faut suivre les indications qu'on trouve en suivant le lien.
  Télécharger (et exécuter si cela ne se fait pas automatiquement) :
  – la dernière version du logiciel Adobe Air ;
  – l'éditeur Scratch hors ligne.
- Utilisation en ligne
  Il faut :
  – disposer d'une version à jour du logiciel Adobe FlashPlayer ;
  – aller sur le site et cliquer sur l'onglet Créer.

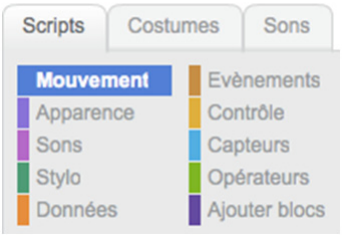
Utiliser Scratch

La langue d'utilisation est par défaut l'anglais ; pour la changer : en haut à gauche de l'écran dans la barre de menu.



Principe général : pour écrire un programme, on encastre des blocs dans la fenêtre de script, tout à droite. Pour le lancer, on double-clique sur l'assemblage d'instructions ou, si l'on a fait commencer la série par le bloc événement avec le drapeau vert – comme dans l'exemple ci-dessus –, il suffit de cliquer sur le drapeau vert situé au-dessus de la fenêtre d'action, à gauche ; l'octogone rouge situé à sa droite est un bouton d'arrêt.

Les commandes de Scratch

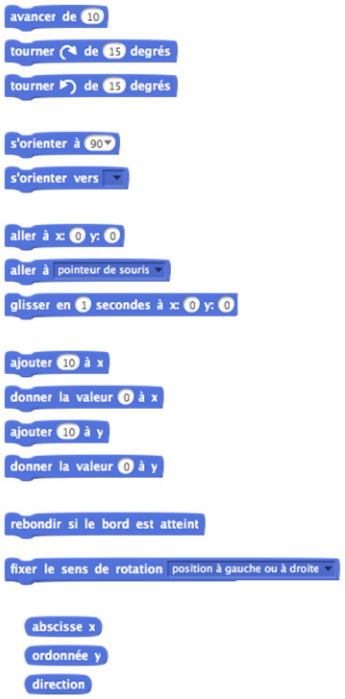


Les différentes commandes sont accessibles, sous l'onglet Scripts, dans la zone centrale. Elles sont regroupées par fonctions, explicitées dans le rectangle représenté ci-dessus. Un code couleur est utilisé pour permettre de distinguer ensuite les fonctions des commandes utilisées.

On récapitule dans le tableau ci-dessous la liste des blocs disponibles, regroupés par catégorie.

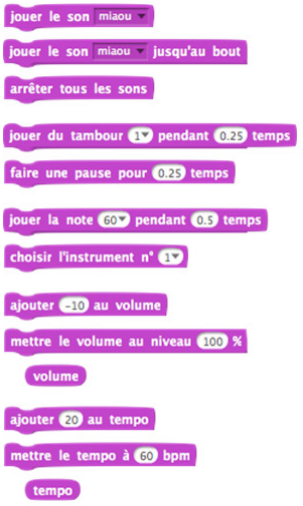
Remarque : les blocs ovales (comme taille ou tempo) représentent des valeurs qui peuvent être utilisées dans les autres blocs. Elles sont précédées d'une case à cocher : si on coche la case, la valeur courante est affichée à l'écran, dans la fenêtre où évolue le lutin (par défaut il s'agit du chat).

MOUVEMENT



APPARENCE

SONS



STYLO

DONNÉES

ÉVÉNEMENTS

Retrouvez Éduscol sur

CONTRÔLE	CAPTEURS	OPÉRATEURS

Retrouvez Éduscol sur

éduSCOL
Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

ÉVALUATION

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Ressources pour l'évaluation en mathématiques

COMPOSANTE(S) DU SOCLE COMMUN

D1-3 | Comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques, scientifiques et informatiques

D3 | La formation de la personne et du citoyen

D4 | Les systèmes naturels et les systèmes techniques

D5 | Les représentations du monde et l'activité humaine

Préambule

DECRET N° 2015-1929 DU 31 DECEMBRE 2015, ARTICLE 2 :
« Le niveau de maitrise de chacune des composantes du premier domaine et de chacun des quatre autres domaines du socle commun est évalué à la fin de chaque cycle selon une échelle de référence qui comprend quatre échelons ainsi désignés :
1. « maitrise insuffisante » ;
2. « maitrise fragile » ;
3. « maitrise satisfaisante » ;
4. « très bonne maitrise ».
Un domaine ou une composante du premier domaine du socle commun est maitrisé(e) à compter de l'échelon 3 de l'échelle de référence appliquée au cycle 4. »

À l'issue de chaque cycle, les membres de chaque équipe pédagogique sont donc amenés à se concerter pour positionner collectivement les acquis de leurs élèves, par rapport à l'un des quatre niveaux de l'échelle de référence pour chaque composante (les quatre objectifs du domaine 1 et les quatre autres domaines) du socle.

Cette dimension sommative de l'évaluation en vue d'arrêter le positionnement d'un niveau de maîtrise sur l'échelle de référence doit être intégrée dans une stratégie globale d'évaluation menée tout au long du cycle et dans toutes les disciplines. Cette stratégie comporte d'autres dimensions, notamment une dimension diagnostique et une dimension formative. Ces deux aspects peuvent d'ailleurs être judicieusement articulés à la dimension sommative qui demeure l'objet essentiel de ce document.

Pour contribuer au positionnement global de chaque élève, chaque enseignant doit avoir une vision objective de ce que représente le niveau « satisfaisant » (niveau 3) dans la maitrise d'éléments du socle commun et avoir recueilli, pour chaque élève, un nombre suffisant d'informations fiables.

Le présent document a pour objectif d'aider les enseignants de mathématiques du cycle 4 à acquérir cette vision objective des différents niveaux de maîtrise, afin de pouvoir calibrer certaines situations d'évaluation dont ils disposent déjà et en concevoir de nouvelles.

Leur contribution au positionnement global de l'élève peut s'appuyer sur le niveau de maîtrise attribué à chacun des « éléments signifiants » (colonne 2 du document d'accompagnement pour l'évaluation des acquis du socle commun de connaissances, de compétences et de culture) relevant de leur discipline.

Les éléments signifiants sont eux-mêmes déclinés en « descripteurs » (colonne 3 du document précité).

Chaque situation d'évaluation présentée ci-après est rattachée à un ou plusieurs de ces descripteurs. Elle propose un ou plusieurs « indicateurs » spécifiques à la situation dont l'observation contribue au positionnement sur l'échelle de référence des niveaux de maitrise. Toutes les situations explicitent des indicateurs relatifs au niveau 3 ; certaines d'entre elles précisent en plus des indicateurs pour les niveaux 2 ou 4. Sur une situation conçue a priori par un enseignant dans l'intention d'observer un descripteur spécifique, il peut arriver que la démarche choisie par un élève ne permette pas cette observation, mais offre l'occasion de recueillir des informations sur le niveau de maîtrise d'un autre descripteur. La recherche d'indicateurs relatifs à ces descripteurs supplémentaires est alors laissée au soin des équipes pédagogiques.

Par ailleurs, chacune des situations proposées fait à la fois référence au type de tâche dont elle relève (question flash, tâche intermédiaire, tâche avec prise d'initiative) et aux principales compétences mathématiques (chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer) qu'elle mobilise.

L'attention des enseignants est attirée sur les points suivants :
- L'ensemble des situations d'évaluation proposées ne saurait être interprété comme un sujet « d'examen de socle » à faire passer aux élèves en fin de troisième. Seule une évaluation régulière, y compris dans sa dimension formative, permet de constituer un faisceau convergent d'informations susceptible d'attester en fin de cycle le niveau de maitrise de chaque domaine ou composante (pour le domaine 1) du socle.
- L'évaluation du niveau de maîtrise d'un « élément signifiant » ne saurait être conçue comme l'accumulation des évaluations de chacun de ses descripteurs, la liste des descripteurs qui lui sont attachés n'étant d'ailleurs ni exhaustive ni exclusive.
- Une même situation peut solliciter plusieurs descripteurs, voire plusieurs éléments signifiants ; il est par ailleurs possible qu'un seul d'entre eux soit concerné par l'évaluation.
- Pour un descripteur donné, il est tout à fait possible d'envisager des indicateurs autres que ceux qui sont proposés.
- De manière générale, le niveau de maitrise « satisfaisant » correspond à la réussite d'une tâche mettant en jeu un nombre limité de ressources et relevant d'un contexte familier de l'élève, un contexte inédit relevant davantage d'un « très bon niveau ».
- Selon les situations, cette réussite peut être obtenue en totale autonomie ou bénéficier de « coups de pouce » de la part de l'enseignant. Ces coups de pouce ne doivent pas fournir des éléments de réponse qui fausseraient l'évaluation, mais permettre de lever des blocages. Ils prennent la forme de questionnements ou d'incitations, à destination des élèves qui en auraient besoin. Ce document en présente des exemples.

Retrouvez Éduscol sur

• Les situations présentées ci-après peuvent être intégrées à des situations plus riches, pourvu que l'enseignant et ses élèves aient une vision claire de ce qui est évalué.

L'évaluation est une mission essentielle des enseignants. Sa mise en œuvre nécessite que chaque équipe disciplinaire réfléchisse collectivement au choix, au calibrage et la mise en œuvre des situations d'évaluation.

	DOMAINES ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS										TYPES DE TÂCHE			THÈMES DU PROGRAMME				
	D1-3							D3	D4	D5								
	Utiliser les nombres	Utiliser le calcul littéral	Exprimer une grandeur mesurée ou calculée dans une unité adaptée	Passer d'un langage à un autre	Utiliser le langage des probabilités	Utiliser et produire des représentations d'objets	Utiliser l'algorithmique et la programmation [...]	Exercer son esprit critique, faire preuve de réflexion et de discernement	Mener une démarche scientifique, résoudre un problème	Situer et se situer dans le temps et l'espace	Flash	Intermédiaire	Prise d'initiative	Nombres et calculs	Organisation et gestion de données, fonctions	Grandeurs et mesures	Espace et géométrie	Algorithmique et programmation
Lancer de dés					X							oui			oui			
Calcul avec des fractions	X										oui			oui				
Récupérateur d'eau de pluie									X				oui			oui		
Évolution d'une proportion	X											oui		oui				
Vente de livres	O								O			oui		oui				
Programmes de calcul	O	X										oui		oui				
Tir au but							X						oui					oui
Le chat et la souris							X		X				oui	oui				oui
Devinette mathématique		O							X			oui		oui				
Trouver un entier de cube donné									X				oui	oui				
Nombres premiers permutables									X			oui		oui				
Conjecture	X							X					oui	oui				
Le chien et le navet	X												oui	oui				
Décimal ou pas ?	X											oui		oui				
Partage de gains									X			oui		oui				
De l'eau à la glace									X			oui		oui				
Carrelage							X					oui						oui
Pavage						X						oui					oui	
Repérage géographique										X		oui					oui	
Publicité						X		X					oui		oui			
Bactéries				X								oui			oui			
Cône de sel						X						oui				oui		
Proportionnalité	X										oui				oui			
Éolienne				X								oui			oui	oui		
Soldes	X											oui			oui			
Drôles de verres						X						oui				oui		

Retrouvez Éduscol sur

	DOMAINES ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS										TYPES DE TÂCHE			THÈMES DU PROGRAMME				
	D1-3							D3	D4	D5								
	Utiliser les nombres	Utiliser le calcul littéral	Exprimer une grandeur mesurée ou calculée dans une unité adaptée	Passer d'un langage à un autre	Utiliser le langage des probabilités	Utiliser et produire des représentations d'objets	Utiliser l'algorithmique et la programmation [...]	Exercer son esprit critique, faire preuve de réflexion et de discernement	Mener une démarche scientifique, résoudre un problème	Situer et se situer dans le temps et l'espace	Flash	Intermédiaire	Prise d'initiative	Nombres et calculs	Organisation et gestion de données, fonctions	Grandeurs et mesures	Espace et géométrie	Algorithmique et programmation
Celsius et Fahrenheit		O							O				oui	oui				
Pavé droit et calcul littéral		X										oui		oui				
Géométrie						X			X				oui				oui	
Repérage sur une droite graduée	X											oui					oui	
Programmes de calcul		X											oui	oui				

X indique une situation participant au positionnement de l'élève
O indique une situation pouvant participer au positionnement en fonction de la stratégie adoptée par l'élève

Lancer de dés

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser le langage des probabilités (D1-3)

DESCRIPTEURS
- Utiliser le vocabulaire lié aux notions élémentaires de probabilités
- Calculer des probabilités dans un contexte simple

ÉNONCÉ
Un jeu consiste à :
- choisir un nombre et le noter sur un papier ;
- lancer deux dés à six faces numérotées de 1 à 6, puis calculer la différence entre le plus grand et le plus petit des nombres obtenus.

On gagne si le nombre noté sur le papier est égal au nombre calculé à l'issue du lancer.
Quel nombre a-t-on intérêt à choisir ?

Descriptif

Type de tâche
Tâche intermédiaire

Compétences principalement mobilisées
Représenter, calculer

Contexte d'évaluation
Ainsi posé, cet exercice, tout à fait pertinent en cours de formation, est trop difficile pour permettre de positionner un élève de cycle 4 au niveau 3. La difficulté est liée à la modélisation probabiliste du problème. Il convient donc que celle-ci soit conduite **avant l'évaluation**, par exemple dans le cadre d'un débat de classe animé par l'enseignant.

Coups de pouce possibles
👍**1** : « Quels sont tous les résultats possibles à l'issue du lancer ? »
👍**2** : « Tu peux utiliser un tableau pour organiser les résultats possibles. »

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève recense les issues du lancer, par exemple dans un tableau 6 x 6.
2. L'élève calcule la probabilité de chacune des issues.

Niveaux

niveau 2	Seul l'indicateur 1 est réussi, éventuellement avec l'aide des coups de pouce 👍**1** et 👍**2**. **OU** l'indicateur 2 est réussi si on donne à l'élève le tableau représentant les issues possibles du lancer.
niveau 3	Les deux indicateurs sont réussis mais à l'aide d'au moins un coup de pouce.
niveau 4	Les deux indicateurs sont réussis sans coup de pouce.

Calcul avec des fractions

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser les nombres (D1-3)

DESCRIPTEUR
Effectuer (mentalement, à la main [...]) des calculs engageant les quatre opérations [...] sur des nombres rationnels positifs ou négatifs

ÉNONCÉ
Calculer et simplifier le résultat lorsque c'est possible :

$$\frac{-3}{7}+\frac{5}{7} \quad ; \quad \left(-\frac{3}{2}\right)\times\frac{7}{2} \quad ; \quad \frac{4}{-3}\times\frac{-9}{8} \quad ; \quad \frac{2}{5}-\frac{3}{4}$$

Descriptif

Type de tâche
Question flash

Compétence principalement mobilisée
Calculer

Contexte d'évaluation
Cette tâche doit être évaluée sur un temps court. Les trois premières questions peuvent relever d'une activité de calcul mental.

Coup de pouce possible
👍 : « Peut-on simplifier le résultat ? »

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève calcule la somme, la différence, le produit de deux fractions, éventuellement de dénominateurs et de signes différents, sans exigence de simplification du résultat.
2. L'élève simplifie le résultat obtenu sur sollicitation de l'enseignant.

Niveaux

niveau 2	L'élève fournit au moins trois résultats corrects, mais non simplifiés.
niveau 3	L'élève calcule et simplifie correctement les 4 résultats, éventuellement avec l'aide du coup de pouce.
niveau 4	Tous les résultats simplifiés sont obtenus sans coup de pouce.

Récupérateur d'eau de pluie

ÉLÉMENT SIGNIFIANT

Mener une démarche scientifique, résoudre un problème (D4)

DESCRIPTEUR

- Pratiquer le calcul numérique (exact et approché) et le calcul littéral
- Communiquer sur ses démarches, ses résultats et ses choix, en argumentant

ÉNONCÉ

Le schéma ci-dessous permet de visualiser une manière dont on peut récupérer l'eau de pluie.

1. L'eau de pluie tombe sur votre toit.
2. Elle glisse vers les gouttières.
3. Elle tombe dans les descentes de gouttières, le long du mur de la maison.
4. Via un tuyau qui relie les gouttières à la cuve, l'eau est acheminée vers la cuve d'eau de pluie.
5. Avant de tomber dans la cuve, l'eau de pluie est filtrée (les impuretés sont évacuées).
6. Ensuite elle est stockée dans la cuve.
7. Distribution : elle se fait par un robinet (cuve hors sol).

Pour arroser son jardin, Cassandra dispose d'un réservoir pour récupérer l'eau de pluie.

Caractéristiques du réservoir de Cassandra : forme : cylindrique, matière : PVC souple, diamètre : 60 cm, hauteur : 120 cm. Position du robinet : à 40 cm du sol.

Pour son jardinage, Cassandra dispose de l'arrosoir ci-dessous, de hauteur 35 cm

Combien d'arrosoirs peut-elle remplir si son réservoir d'eau est rempli à 60 % de sa contenance totale ?

On présentera soigneusement toute la démarche suivie.

On rappelle la formule du volume V d'un cylindre de diamètre D et de hauteur h : $V = \pi \frac{D^2}{4} \times h$

Descriptif

Type de tâche
Tâche avec prise d'initiative

Compétences principalement mobilisées
Chercher, calculer

Coups de pouce possibles
1 : « Est-ce que toute l'eau de la cuve peut être extraite de la cuve à l'aide du robinet ? »
2 : « Dans quelle unité choisis-tu d'exprimer les volumes ? »

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève calcule correctement le volume total de la cuve.
2. L'élève calcule correctement le volume d'eau contenu dans la cuve.
3. L'élève soustrait du volume d'eau contenu dans la cuve celui de l'eau située sous le robinet.
4. Après avoir effectué les conversions nécessaires, l'élève effectue un quotient pour trouver le nombre d'arrosoirs

Niveaux

niveau 2	Seulement deux des indicateurs 1, 2 et 4 sont réussis, éventuellement avec les coups de pouce.
niveau 3	Les trois indicateurs 1, 2 et 4 sont réussis, éventuellement avec les coups de pouce.
niveau 4	Les quatre indicateurs sont réussis, éventuellement avec les coups de pouce.

Évolution d'une proportion

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser les nombres (D1-3)

DESCRIPTEUR
Effectuer (mentalement, à la main [...]) des calculs engageant les quatre opérations [...] sur des nombres rationnels positifs [...]

ÉNONCÉ
Une classe de 25 élèves comporte 14 filles et 11 garçons.

La proportion de filles dans la classe varie-t-elle dans chacun des cas suivants ?
- Il arrive dans la classe une fille et un garçon ;
- un garçon et une fille quittent la classe.

Descriptif

Type de tâche
Tâche intermédiaire

Compétences principalement mobilisées
Modéliser, calculer

Coups de pouce possibles
👍**1** : « Comment calcule-t-on une proportion ? »
👍**2** : « Comment compare-t-on des fractions ? »

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève exprime chacune des proportions sous forme de fraction.
2. L'élève compare les fractions $\frac{14}{25}$, $\frac{15}{27}$, $\frac{13}{23}$

Niveaux

niveau 2	Seul l'indicateur 1 est réussi, éventuellement avec le coup de pouce 👍**1**.
niveau 3	Les deux indicateurs sont réussis avec au moins l'un des coups de pouce.
niveau 4	Les deux indicateurs sont réussis sans coup de pouce.

Vente de livres

ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS

Selon la stratégie retenue par l'élève, sa démarche, sa production, la situation permet d'évaluer des éléments signifiants différents :

- Utiliser les nombres (D1-3)
- Mener une démarche scientifique, résoudre un problème (D4)

DESCRIPTEURS

Selon l'élément signifiant évalué, la situation prend en compte des descripteurs différents :

- Comprendre et utiliser la notion de divisibilité et de nombre premier (D1-3)
- Pratiquer le calcul numérique [...] à l'aide d'un instrument (tableur [...]) (D4)

ÉNONCÉ

Charlotte possède entre 400 et 450 livres. Elle décide de les revendre sur internet pour en acheter d'autres. Elle observe qu'elle peut regrouper ses livres par paquets de 3, de 5, ou de 7. Combien de livres Charlotte possède-t-elle exactement ?

Descriptif

Type de tâche

Tâche intermédiaire

Compétences principalement mobilisées

Chercher, raisonner

Contexte d'évaluation

Un exercice assez voisin figure dans le document d'accompagnement des programmes « arithmétique ».

La deuxième phrase y est modifiée en : « *Elle observe que, lorsqu'elle regroupe ses livres par 3, par 5 ou par 7, il en reste toujours 1* ». Sous cette forme l'exercice, tout à fait pertinent en cours de formation, est trop difficile pour permettre de positionner un élève de cycle 4 au niveau 3 dans le cadre d'une évaluation sommative. La présence du reste égal à 1 induit en effet une difficulté supplémentaire de résolution.

Coups de pouce possibles

👍**1** : « Peut-on reconnaître simplement les multiples de 5, de 3, de 7 ? »
👍**2** : « Quels sont les multiples de 7 compris entre 400 et 450 ? »
👍**3** : « Tu peux utiliser un tableur. »
👍**4** : « Quels sont les facteurs premiers qui peuvent apparaître dans la décomposition du nombre de livres ? »

Positionnement des élèves

Selon la stratégie retenue par l'élève, sa démarche, sa production, la situation permet d'évaluer des éléments signifiants différents.

• Si l'élève choisit la stratégie consistant à traduire l'énoncé en termes de divisibilité par 3, 5 et 7, à écrire la liste de tous les multiples de 7 compris entre 400 et 450 et à chercher parmi eux ceux qui vérifient les critères de divisibilité par 5 et 3.

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser les nombres (D1-3)

DESCRIPTEUR
Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombre premier

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève traduit l'énoncé en termes de divisibilité par 3, 5 et 7.
2. L'élève détermine la liste des multiples de 7 compris entre 400 et 450.
3. L'élève sait reconnaître si un nombre est multiple de 3, de 5.
4. L'élève détermine le nombre de livres en repérant parmi eux les multiples de 3 et de 5.

Niveaux

niveau 2	Le premier indicateur est réussi sans coup de pouce. Le deuxième indicateur est réussi avec les coups de pouce **2** et **3**. Le troisième indicateur est réussi mais l'élève ne parvient pas à répondre à la question posée.
niveau 3	Le premier indicateur est réussi sans coup de pouce. Le deuxième indicateur est réussi, éventuellement avec le coup de pouce **3**. Le troisième indicateur est réussi et l'élève parvient à conclure.
niveau 4	L'élève a trouvé seul une stratégie de résolution, et a réussi les quatre indicateurs.

• Si l'élève choisit la stratégie consistant à traduire l'énoncé en termes de divisibilité par 3, 5 et 7, puis d'en déduire la présence de ces trois facteurs dans la décomposition en facteurs premiers du nombre cherché et obtenir ainsi le résultat attendu.

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser les nombres (D1-3)

DESCRIPTEUR
Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombre premier

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève traduit l'énoncé en termes de divisibilité par 3, 5 et 7.
2. L'élève conclut à la divisibilité par 3 x 5 x 7 en s'appuyant sur la décomposition en facteurs premiers.
3. L'élève détermine le nombre de livres.

Niveaux

niveau 3	Le premier indicateur est réussi sans coup de pouce. Le second est réussi grâce au coup de pouce 4, mais l'élève n'arrive pas à conclure.
niveau 4	L'élève a trouvé seul une stratégie de résolution, Les trois indicateurs sont réussis, éventuellement avec le coup de pouce 4. et a réussi les quatre indicateurs.

• Si l'élève choisit la stratégie consistant à utiliser un tableur pour trouver les multiples de 3, de 5 et de 7 compris entre 400 et 450.

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser les nombres (D1-3)

DESCRIPTEUR
Pratiquer le calcul numérique [...] à l'aide d'un instrument (tableur [...])

Indicateur possible pour l'évaluation

L'élève utilise un tableur pour repérer les éléments communs des colonnes constituées des multiples de 3, de 5 et de 7 compris entre 400 et 450.

Niveau

niveau 3	L'indicateur est réussi.

Programmes de calcul

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser le calcul littéral (D1-3)

DESCRIPTEURS

- Produire une expression littérale
- Résoudre des équations [...] du premier degré

ÉNONCÉ
On considère les deux programmes de calcul ci-dessous :

Programme A
Choisir un nombre
Le multiplier par -2
Ajouter 13 au résultat

Programme B
Choisir un nombre
Lui soustraire 7
Multiplier le résultat par 3

1) Quel nombre obtient-on avec le programme A en choisissant 3 comme nombre de départ ?
2) Quel nombre faut-il choisir au départ pour obtenir 9 avec le programme B ?
3) Peut-on trouver un nombre pour lequel les deux programmes de calcul donnent le même résultat ?

Descriptif

Type de tâche
Tâche intermédiaire

Compétences principalement mobilisées
Représenter, calculer

Coup de pouce possible
👍 : « Quel type d'équation sais-tu résoudre ? Peux-tu t'y ramener ? »

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève traduit un programme de calcul en une expression littérale.
2. L'élève développe une expression littérale.
3. L'élève résout l'équation $3 \times (x - 7) = 9$, pour répondre à la question 2, ou l'équation $-2x + 13 = 3 \times (x - 7)$ pour répondre à la question 3.

Niveaux

niveau 2	Le premier indicateur est réussi **ET** le deuxième indicateur est réussi grâce au coup de pouce, **ET** le troisième indicateur n'est réussi pour aucune des questions 2 et 3.
niveau 3	Le premier indicateur est réussi, **ET** le troisième indicateur est réussi sur au moins une des questions 2 et 3, éventuellement grâce au coup de pouce.
niveau 4	Les indicateurs sont réussis sur l'ensemble des questions.

Remarques

1. Si l'élève répond à la question 2 en remontant le programme de calcul sans utiliser d'expression littérale et ne répond pas à la question 3, la situation ne permet pas d'évaluer sa maitrise du calcul littéral au niveau satisfaisant. En revanche, elle contribue à un positionnement **au niveau 3** de maîtrise pour l'**élément signifiant** « *Utiliser les nombres (composante 3 du domaine 1)* » avec comme **descripteur** « *Effectuer [...] des calculs engageant les quatre opérations [...].* »

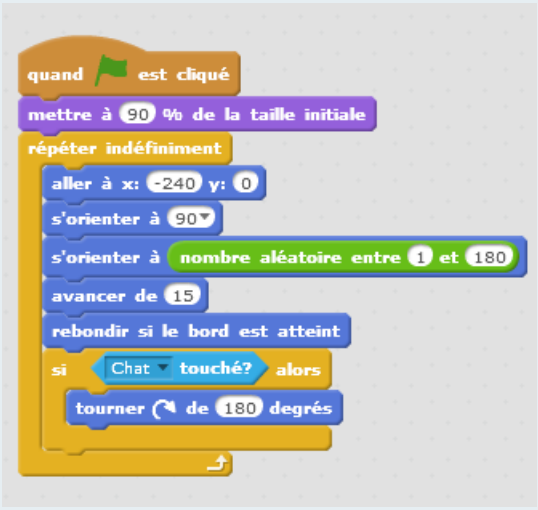
2. En modifiant les variables didactiques (par exemple en remplaçant 9 par 11,2 ou par 5 dans la question 2), la situation permet d'évaluer la maîtrise du **descripteur** « *Effectuer des calculs sur les nombres décimaux et sur les fractions* » pour **l'élément signifiant** « *Utiliser les nombres (composante 3 du domaine 1)* ».

Tir au but

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser l'algorithmique et la programmation pour créer des applications simples (D1-3)

DESCRIPTEUR
Mettre au point un programme pour corriger une erreur ou apporter une amélioration

ÉNONCÉ



Arthur veut programmer un jeu dans lequel une balle part d'une position située à gauche de l'image (voir ci-dessus à gauche) puis la traverse selon une trajectoire choisie aléatoirement.
La zone colorée en orange à droite de la scène figure le but.
Le chat peut se déplacer vers le haut ou le bas grâce aux flèches du clavier.
La balle rebondit sur le chat et sur les bords de l'image.

1. Arthur a écrit le script ci-dessus pour le lutin figurant la balle.
Ce programme rend-il compte du mouvement attendu de la balle ? Sinon, le corriger.
Solliciter le professeur pour lui expliquer la modification effectuée.

Un but est marqué si la balle atteint la zone colorée.

2. Modifier le programme afin d'intégrer un compteur qui dénombre les buts marqués.

3. Modifier le programme afin qu'il termine lorsque 10 buts ont été marqués.

Descriptif

Type de tâche
Tâche avec prise d'initiative

Compétences principalement mobilisées
Chercher, raisonner

Contexte d'évaluation
Cette situation doit être mise en œuvre sur ordinateur.
L'erreur dans le script proposé (l'initialisation de la position et de l'orientation du lutin devrait être à l'extérieur de la boucle) doit avoir été déjà rencontrée en cours de formation.

Coups de pouce possibles

👍**1** : « Pourquoi la balle repart-elle toujours du même endroit ? »
👍**2** : « En réponse à quel événement le compteur doit-il être incrémenté ? »
👍**3** : « Où replacer la balle quand un but est marqué ? »

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève repère l'erreur dans le script proposé.
2. L'élève corrige cette erreur.
3. L'élève crée un compteur à l'aide d'une variable.
4. L'élève incrémente le compteur en réponse à l'événement approprié.

Niveaux

niveau 2	L'élève repère l'erreur dans le script grâce au coup de pouce 👍**1** **ET** l'élève répond alors à la question 1 **ET** l'élève réussit le troisième indicateur, mais n'arrive pas à répondre à la question 2 malgré les coups de pouce 👍**2** et 👍**3**.
niveau 3	L'élève réussit les trois premiers indicateurs en autonomie ET l'élève réussit le dernier indicateur grâce aux coups de pouce 👍**2** et 👍**3**.
niveau 4	L'élève réussit l'intégralité de l'exercice, en autonomie.

Le chat et la souris

ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS

Selon les questions abordées par l'élève, la situation permet d'évaluer les éléments signifiants suivants :

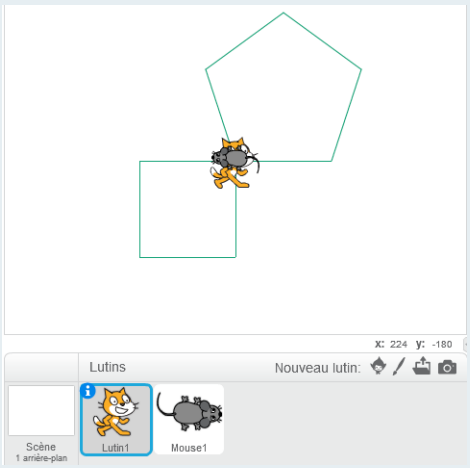
- Utiliser l'algorithmique et la programmation pour créer des applications simples (D1-3)
- Mener une démarche scientifique, résoudre un problème (D4)

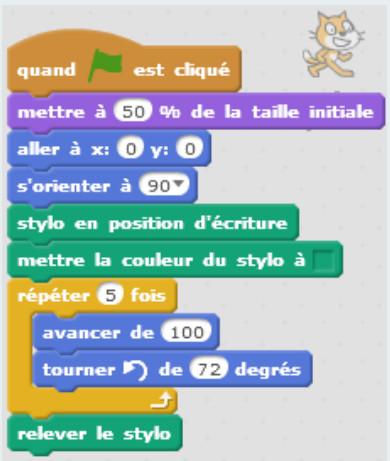
DESCRIPTEURS

Selon l'élément signifiant évalué, la situation prend en compte des descripteurs différents :

- Écrire un algorithme ou un programme qui permet une interaction avec l'utilisateur ou entre les objets qu'il utilise en réponse à un problème donné (D1-3)
- Expliquer le déroulement et le résultat produit par un algorithme simple (D1-3)
- Communiquer sur ses démarches, ses résultats et ses choix en argumentant (D4)

ÉNONCÉ





On veut programmer des déplacements dans lesquels le chat dessine un pentagone régulier et la souris un carré tous deux de côtés 100 pixels (voir ci-dessus à gauche le résultat attendu).
Le script correspondant au déplacement du chat est donné ci-dessus à droite.

1. Compléter le script ci-dessous de la souris pour qu'elle dessine le carré dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre lorsque le drapeau est cliqué.

2. On complète maintenant les scripts du chat, de la souris et de la scène comme indiqué ci-dessous :

Ajout au script du chat

Ajout au script de la souris

Script de la scène

Retrouvez Éduscol sur

2. a. Si on appuie une fois sur la barre d'espace, le chat et la souris se retrouvent-ils au même endroit ?
2. b. Après avoir replacé le chat et la souris à leur position initiale en cliquant sur le drapeau vert, déterminer une valeur de n pour que le chat et la souris se retrouvent au même endroit. Corriger le programme en conséquence.

Descriptif

Type de tâche
Tâche avec prise d'initiative

Compétences principalement mobilisées
Chercher, raisonner, communiquer

Contexte d'évaluation
Cette situation doit être mise en œuvre sur ordinateur.
La question 2.a, destinée à préparer la suivante, n'est pas soumise à l'évaluation.

Positionnement des élèves

Selon les questions abordées par l'élève, la situation permet d'évaluer les éléments signifiants suivants.

- **Concernant la question 1**

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser l'algorithmique et la programmation pour créer des applications simples (D1-3)

DESCRIPTEURS
- Écrire un algorithme ou un programme qui permet une interaction avec l'utilisateur ou entre les objets qu'il utilise en réponse à un problème donné
- Expliquer le déroulement et le résultat produit par un algorithme simple

Indicateur possible pour l'évaluation

L'élève écrit le script demandé à la question 1.

Niveaux

niveau 2	L'élève programme un déplacement de la souris, mais n'obtient pas le dessin attendu du carré.
niveau 3	L'élève réussit la question 1.

- **Concernant la question 2**

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Mener une démarche scientifique, résoudre un problème (D4)

DESCRIPTEUR
Communiquer sur ses démarches, ses résultats et ses choix en argumentant

Indicateur possible pour l'évaluation

L'élève interprète la question en la recherche d'un multiple commun à 4 et 5.

Niveaux

niveau 3	L'élève fournit un résultat correct mais ne parvient pas à le justifier à l'aide d'un raisonnement arithmétique.
niveau 4	L'élève fournit un résultat correct et le justifie par la recherche d'un multiple commun à 4 et 5.

Devinette mathématique

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Mener une démarche scientifique, résoudre un problème (D4)

DESCRIPTEURS
- Mettre en œuvre un raisonnement logique simple
- Communiquer sur ses démarches, ses résultats et ses choix en argumentant

ÉNONCÉ
Je pense à deux nombres entiers naturels. Quand je les multiplie, je trouve 54.
Quand je divise le plus grand par le plus petit, je trouve 6.
Quels sont ces deux nombres ? Justifie ta réponse en explicitant ta démarche.

Descriptif

Type de tâche
Tâche intermédiaire

Compétences principalement mobilisées
Raisonner, communiquer

Coup de pouce possible
👍 : « Peux-tu traduire le problème en la recherche de deux diviseurs particuliers de 54 ? »

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève relie le problème posé à la recherche de diviseurs particuliers de 54.
2. L'élève trouve tous les diviseurs de 54.

Niveaux

niveau 2	L'élève a besoin du coup de pouce pour trouver les deux nombres.
niveau 3	L'élève résout l'exercice sans coup de pouce, mais ne parvient pas à expliciter sa démarche.
niveau 4	L'élève résout l'exercice et explicite sa démarche.

Remarque
Si l'élève répond en modélisant le problème par deux équations qu'il résout correctement, on peut attribuer **un niveau 4** de maîtrise pour **l'élément signifiant** « *Utiliser le calcul littéral (composante 3 du domaine 1)* » avec comme **descripteurs** « *Mettre un problème simple en équation* » et « *Mettre un problème simple en équation* ».

Trouver un entier de cube donné

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Mener une démarche scientifique, résoudre un problème (D4)

DESCRIPTEURS
- Mettre en œuvre un raisonnement logique simple
- Pratiquer le calcul (exact et approché) et le calcul littéral

ÉNONCÉ
n est un nombre entier naturel et n × n × n = 8 × 9 × 24.
Quelle est la valeur de n ?

Descriptif

Type de tâche
Tâche avec prise d'initiative

Compétences principalement mobilisées
Chercher, calculer

Coups de pouce possibles
1 : « Peux-tu écrire le produit 8 × 9 × 24 comme produit d'autres facteurs ? »
2 : « Peux-tu décomposer le nombre 8 × 9 × 24 en produit de facteurs premiers ? »

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève s'engage dans une démarche de résolution en factorisant de différentes manières le nombre 8 × 9 × 24.
2. L'élève décompose 8 × 9 × 24 en produit de facteurs premiers.
3. L'élève identifie une puissance troisième dans le produit 8 × 9 × 24.

Niveaux

niveau 2	L'élève a besoin du coup de pouce pour trouver les deux nombres.
niveau 3	L'élève résout l'exercice sans coup de pouce, mais ne parvient pas à expliciter sa démarche.
niveau 4	L'élève résout l'exercice et explicite sa démarche.

Remarque
Si un élève commence par calculer le produit, et cherche par essais-erreurs un entier n tel que n^3=1728, on ne peut plus observer les indicateurs ci-dessus. Néanmoins, l'évaluation du domaine 4 peut alors s'appuyer sur **le descripteur** « *Mettre en œuvre un protocole expérimental [...]* ».

Nombres premiers permutables

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Mener une démarche scientifique, résoudre un problème (D4)

DESCRIPTEURS
- Mettre en œuvre un raisonnement logique simple
- Communiquer sur ses démarches, ses résultats et ses choix en argumentant

ÉNONCÉ
On dit que le nombre premier 13 est un nombre premier permutable car le nombre 31, écrit avec les mêmes chiffres mais dans l'ordre inverse, est aussi premier.
Trouve tous les nombres premiers permutables à 2 chiffres et explicite ta stratégie de recherche.

Descriptif

Type de tâche
Tâche intermédiaire

Compétences principalement mobilisées
Raisonner, communiquer

Coups de pouce possibles
👍**1** : « 41 est-il un nombre premier permutable ? »
👍**2** : « As-tu bien trouvé tous les nombres premiers permutables à 2 chiffres ? »

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève trouve des nombres premiers permutables à 2 chiffres.
2. L'élève justifie qu'il les a bien tous.

Niveaux

niveau 2	L'indicateur 1 est réussi, éventuellement à l'aide du coup de pouce 👍**1**.
niveau 3	Les deux indicateurs sont réussis, éventuellement à l'aide du coup de pouce 👍**2**.
niveau 4	L'élève explicite la stratégie qu'il a mise en œuvre pour déterminer tous les nombres premiers permutables à 2 chiffres.

Conjecture

ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS

- Utiliser les nombres (D1-3)
- Exercer son esprit critique, faire preuve de réflexion et de discernement (D3)

DESCRIPTEURS

Selon l'élément signifiant évalué, la situation prend en compte des descripteurs différents :

- Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombre premier (D1-3)
- Distinguer ce qui relève d'une croyance ou d'une opinion et ce qui constitue un savoir (ou un fait) scientifique (D3)

ÉNONCÉ

Après avoir essayé plusieurs valeurs de l'entier naturel n, Rachel affirme : « n^2 -n + 11 est toujours un nombre premier ».

A-t-elle raison ?

Descriptif

Type de tâche

Tâche avec prise d'initiative

Compétences principalement mobilisées

Calculer, raisonner

Contexte d'évaluation

Afin d'évaluer l'élément signifiant retenu, cette situation doit être proposée à des élèves ayant déjà une maîtrise satisfaisante du **descripteur** « *Dans une expression littérale, substituer une lettre par une valeur numérique* » de **l'élément signifiant** « *Utiliser le calcul littéral* ».

Coup de pouce possible

👍 : « Quelles valeurs de n penses-tu que Rachel a testées ? »

Positionnement des élèves

La situation contribue à l'évaluation de plusieurs domaines du socle.

- **Concernant le domaine 1, composante 3**

ÉLÉMENT SIGNIFIANT

Utiliser les nombres (D1-3)

DESCRIPTEUR

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombre premier

Indicateur possible pour l'évaluation

Parmi les résultats obtenus en remplaçant n par une valeur numérique, l'élève reconnaît ceux qui sont premiers.

Niveaux

niveau 3	L'élève conclut correctement sur quelques valeurs de n mais a besoin du coup de pouce pour trouver une valeur contredisant Rachel.
niveau 4	L'élève conclut correctement, en donnant un contre-exemple.

- **Concernant le domaine 3**

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Exercer son esprit critique, faire preuve de réflexion et de discernement (D3)

DESCRIPTEUR
Distinguer ce qui relève d'une croyance ou d'une opinion et ce qui constitue un savoir (ou un fait) scientifique

Indicateur possible pour l'évaluation

Parmi les résultats obtenus en remplaçant n par une valeur numérique, l'élève reconnaît ceux qui sont premiers.

Niveaux

niveau 2	L'élève manifeste qu'il ne suffit pas de tester une propriété sur plusieurs valeurs pour affirmer qu'elle est toujours vraie.
niveau 3	L'élève conclut correctement, en donnant un contre-exemple, éventuellement à l'aide du coup de pouce.

Le chien et le navet

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser les nombres (D1-3)

DESCRIPTEURS
- Effectuer [...] des calculs engageant les quatre opérations [...]
- Passer d'une écriture d'un nombre à une autre

ÉNONCÉ
Le chien est neuf fois plus lourd que le chat, la souris est vingt fois plus légère que le chat et le navet est six fois plus lourd que la souris.
Alors le chien est certainement plus lourd que le navet, mais de combien de fois ?
a) 15 b) 2,7 c) 1 080 d) 30

Extrait du « kangourou des mathématiques »

Descriptif

Type de tâche
Tâche avec prise d'initiative

Compétences principalement mobilisées
Modéliser, calculer

Coups de pouce possibles
1 : « Range le chien, le chat, la souris et le navet du plus léger au plus lourd. »
2 : « Quel est le rapport des poids du navet et du chat ? »

Positionnement des élèves

Indicateurs possible pour l'évaluation
1. L'élève comprend qu'il s'agit d'un problème multiplicatif.
2. L'élève calcule les rapports de poids utiles.

Niveaux

niveau 1	L'élève ne parvient à trouver aucun des rapports de poids mis en jeu.
niveau 2	L'élève trouve le rapport des poids du chien et de la souris ou de la souris et du navet, mais ne parvient pas à les combiner correctement.
niveau 3	L'élève réussit les deux indicateurs et résout l'exercice.
niveau 4	L'élève calcule avec la valeur exacte du quotient et trouve $\frac{20}{6} \times 9 = 30$

Décimal ou pas ?

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser les nombres (D1-3)

DESCRIPTEURS

- Passer d'une écriture d'un nombre à une autre (écritures décimale et fractionnaire [...])
- Effectuer (mentalement, à la main, à la calculatrice, à l'aide d'un tableur) des calculs engageant les quatre opérations [...] sur des nombres rationnels positifs ou négatifs

ÉNONCÉ
Dans chaque cas, dire si la fraction proposée est un nombre décimal.

Si oui, donner l'écriture décimale du nombre.

a) $\frac{49}{140}$ b) $\frac{15}{54}$ c) $\frac{25}{40}$ d) $\frac{72}{320}$

Descriptif

Type de tâche
Tâche intermédiaire

Compétence principalement mobilisée
Calculer

Contexte d'évaluation
Calculatrice non autorisée.

Positionnement des élèves

Indicateurs possible pour l'évaluation

1. L'élève simplifie les fractions proposées élève comprend qu'il s'agit d'un problème multiplicatif.
2. L'élève écrit, quand c'est possible, les fractions proposées sous une forme décimale.

Niveaux

niveau 2	L'élève simplifie les fractions proposées, sans écrire les dénominateurs sous la forme de puissances de 10.
niveau 3	L'élève répond correctement aux cas a) et c).
niveau 4	L'élève répond correctement aux quatre cas en raisonnant rigoureusement.

Partage de gains

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Mener une démarche scientifique, résoudre un problème (D4)

DESCRIPTEURS
- Modéliser [...] des phénomènes [...]
- Pratiquer le calcul numérique (exact et approché) et le calcul littéral

ÉNONCÉ
Des amis ont gagné à une loterie et doivent se partager les gains selon leur mise.
1) Nathalie doit recevoir les deux septièmes de 560 €.

Quelle somme d'argent reçoit Nathalie ?

2) Rémi et Thomas ont également gagné. Rémi a reçu 200 €, qui représentent les cinq septièmes de la somme reçue par Thomas.

À combien s'élève le gain de Thomas ?

3) Pierre, Sandrine et Christine se partagent le gros lot. Pierre reçoit le tiers de cette somme, Sandrine, les deux cinquièmes et Christine empoche le reste.

Quelle fraction du gros lot représente la part de Christine ?

Descriptif

Type de tâche
Tâche intermédiaire

Compétences principalement mobilisées
Modéliser, calculer

Coup de pouce possible
👍 : « Si le gros lot vaut 300 €, quelle somme Christine reçoit-t-elle ? »

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève calcule une fraction d'un nombre donné.
2. L'élève interprète une fraction comme une proportion d'une grandeur dont la valeur n'est pas nécessairement connue.

Niveaux

niveau 2	L'élève ne réussit que la première question.
niveau 3	L'élève réussit en autonomie les deux premières questions, **ET** il traite correctement la troisième question, grâce au coup de pouce.
niveau 4	L'élève traite correctement les trois questions, sans recourir à une valeur fictive.

De l'eau à la glace

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Mener une démarche scientifique, résoudre un problème (D4)

DESCRIPTEURS

- Extraire, organiser les informations utiles et les transcrire dans un langage adapté
- Pratiquer le calcul numérique (exact ou approché)
- Communiquer sur ses démarches, ses résultats et ses choix, en argumentant

ÉNONCÉ
Lisa a placé au congélateur une bouteille d'eau d'une contenance de 1L remplie au $\frac{8}{9}$ de sa capacité.

Sachant que le volume d'eau augmente d'environ 9 % lorsque l'eau passe de l'état liquide à l'état solide, est-on sûr que la bouteille pourra contenir toute la glace ? Argumenter la réponse.

Descriptif

Type de tâche
Tâche intermédiaire

Compétences principalement mobilisées
Chercher, calculer, communiquer

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève utilise la fraction pour calculer le volume initial d'eau.
2. L'élève applique correctement un pourcentage d'augmentation de 9%, même si le volume d'eau initial n'est pas correct.
3. L'élève argumente sa réponse à la question posée.

Niveaux

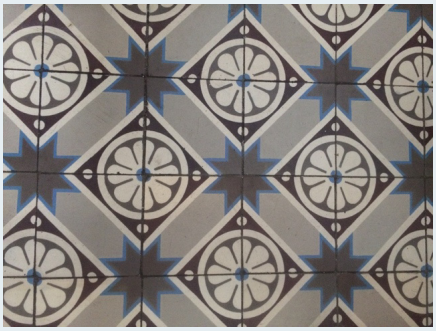
niveau 2	L'un des deux indicateurs 1 ou 2 est réussi.
niveau 3	Les deux indicateurs sont réussis, mais l'argumentation est insuffisante.
niveau 4	Les trois indicateurs sont réussis.

Carrelage

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser l'algorithmique et la programmation pour créer des applications simples (D1-3)

DESCRIPTEUR
Expliquer le déroulement et le résultat produit par un algorithme simple

ÉNONCÉ
À l'aide de carreaux identiques, Victor souhaite simuler la pose d'un carrelage dont la photo ci-dessous présente une partie.



Avant d'écrire son algorithme, Victor a importé un carreau comme lutin. Ce carreau a une taille de 44 pixels. Le centre du lutin correspond au centre du carreau.

Quel est l'effet de cet algorithme ? Répond-il à l'objectif fixé ?

Si la réponse est « non », modifier le programme pour qu'il réponde à la question posée.

Descriptif

Type de tâche
Tâche intermédiaire

Compétences principalement mobilisées
Chercher, raisonner

Contexte d'évaluation
Cette situation suppose que l'élève est familier des transformations géométriques et des pavages et qu'il connaît l'effet du bloc « Estampiller ».

La première question peut être proposée en mode débranché. La deuxième nécessite la mise à disposition d'un ordinateur.

Des photocopies du carreau de base sont à disposition des élèves.

Coup de pouce possible
👍 : « À l'aide des photocopies du carreau de base, simule l'effet de cet algorithme. »

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève fait référence à une rotation et à une translation.
2. L'élève mentionne que le programme produit seulement un pavage de quatre carreaux.
3. L'élève modifie le programme pour qu'il pave la portion de couloir souhaitée.

Niveaux

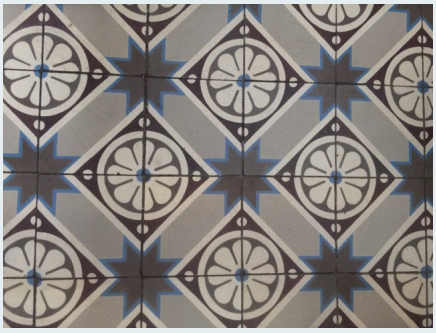
niveau 2	Le premier indicateur est réussi, éventuellement avec le coup de pouce.
niveau 3	Les deux premiers indicateurs sont réussis, éventuellement avec le coup de pouce.
niveau 4	Les trois indicateurs sont réussis, éventuellement avec le coup de pouce.

Pavage

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser et produire des représentations d'objets (D1-3)

DESCRIPTEUR
Utiliser et produire des figures géométriques

ÉNONCÉ
On souhaite obtenir le pavage ci-dessous.



On dispose du motif de base ci-dessous.

Décris les transformations géométriques qu'on peut appliquer successivement au motif de base pour obtenir le pavage souhaité.

Descriptif

Type de tâche
Tâche intermédiaire

Compétences principalement mobilisées
Représenter, communiquer

Contexte d'évaluation
Des reproductions sur papier calque du motif de base sont à disposition des élèves.

Coups de pouce possibles
👍**1** : « Peux-tu retrouver le motif de base dans le pavage ? »
👍**2** : « Tu peux utiliser les reproductions du motif mises à ta disposition. »
👍**3** : « Fais lire ta réponse à l'un de tes camarades pour vérifier qu'il la comprend. »

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

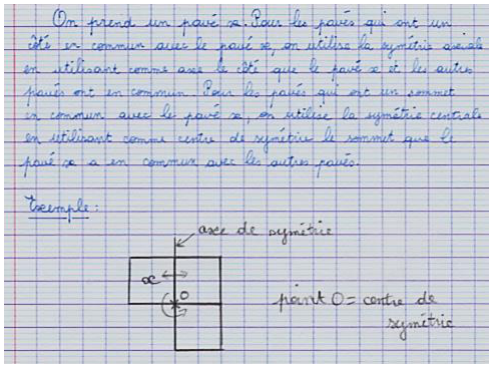
1. L'élève identifie la nature des transformations géométriques permettant de passer du motif de base au pavage.
2. L'élève ordonne correctement les transformations utilisées.
3. L'élève utilise le langage mathématique pour décrire précisément les transformations mises en jeu (éléments caractéristiques).

Niveaux

niveau 2	Le premier indicateur est réussi, éventuellement avec les coups de pouce 👍**1** et 👍**2**, mais la proposition de l'élève est une description perceptive qui ne fait pas appel au vocabulaire mathématique attendu.
niveau 3	Les deux premiers indicateurs sont réussis, éventuellement avec le coup de pouce 👍**2**.
niveau 4	Les trois indicateurs sont réussis, éventuellement à l'aide du coup de pouce 👍**3**.

Exemples de productions d'élèves

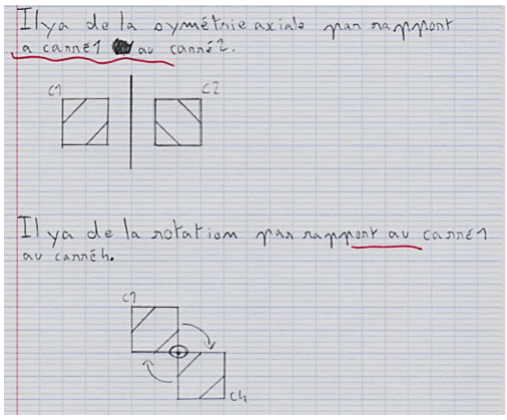
- **Production 1**



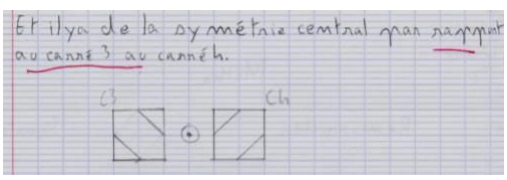
Cette production correspond au niveau 3 : les indicateurs 2 et 3 sont réussis ; l'indicateur 1 ne l'est que partiellement, l'élève n'ayant pas identifié les translations.

Par ailleurs, cette production contribue à évaluer au niveau 4 **l'élément signifiant** « *Écrire* », qui relève de la composante 1 du domaine 1, pour **le descripteur** « *rédiger un texte dans une langue suffisamment maîtrisée pour que son intelligibilité ne soit pas compromise* ».

- **Production 2**

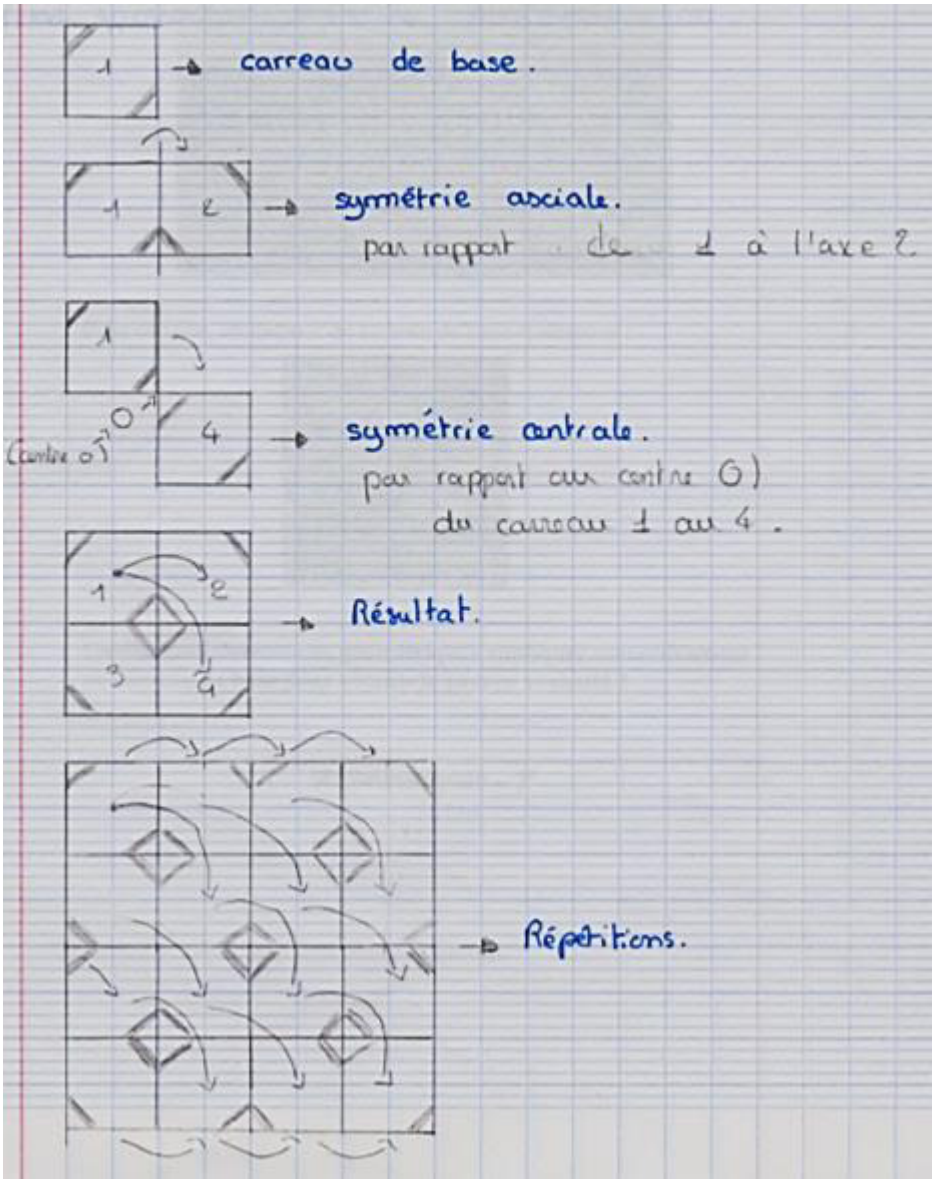


Cette production correspond au niveau 1. Les deux symétries sont inadaptées puisque les carreaux ne sont pas adjacents.
Les transformations ne sont pas intégrées dans un protocole de construction.



Retrouvez Éduscol sur

- Production 3



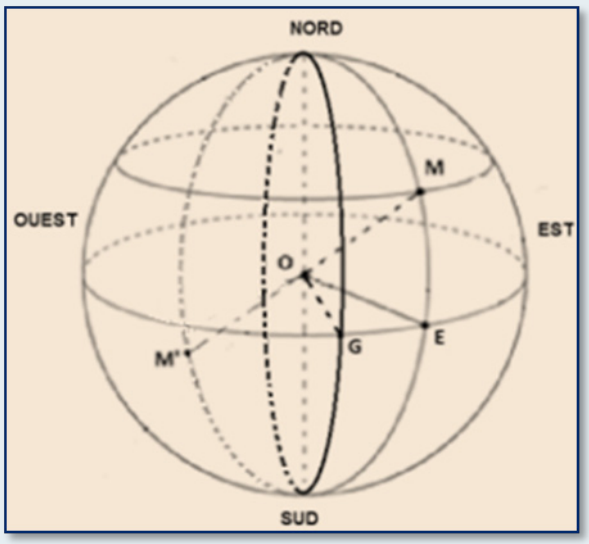
Même si l'élève parle de répétitions et non de translations, cette production correspond au degré de maîtrise 4 : toutes les transformations géométriques adaptées à la situation sont identifiées, correctement ordonnées, et les éléments caractéristiques sont apparents.

Repérage géographique

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Situer et se situer dans le temps et l'espace (D5)

DESCRIPTEUR
Maîtriser de manière autonome des repères dans l'espace

ÉNONCÉ



Le point E est sur l'équateur.
Le point G est sur le méridien de Greenwich.
Les coordonnées géographiques du point M sont 40° Nord et 25° Est. Le point M' est diamétralement opposé au point M.

1. Déterminer les coordonnées géographiques de G et de E.

2. Déterminer les coordonnées géographiques de M'.

Descriptif

Type de tâche
Tâche intermédiaire

Compétence principalement mobilisée
Représenter

Coups de pouce possibles
👍**1** : « Quel point de la figure a la même longitude que le point E ? »
👍**2** : « Les points O, M, M' et E sont-ils dans un même plan ? Tu peux t'aider d'une figure dans ce plan. »

Positionnement des élèves

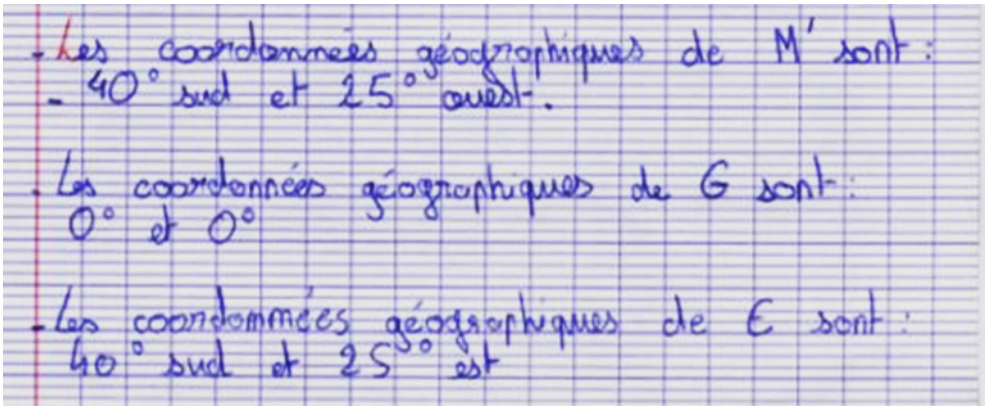
Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève détermine les coordonnées géographiques de G et de E.
2. L'élève détermine la latitude de M'.
3. L'élève détermine la longitude de M'.

Niveaux

niveau 2	Les deux premiers indicateurs sont réussis, éventuellement avec coup de pouce.
niveau 3	Les deux premiers indicateurs sont réussis sans coup de pouce.
niveau 4	Les trois indicateurs sont réussis sans coup de pouce.

Exemple de production d'élève : Axel



Cette production correspond au niveau 2.
L'erreur inattendue sur la latitude du point E fait obstacle à l'attribution du niveau 3.

Publicité

ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS

- Utiliser et produire des représentations d'objets (D1-3)
- Exercer son esprit critique, faire preuve de réflexion et de discernement (D3)

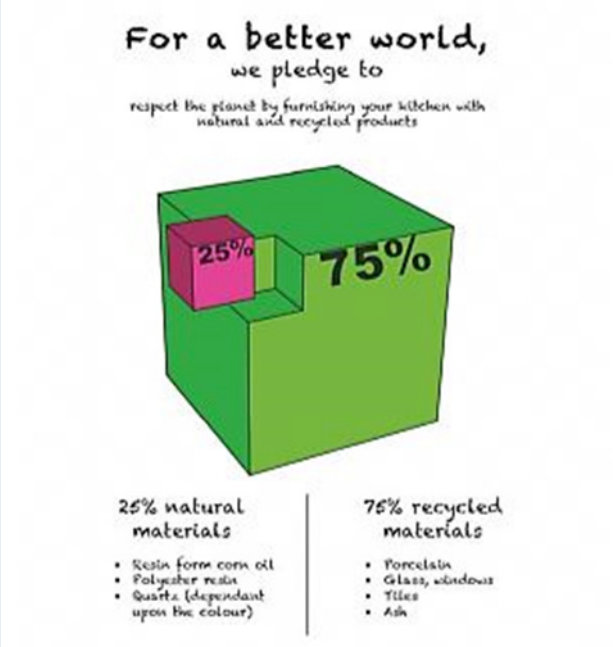
DESCRIPTEURS

Selon l'élément signifiant évalué, la situation prend en compte des descripteurs différents :

- Utiliser et produire des représentations de solides (D1-3)
- Distinguer la perception subjective de l'analyse objective (D3)

ÉNONCÉ

La publicité ci-contre vise à exprimer que la proportion de produits naturels est égale à 25% de la production totale, et que celle de produits recyclés est égale à 75% de la production totale.



1. Quelle démarche a pu aboutir à cette représentation ?
2. Est-elle conforme à l'objectif visé ?

Descriptif

Type de tâche

Tâche à prise d'initiative

Compétences principalement mobilisées

Représenter, communiquer

Coup de pouce possible

👍 : « Quels liens existe-t-il entre les dimensions du petit cube et du grand cube ? »

Positionnement des élèves

La situation contribue à l'évaluation de plusieurs domaines du socle.

- **Concernant le domaine 1, composante 3**

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser et produire des représentations d'objets (D1-3)

DESCRIPTEUR
Utiliser et produire des représentations de solides

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève observe le rapport d'un quart entre les côtés des deux cubes.
2. L'élève connaît l'effet d'un agrandissement sur un volume.

Niveaux

niveau 2	L'indicateur 1 est réussi, éventuellement avec le coup de pouce : l'élève perçoit que le cube rose est trop petit sans s'appuyer sur une argumentation mathématique.
niveau 3	L'indicateur 1 est réussi sans coup de pouce, **ET** l'indicateur 2 est réussi, mais la formulation est maladroite : par exemple, l'élève justifie par un schéma que 4 cubes roses n'ont pas le même volume que le grand cube.
niveau 4	Les deux indicateurs sont réussis et l'argumentation de l'élève est précise et rigoureuse.

- **Concernant le domaine 3**

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Exercer son esprit critique, faire preuve de réflexion et de discernement (D3)

DESCRIPTEUR
Distinguer la perception subjective de l'analyse objective

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève se rend compte de l'erreur de représentation.
2. L'élève s'appuie sur un argument mathématique pour contester la représentation.

Niveaux

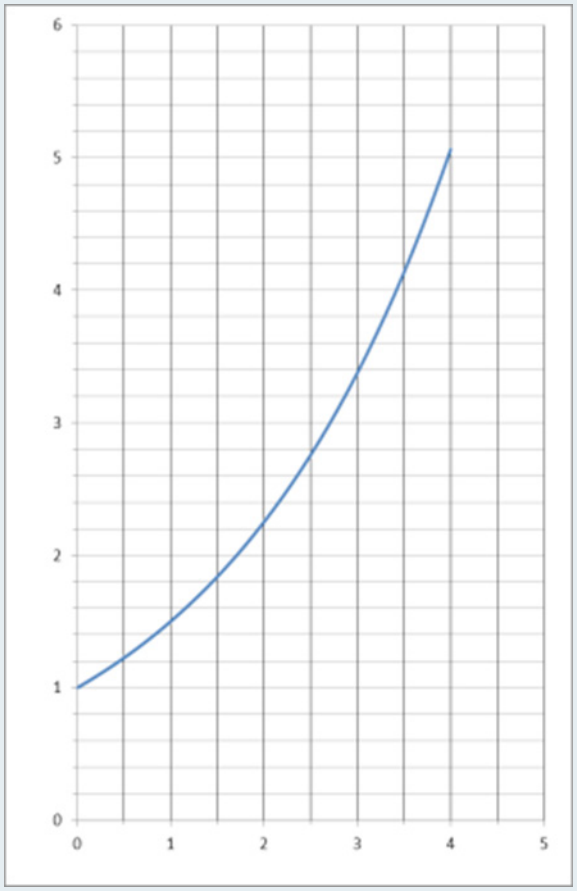
niveau 2	L'indicateur 1 est réussi, éventuellement avec le coup de pouce : l'élève perçoit que le cube rose est trop petit sans s'appuyer sur une argumentation mathématique.
niveau 3	L'indicateur 1 est réussi sans coup de pouce, **ET** l'indicateur 2 est réussi, mais la formulation est maladroite : par exemple, l'élève justifie par un schéma que 4 cubes roses n'ont pas le même volume que le grand cube.
niveau 4	Les deux indicateurs sont réussis et l'argumentation de l'élève est précise et rigoureuse.

Bactéries

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Passer d'un langage à un autre (D1-3)

DESCRIPTEUR
Passer d'un registre de représentation à un autre (tableau, graphique, croquis, symbole, schéma, etc.)

ÉNONCÉ



Une expérience est réalisée pour étudier l'évolution du nombre de bactéries dans un milieu durant 4 heures.
Ci-dessous est représentée l'évolution du nombre de bactéries en fonction de la durée écoulée. Le nombre de bactéries est exprimé en milliers.
1. Combien de bactéries sont présentes dans le milieu au début de l'expérience ? Aucune justification n'est demandée.
2. Quelle durée se sera écoulée depuis le début de l'expérience lorsque le nombre de bactéries aura triplé ?
3. Le nombre de bactéries est-il proportionnel à la durée écoulée ? Justifier.
4. On appelle f la fonction définie pour tout nombre x positif par f(x) = x + 1.

Cette fonction exprime-t-elle le nombre de bactéries (en milliers) en fonction de la durée écoulée ? Justifier.

Descriptif

Type de tâche
Tâche intermédiaire

Compétences principalement mobilisées
Modéliser, représenter

Coup de pouce possible

👍 : « Comment reconnaît-on une situation de proportionnalité sur un graphique ? »

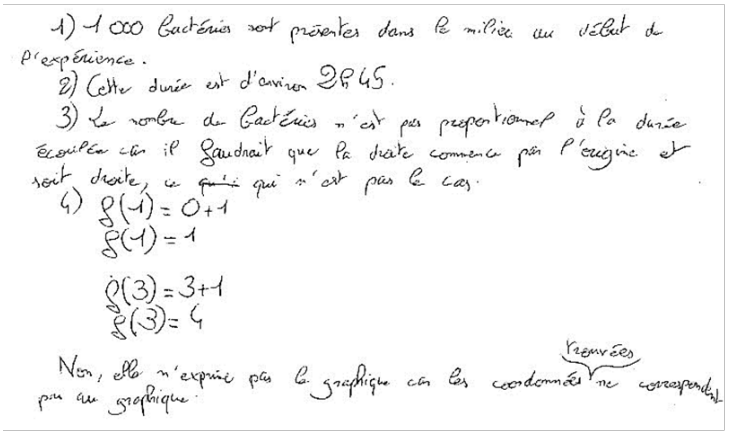
Positionnement des élèves

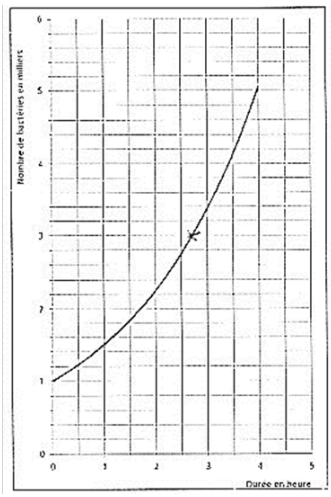
Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève interprète graphiquement l'énoncé des deux premières questions.
2. L'élève interprète graphiquement la proportionnalité.
3. L'élève interprète graphiquement une fonction affine.

Exemples de productions d'élèves

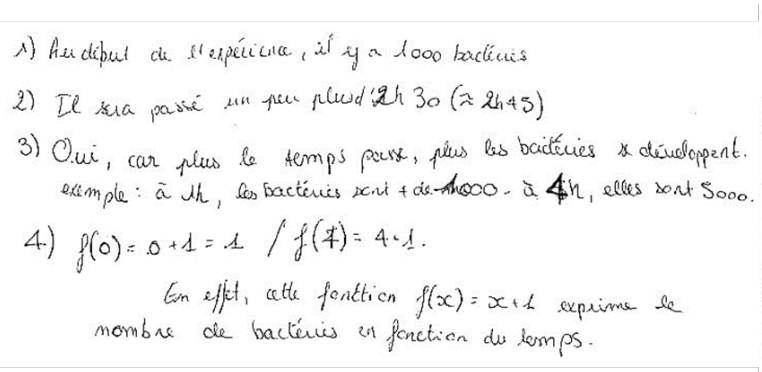
- **Production 1**

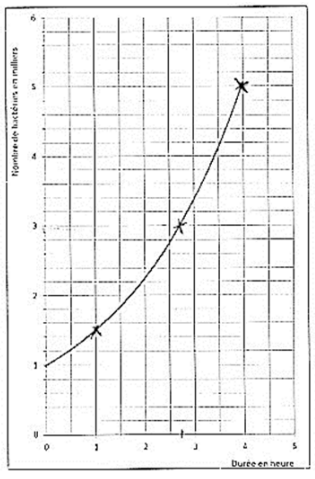

1) 1 000 Bactéries sont présentes dans le milieu au début de l'expérience.
2) Cette durée est d'environ 2h45.
3) Le nombre de bactéries n'est pas proportionnel à la durée écoulée car il faudrait que la droite commence par l'origine et soit droite, ce qui n'est pas le cas.
4) f(1) = 0+1
f(1) = 1
f(3) = 3+1
f(3) = 4
Non, elle n'exprime pas le graphique car les coordonnées ne correspondent pas au graphique.



Cette production correspond à un niveau 4.

- **Production 2**


1) Au début de l'expérience, il y a 1 000 bactéries
2) Il sera passé un peu plus d'2h 30 (≈ 2h45)
3) Oui, car plus le temps passe, plus les bactéries se développent.
exemple : à 1h, les bactéries sont + de 1000 - à 4h, elles sont 5000.
4) f(0) = 0 + 1 = 1 / f(4) = 4+1.
En effet, cette fonction f(x) = x+1 exprime le nombre de bactéries en fonction du temps.



Cette production correspond à un niveau 2, les réponses aux questions 3 et 4 révélant des incompréhensions.

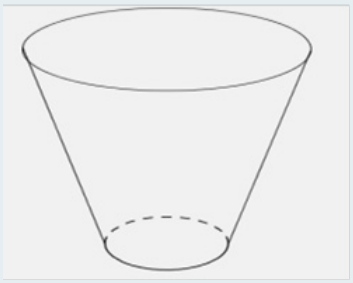
Cône de sel

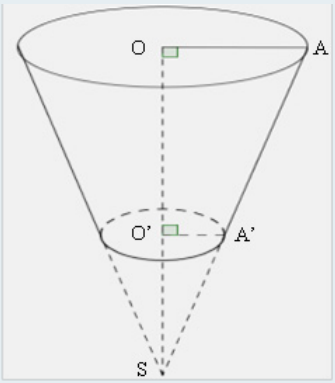
ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser et produire des représentations d'objets (D1-3)

DESCRIPTEURS

- Utiliser et produire des figures géométriques
- Utiliser et produire des représentations de solides
- Comprendre l'effet de quelques transformations (déplacements, agrandissements-réductions) sur des grandeurs géométriques

ÉNONCÉ
On considère le récipient ci-dessous, obtenu à partir du cône ci-contre que l'on a coupé.





On a : OA = 30 cm ; SO = 50 cm et SO' = 20 cm.

On remplit ce récipient de sel.

Sachant que la masse volumique du sel est de 2,16 kg/L, calculer la masse du sel contenu dans le récipient ?

On rappelle que le volume d'un cône de révolution est donné par la formule :

$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$ où R représente le rayon de la base et h la hauteur du cône.

Descriptif

Type de tâche
Tâche intermédiaire

Compétences principalement mobilisées
Représenter, calculer

Coups de pouce possibles
1 : « Que représente la masse volumique ? »
2 : « Quels cônes apparaissent sur la figure ? »
3 : « Quelles sont les dimensions du petit cône ? »

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève identifie la hauteur et le rayon du grand cône à partir de sa représentation.
2. L'élève utilise le théorème de Thalès pour trouver le rayon du petit cône.
3. L'élève utilise l'effet d'une réduction sur un volume.

Niveaux

niveau 2	L'élève réussit le premier indicateur et calcule le volume du grand cône.
niveau 3	L'élève réussit le premier indicateur et calcule le volume du grand cône **ET** l'élève calcule le volume du petit cône en réussissant le deuxième ou le troisième indicateur, sans vérifier explicitement les hypothèses des théorèmes utilisés.
niveau 4	L'élève calcule le volume du récipient en vérifiant explicitement les hypothèses des théorèmes utilisés.

Remarque

Cette situation permet d'évaluer d'autres éléments signifiants :

• « *Utiliser le calcul littéral (composante 3 du domaine 1)* » avec comme **descripteur** « *Dans une expression littérale, substituer une lettre par une valeur numérique, en utilisant si nécessaire les unités adaptées.* »

• « *Exprimer une grandeur mesurée ou calculée dans une unité adaptée (composante 3 du domaine 1)* » avec comme **descripteurs** « *Accompagner de son unité toute valeur numérique d'une grandeur physique mesurée, calculée ou fournie.* » et « *Utiliser, dans des calculs numériques, un système d'unités cohérent.* »

Proportionnalité

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser les nombres (D1-3)

DESCRIPTEUR
Reconnaitre et résoudre une situation de proportionnalité

ÉNONCÉ
A. Dans une recette pour 8 personnes, il est demandé 400 g de farine.
Quelle quantité de farine faudra-t-il pour réaliser cette recette pour 10 personnes ?

B. 4 kg de pommes coûtent 10 €. Combien coûtent 6 kg de ces pommes ?

C. 7 sucettes identiques coûtent 11,20 € et 5 de ces mêmes sucettes coûtent 8 €.
Combien coûtent 17 de ces sucettes ?

Descriptif

Type de tâche
Question flash

Compétence principalement mobilisée
Calculer

Contexte de l'évaluation
Activité mentale.
Les variables didactiques ont été choisies pour permettre des stratégies efficaces et rapides.

Positionnement des élèves

Indicateur possible pour l'évaluation

L'élève donne une réponse correcte.

Niveau

niveau 3	L'indicateur est réussi à toutes les questions.

Éolienne

ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS

- Passer d'un langage à un autre (D1-3)
- Exprimer une grandeur mesurée ou calculée dans une unité adaptée (D1-3)

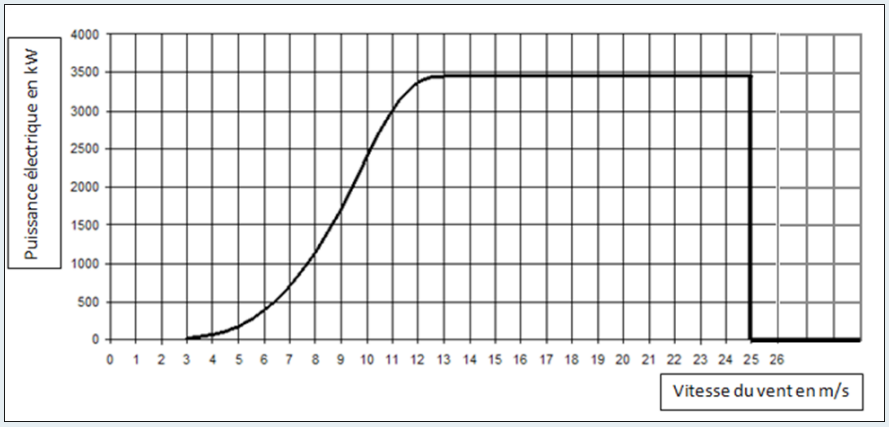
DESCRIPTEURS

Selon l'élément signifiant évalué, la situation prend en compte des descripteurs différents :

- Passer du langage courant à un langage scientifique ou technique et vice versa
- Utiliser [...] un système d'unités cohérent

ÉNONCÉ

Le graphique ci-dessous donne la puissance (exprimée en kW) délivrée par une éolienne selon la vitesse du vent (exprimée en m/s).



Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique.

1. Pour quelles vitesses du vent l'éolienne produit-elle de l'électricité ?
2. Quelle est la puissance maximale délivrée par l'éolienne ?
3. La vitesse du vent augmente jusqu'à atteindre 100 km/h. Expliquer par une phrase ce qui se passe.

Descriptif

Type de tâche

Tâche intermédiaire

Compétences principalement mobilisées

Représenter, modéliser

Coup de pouce possible

👍 : « Comment placer sur le graphique une vitesse de 100 km/h ? »

Positionnement des élèves

• **Pour l'élément signifiant « Passer d'un langage à un autre »**

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Passer d'un langage à un autre (D1-3)

DESCRIPTEUR
Passer du langage courant à un langage scientifique ou technique et vice versa

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève interprète correctement le graphique jusqu'à l'arrêt de la production.
2. L'élève interprète correctement le graphique en termes d'arrêt de la production.

Niveaux

niveau 2	Seul le premier indicateur est réussi.
niveau 3	Les deux premiers indicateurs sont réussis.

• **Pour l'élément signifiant « Exprimer une grandeur mesurée ou calculée dans une unité adaptée »**

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Exprimer une grandeur mesurée ou calculée dans une unité adaptée (D1-3)

DESCRIPTEUR
Utiliser [...] un système d'unités cohérent

Indicateurs possibles pour l'évaluation

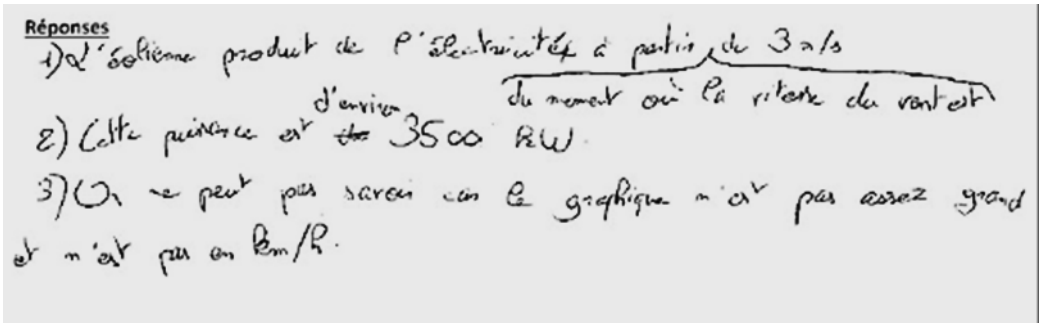
L'élève convertit les km/h en m/s ou vice versa.

Niveaux

niveau 3	L'élève place correctement sur le graphique la vitesse de 100 km/h.

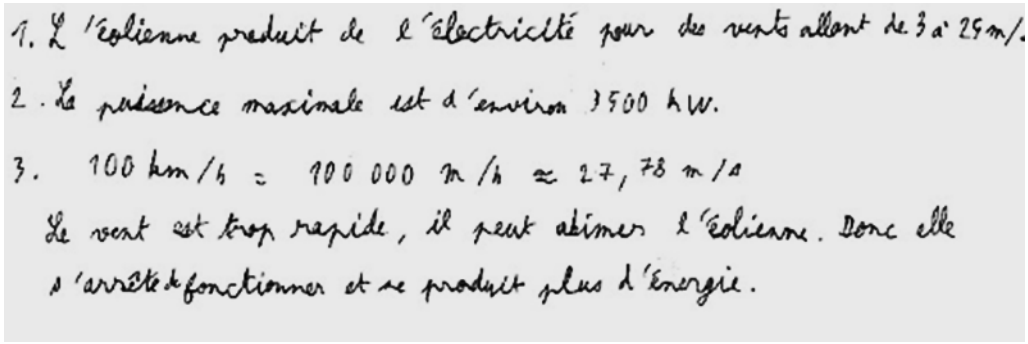
Exemples de productions d'élèves

- **Production 1**


Réponses
1) L'éolienne produit de l'électricité à partir de 3 m/s du moment où la vitesse du vent est
2) Cette puissance est d'environ 3500 kW
3) On ne peut pas savoir car le graphique n'est pas assez grand et n'est pas en km/h.

Cette production correspond à un niveau 2, la question 3 n'ayant pas été traitée correctement.

- **Production 2**


1. L'éolienne produit de l'électricité pour des vents allant de 3 à 25 m/s.
2. La puissance maximale est d'environ 3500 kW.
3. 100 km/h = 100 000 m/h ≈ 27,78 m/s
Le vent est trop rapide, il peut abimer l'éolienne. Donc elle s'arrête de fonctionner et ne produit plus d'énergie.

Cette production correspond à un niveau 4.

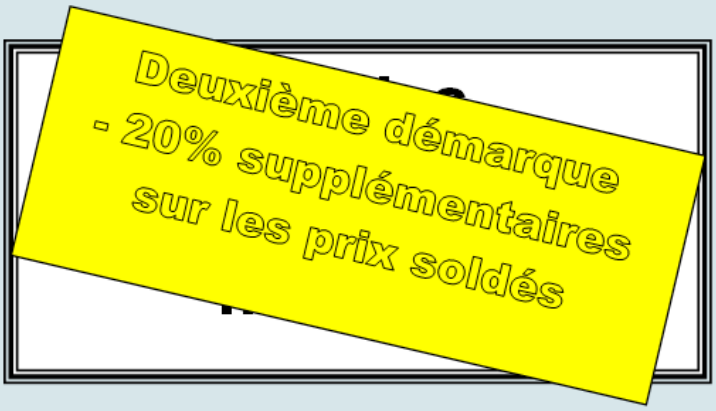
Soldes

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser les nombres (D1-3)

DESCRIPTEUR
Reconnaître et résoudre une situation de proportionnalité

ÉNONCÉ
Le premier jour des soldes la vitrine d'un magasin affiche :

Puis, après deux semaines :



Estelle et Marc passant devant cette nouvelle affiche s'interrogent sur la remise par rapport au prix de départ à la suite des deux démarques.
Marc affirme que tous les articles sont à moitié prix.
Estelle affirme que la remise est seulement de 44% du prix de départ.

Qui a raison ?

Descriptif

Type de tâche
Tâche intermédiaire

Compétence principalement mobilisée
Calculer

Coup de pouce possible

👍 : « Quel est le prix final d'un article coûtant au départ 100 € ? »

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

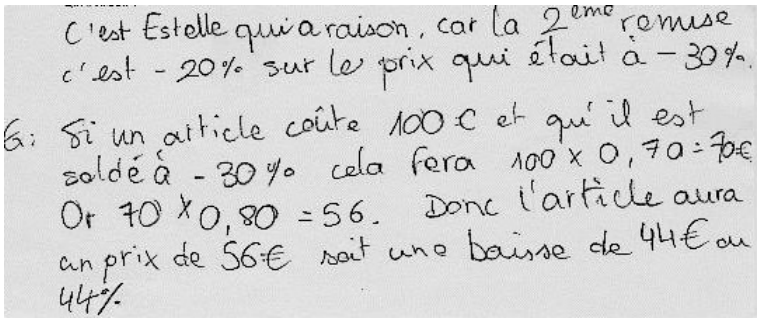
1. L'élève applique correctement un pourcentage de réduction.
2. L'élève calcule correctement un taux de réduction à partir du prix initial et du prix final.

Niveaux

niveau 2	L'élève réussit au moins une fois le premier indicateur avec le coup de pouce.
niveau 3	L'élève calcule le prix final et le taux de remise correspondant, avec le coup de pouce.
niveau 4	L'élève réussit les deux indicateurs en autonomie.

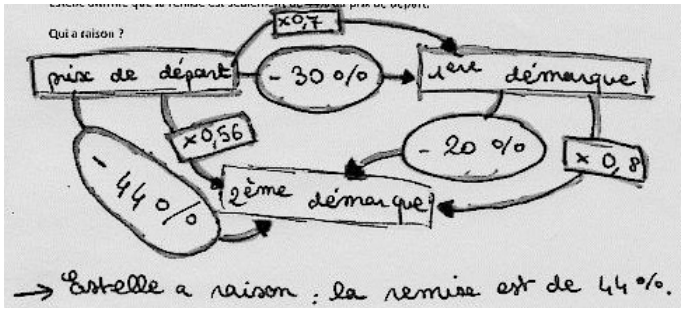
Exemples de productions d'élèves

- **Production 1**



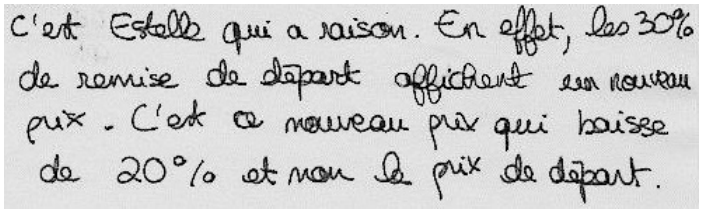
Cette production correspond à un niveau 3 si l'élève a eu besoin du coup de pouce, à un niveau 4 sinon.

- **Production 2**



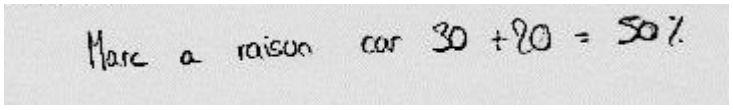
Cette production correspond à un niveau 4.

- **Production 3**



Cette production correspond au niveau 2, même si l'élève a bien compris l'erreur commise par Marc.

- **Production 4**



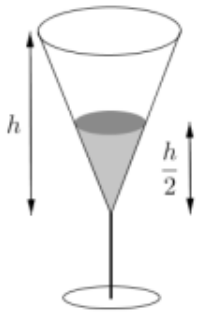
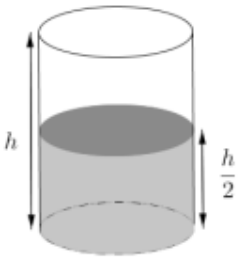
Cette production ne correspond pas au niveau 2.

Drôles de verres

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser et produire des représentations d'objets (D1-3)

DESCRIPTEUR
Comprendre l'effet de quelques transformations (déplacements, agrandissements-réductions) sur des grandeurs géométriques

ÉNONCÉ
On considère deux verres remplis à mi-hauteur.
Pour chacun d'eux quelle proportion du volume total du verre représente le volume de liquide ?
Trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.

		RÉPONSE A	RÉPONSE B	RÉPONSE C
Verre n°1		Le volume de liquide représente la moitié du volume total du verre	Le volume de liquide représente le quart du volume total du verre	Le volume de liquide représente le huitième du volume total du verre
Verre n°2		Le volume de liquide représente la moitié du volume total du verre	Le volume de liquide représente le quart du volume total du verre	Le volume de liquide représente le huitième du volume total du verre

Descriptif

Type de tâche
Tâche intermédiaire

Compétences principalement mobilisées
Représenter, calculer

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève reconnaît qu'il s'agit d'une situation d'agrandissement/réduction dans le cas du premier verre.
2. L'élève reconnaît qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité dans le cas du second verre.
3. L'élève connaît l'effet sur les volumes dans chacun des deux cas.

Niveaux

niveau 2	L'élève réussit le deuxième indicateur.
niveau 3	L'élève réussit les deux premiers indicateurs.
niveau 4	L'élève réussit les trois indicateurs.

Celsius et Fahrenheit

ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS

Selon la stratégie retenue par l'élève, sa démarche, sa production, la situation permet d'évaluer des éléments signifiants différents :

- Utiliser le calcul littéral (D1-3)
- Mener une démarche scientifique, résoudre un problème (D4)

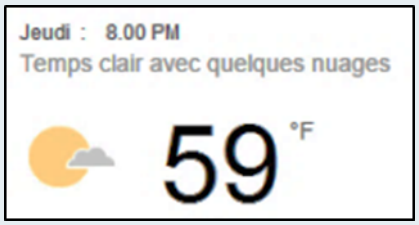
DESCRIPTEURS

Selon l'élément signifiant évalué, la situation prend en compte des descripteurs différents :

- Dans une expression littérale, substituer une lettre par une valeur numérique, en utilisant si nécessaire les unités adaptées (D1-3)
- Mettre en équation un problème simple (D1-3)
- Résoudre une équation du premier degré (D1-3)
- Mettre en œuvre un raisonnement logique simple (D4)
- Modéliser, représenter des phénomènes et des objets (D4)
- Pratiquer le calcul numérique (exact et approché) et le calcul littéral (D4)
- Communiquer sur ses démarches, ses résultats et ses choix en argumentant (D4)

ÉNONCÉ

En France, les températures sont mesurées en degrés Celsius noté °C.
Les pays anglo-saxons utilisent le degré Fahrenheit noté °F.
Si on connaît la mesure T en degrés Celsius d'une température, sa mesure T' en degrés Fahrenheit est donnée par la formule : $T' = T \times 1{,}8 + 32$.
1) À combien de degrés Fahrenheit correspond une température de – 4°C ?
2) On lit le message suivant sur un site internet :



Quelle température afficherait un thermomètre français ?
3) Est-il possible que deux thermomètres, placés au même endroit, l'un gradué en degrés Celsius et l'autre en degrés Fahrenheit affichent au même moment la même température ?

Descriptif

Type de tâche

Tâche avec prise d'initiative

Compétences principalement mobilisées

Calculer, modéliser

Contexte d'évaluation

Travail individuel ; calculatrice autorisée.

Coups de pouce possibles

👍**1** : « La mesure de température que tu utilises est-elle exprimée en degrés Fahrenheit ou Celsius ? »
👍**2** : « Comment peut-on exprimer T à l'aide de T' ? »
👍**3** : « As-tu pensé aux températures négatives (en degrés Celsius) ? »

Positionnement des élèves

Selon la stratégie retenue par l'élève, sa démarche, sa production, la situation permet d'évaluer des éléments signifiants différents.

• Si l'élève choisit de recourir à des équations pour traiter l'une ou l'autre des questions 2 et 3.

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser le calcul littéral (D1-3)

DESCRIPTEURS
- Dans une expression littérale, substituer une lettre par une valeur numérique, en utilisant si nécessaire les unités adaptées (D1-3)
- Mettre en équation un problème simple (D1-3)
- Résoudre une équation du premier degré (D1-3)

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève substitue une lettre par une valeur numérique dans une formule littérale.
2. L'élève modélise une situation par une équation du premier degré et résout algébriquement cette équation.

Niveaux

niveau 2	L'élève réussit le premier indicateur, éventuellement avec coup de pouce, sur les questions 1 et 2.
niveau 3	L'élève réussit en autonomie les questions 1 et 2, et la question 3 avec le coup de pouce 👍**3**.
niveau 4	L'élève réussit intégralement l'exercice en autonomie.

• Si l'élève choisit d'utiliser une démarche numérique, en remontant le programme de calcul (question 2) ou en utilisant des essais successifs, pour traiter l'une ou l'autre des questions 2 et 3.

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Mener une démarche scientifique, résoudre un problème (D4)

DESCRIPTEURS
- Mettre en œuvre un raisonnement logique simple (D4)
- Modéliser, représenter des phénomènes et des objets (D4)
- Pratiquer le calcul numérique (exact et approché) et le calcul littéral (D4)
- Communiquer sur ses démarches, ses résultats et ses choix en argumentant (D4)

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève remonte un programme de calcul.
2. L'élève résout une équation par essais successifs.
3. L'élève explicite sa démarche à l'oral ou à l'écrit.

Niveaux

niveau 2	Les indicateurs 1 et 2 sont réussis avec éventuellement l'un des coups de pouce.
niveau 3	Les indicateurs 1 et 2 sont réussis, avec éventuellement le coup de pouce **2**.
niveau 4	Tous les indicateurs sont réussis en autonomie.

Pavé droit et calcul littéral

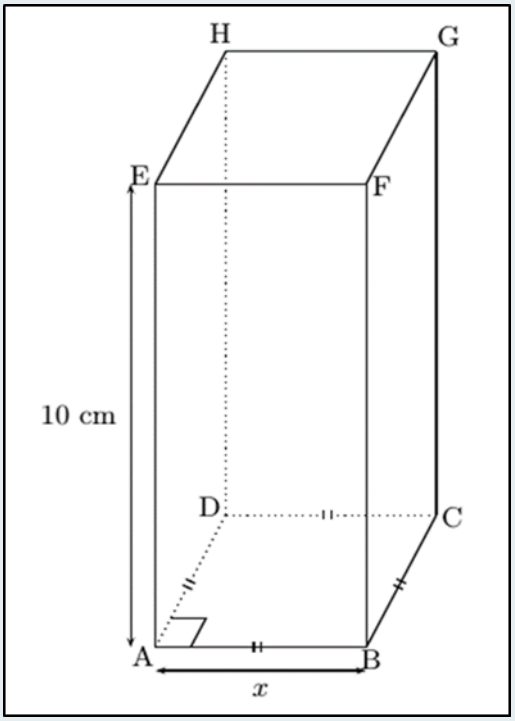
ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser le calcul littéral (D1-3)

DESCRIPTEURS

- Citer et utiliser des expressions littérales, notamment pour exprimer une grandeur en fonction d'autres grandeurs
- Développer et factoriser des expressions littérales dans des cas très simples

ÉNONCÉ

ABCDEFGH est un pavé droit. Ses faces ABCD et EFGH sont des carrés.
La longueur AE vaut 10 cm. La longueur du côté AB est notée x.



1. Parmi les expressions littérales proposées ci-dessous , choisir toutes celles qui permettent de calculer chacune des grandeurs indiquées (dans certains cas, plusieurs réponses conviennent ; dans la liste, il y a au moins une réponse inutile).

PÉRIMÈTRE DU CARRÉ ABCD	AIRE DU CARRÉ ABCD	AIRE DU RECTANGLE ADHE	LONGUEUR TOTALE DES ARÊTES DU PAVÉ	AIRE TOTALE DES FACES DU PAVÉ	VOLUME DU PAVÉ

Réponse A	$4 \times 10 + 4 \times x + 4 \times x$	**Réponse F**	x^2
Réponse B	$x \times x \times 10$	**Réponse G**	$48x$
Réponse C	$4 \times 10 \times x + 2 \times x \times x$	**Réponse H**	$2x(20 + x)$
Réponse D	$4x$	**Réponse I**	$40 + 8x$
Réponse E	$10 \times x$	**Réponse J**	$40x + 2x^2$

2. Dans les cas où plusieurs réponses conviennent, montrer par le calcul comment on peut passer de l'une à l'autre.

Descriptif

Type de tâche
Tâche intermédiaire

Compétences principalement mobilisées
Calculer, représenter

Contexte d'évaluation
Travail individuel. Une maquette de pavé droit est mise à la disposition des élèves.

Coups de pouce possibles
1 : « Tu peux t'aider de la maquette. »
2 : Pour un élève qui n'a pas utilisé l'expression H : « l'expression H n'est pas à écarter, elle correspond bien à une colonne du tableau. »

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève exprime un périmètre ou une aire à l'aide d'une expression littérale.
2. L'élève réduit une expression littérale pour montrer l'égalité de deux réponses.
3. L'élève factorise une expression littérale pour montrer l'égalité de deux réponses.

Niveaux

niveau 2	Les trois premières colonnes sont remplies par au moins une réponse correcte.
niveau 3	Toutes les colonnes du tableau sont remplies avec des réponses correctes, mais pas forcément toutes, éventuellement avec l'aide d'un coup de pouce, **ET** dans au moins une colonne, plusieurs réponses correctes sont données et leur égalité est justifiée.
niveau 4	L'exercice est intégralement traité en autonomie.

Géométrie

ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS

- Utiliser et produire des représentations d'objets (D1-3)
- Mener une démarche scientifique, résoudre un problème (D4)

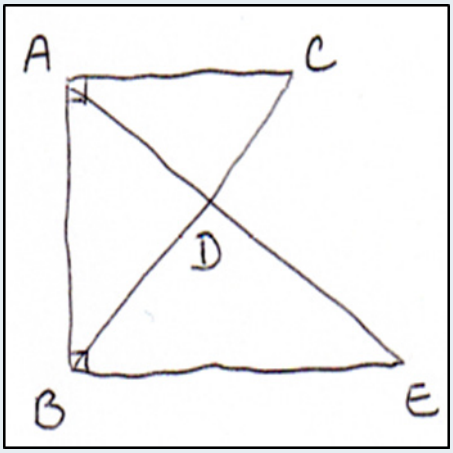
DESCRIPTEURS

Selon l'élément signifiant évalué, la situation prend en compte des descripteurs différents :

- Utiliser et produire des figures géométriques (D1-3)
- Mettre en œuvre un raisonnement logique simple (D4)
- Pratiquer le calcul numérique (exact et approché) [...] (D4)
- Communiquer sur ses démarches, ses résultats et ses choix en argumentant (D4)

ÉNONCÉ

Voici une figure codée réalisée à main levée, les dimensions ne sont pas respectées.



On sait que :

- (AC) est perpendiculaire à (AB)
- (EB) est perpendiculaire à (AB)
- (AE) et (BC) se coupent en D
- AB = 3,2 cm ; BD = 2,5 cm et DC = 1,5 cm.

1) Réaliser la figure en vraie grandeur sur du papier uni.

2) Déterminer l'aire du triangle ABE.

Descriptif

Type de tâche

Exercice à prise d'initiative

Compétences principalement mobilisées

Raisonner, communiquer

Contexte d'évaluation

Travail individuel. Calculatrice autorisée.
La figure de la question 1 est réalisée sur du papier uni, sans ligne ni quadrillage ; l'élève dispose de ses outils de géométrie.

Coups de pouce possibles

👍**1** : Dans le cas où l'élève a tracé [AB] et les deux demi-droites [AC) et [BE), le professeur lui demande de calculer la longueur BC.
👍**2** : « Comment calculer la longueur AC ? »
👍**3** : Pour la question 2 : « Repère avec des couleurs différentes les figures pour lesquelles tu sais appliquer un théorème. »
👍**4** : Pour les questions 1 et 2 : « Peux-tu expliquer ta démarche ? »

Positionnement des élèves

La situation contribue à l'évaluation de plusieurs domaines du socle.

- **Concernant le domaine 1, composante 3**

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser et produire des représentations d'objets (D1-3)

DESCRIPTEUR
Utiliser et produire des figures géométriques

Indicateur possible pour l'évaluation

L'élève réalise le tracé avec précision en prenant en compte toutes les données.

Niveau

niveau 3	L'indicateur est réussi (on n'attend pas que des traits de construction restent apparents), éventuellement avec les coups de pouce 👍**1** ou 👍**4**.

- **Concernant le domaine 4**

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Mener une démarche scientifique, résoudre un problème (D4)

DESCRIPTEURS
- Mettre en œuvre un raisonnement logique simple
- Pratiquer le calcul numérique (exact et approché) [...]
- Communiquer sur ses démarches, ses résultats et ses choix en argumentant

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève mesure sur la figure les longueurs nécessaires et calcule l'aire approchée du triangle ABE en utilisant le résultat de ces mesures.
2. L'élève repère dans la figure des configurations pertinentes (triangle rectangle ABC, droites (AC) et (BC) perpendiculaires à (AB), configuration de Thalès « papillon »).
3. L'élève montre que les droites (AC) et (BE) sont parallèles.
4. L'élève utilise le théorème de Pythagore pour calculer AC.
5. L'élève utilise le théorème de Thalès pour calculer BE.
6. L'élève calcule l'aire du triangle ABE.
7. L'élève explicite sa démarche à l'écrit ou à l'oral.

Niveaux

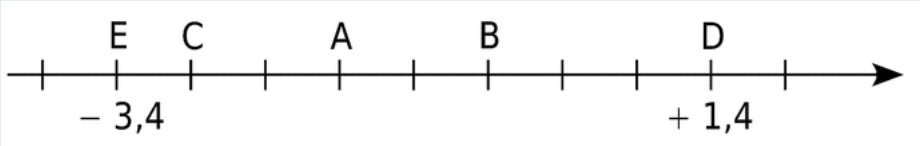
niveau 2	Les indicateurs 1 et 7 sont réussis avec éventuellement les coups de pouce 👍**2** et 👍**4** **OU** l'indicateur 2 est partiellement réussi (une seule configuration repérée) et la propriété correspondante est utilisée (indicateur 3 ou 4 ou 5) éventuellement avec le coup de pouce 👍**2**.
niveau 3	Les indicateurs 2 et 3 sont réussis en autonomie **ET** les indicateurs 4, 5, 6 et 7 sont réussis éventuellement avec l'un des coups de pouce 👍**2**, 👍**3** ou 👍**4**.
niveau 4	L'exercice est réussi éventuellement avec le coup de pouce 👍**2**.

Repérage sur une droite graduée

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser les nombres (D1-3)

DESCRIPTEURS
- Repérer un nombre sur une droite graduée
- Effectuer des calculs engageant les quatre opérations et des comparaisons sur des nombres rationnels positifs ou négatifs

ÉNONCÉ
Sur l'axe ci-dessous, la graduation est régulière.
Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes en justifiant la réponse.



a) L'abscisse de A est positive.
b) L'abscisse de C est – 2,8.
c) L'abscisse du milieu du segment [AB] est un nombre entier.

Descriptif

Type de tâche
Exercice intermédiaire

Compétences principalement mobilisées
Raisonner, calculer

Contexte d'évaluation
Travail individuel.

Coups de pouce possibles
1 : « Que signifie le mot abscisse ? »
2 : « Qu'est-ce qu'une graduation régulière ? »
3 : « Combien y a-t-il de repères de graduation entre E et D ? Pour représenter quelle distance ? »

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève trouve l'écart entre deux repères consécutifs de la graduation.
2. L'élève associe une abscisse aux repères de la graduation qu'il utilise.
3. L'élève s'appuie sur des considérations géométriques pour trouver des propriétés des abscisses considérées.

Niveaux

niveau 2	L'élève réussit le premier indicateur et en déduit la réponse à au moins l'une des questions de l'exercice, éventuellement avec l'aide des coups de pouce.
niveau 3	L'élève réussit l'exercice, éventuellement avec l'aide des coups de pouce.
niveau 4	L'élève réussit l'exercice en autonomie.

Remarques

Cette situation permet de valoriser des démarches très variées.

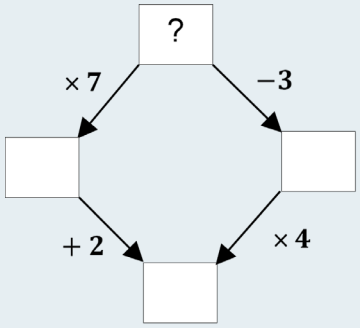
Par exemple :
• Pour justifier la réponse « faux » à l'affirmation a), l'élève s'appuie sur une lecture de la graduation, évoque le fait que celle-ci est régulière et que l'origine du repère est plus loin de E que de D, alors que A est plus près de E que de D.
• Pour justifier la réponse « vrai » à l'affirmation c), l'élève calcule d'abord les abscisses de A et de B.
• Pour justifier la réponse « vrai » à l'affirmation c), l'élève remarque que le milieu de [AB] est aussi le milieu de [ED].

Programmes de calculs

ÉLÉMENT SIGNIFIANT
Utiliser les nombres (D1-3)

DESCRIPTEURS
- Mettre un problème simple en équation
- Développer ou factoriser des expressions littérales dans des cas très simples
- Résoudre des équations ou des inéquations du premier degré

ÉNONCÉ
En partant d'un nombre placé dans la case supérieure, on constate que le chemin de gauche et le chemin de droite mènent au même résultat, dans la case inférieure.



Quel est le nombre placé dans la case supérieure ?
Y a-t-il plusieurs possibilités ?

Descriptif

Type de tâche
Tâche avec prise d'initiative

Compétences principalement mobilisées
Calculer, modéliser

Contexte d'évaluation
Travail individuel ; calculatrice autorisée ; tableur disponible à la demande de l'élève ; cet outil ne permet toutefois pas de conclure, la solution étant rationnelle non décimale.

Coups de pouce possibles
1 : « Tu peux faire des essais. »
2 : « Tu peux utiliser un tableur. »
3 : « Le nombre que tu as trouvé est-il bien solution ? »

Positionnement des élèves

Indicateurs possibles pour l'évaluation

1. L'élève fait des essais à la calculatrice ou au tableur.
2. L'élève modélise la situation par une équation.
3. L'élève teste si un nombre est solution d'une équation.
4. L'élève résout algébriquement une équation.

Niveaux

niveau 2	Le premier indicateur est réussi avec éventuellement les coups de pouce **1** ou **2** ; l'indicateur 4 ne l'est pas malgré le coup de pouce **3**.
niveau 3	L'élève modélise la situation par une équation. Éventuellement avec le coup de pouce **3**, il réussit l'indicateur 4.
niveau 4	L'exercice est résolu en autonomie.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

COMPÉTENCES DU SOCLE

Document d'accompagnement pour l'évaluation des acquis du socle commun de connaissances, de compétences et de culture.

Éléments pour l'appréciation du niveau de maîtrise satisfaisant en fin de cycle 4

SOMMAIRE

Domaine 1 – cycle 4 : Les langages pour penser et communiquer....2

- Comprendre, s'exprimer en utilisant la langue française à l'oral et à l'écrit au cycle 4....2
- Comprendre, s'exprimer en utilisant une langue étrangère et, le cas échéant, une langue régionale au cycle 4....4
- Comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques, scientifiques et informatiques au cycle 4....8
- Comprendre, s'exprimer en utilisant les langages des arts et du corps au cycle 4....11

Domaine 2 – cycle 4 : Les méthodes et outils pour apprendre....13

Domaine 3 – cycle 4 : La formation de la personne et du citoyen....16

Domaine 4 – cycle 4 : Les systèmes naturels et les systèmes techniques....19

Domaine 5 – cycle 4 : Les représentations du monde et l'activité humaine....22

Retrouvez Éduscol sur

Domaine 1 – cycle 4 : Les langages pour penser et communiquer

Comprendre, s'exprimer en utilisant la langue française à l'oral et à l'écrit (composante 1 du domaine 1)

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTES ET / OU SITUATIONS POSSIBLES D'ÉVALUATION *Le français est la principale discipline de référence pour l'évaluation des compétences de ce sous-domaine, même si toutes les disciplines contribuent à leur construction.*
Arts plastiques Éducation musicale Éducation physique et sportive Français Histoire-géographie-enseignement moral et civique Mathématiques Physique-chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**S'exprimer à l'oral**	Sans que soient exigées de l'élève une correction absolue dans l'expression et une maîtrise complète des techniques de l'exposé et du débat, on attend de lui : • qu'il soit capable d'une prise de parole continue d'une durée variable selon les types de discours (de cinq à dix minutes au maximum, si le propos croise narration, description, opinion et argumentation ; moins s'il s'agit d'une seule de ces composantes), avec quelques relances de la part du professeur si nécessaire ; • qu'il puisse exprimer une impression, un avis, une opinion de manière raisonnée, en respectant les formes d'un oral codifié et socialisé ; • qu'il sache faire preuve d'une relative liberté dans sa prise de parole par rapport à ses notes de préparation.	Ces compétences peuvent être évaluées à travers tout ce qui en classe ou dans les travaux des élèves relève : • de la lecture à voix haute ; • de la restitution de mémoire d'un texte littéraire ; • de l'exploitation des ressources expressives et créatives de la parole, l'engagement dans un jeu théâtral, dans un débat ; • des exposés (individuels ou à plusieurs) et comptes rendus (d'activités, de sorties, de spectacles et d'expositions, de travaux menés lors d'une activité bibliographique ou expérimentale en sciences, etc.) portant sur toute question relevant des activités et contenus de l'enseignement dans toutes les disciplines, avec une prise en compte de leurs spécificités (vocabulaire spécialisé, structuration des propos, argumentation, etc.) ; • de la participation constructive à des échanges oraux, à des débats ou à l'explicitation de démarches ou de réalisations, dans toutes les disciplines.
	Comprendre des énoncés oraux	Sans que soient exigées de l'élève une interprétation complète de la richesse de la communication orale, on attend de lui qu'il soit capable de : • reformuler le sens général d'un discours oral découvert de manière autonome et adapté par ses références et son niveau de langue aux connaissances définies par les programmes ; • rendre compte de la teneur générale de discours oraux complexes (conversations, débats).	Ces compétences peuvent être évaluées à travers diverses activités de reformulation, qu'elles portent sur un texte, une œuvre, ce qui a été formulé dans la classe, ce qui a fait l'objet du cours, ce qui a été proposé par un ou une camarade, etc.
	Lire et comprendre l'écrit	Sans exiger d'un élève, en fin de cycle, qu'il soit capable d'une lecture experte et d'une interprétation approfondie d'un texte littéraire, on attend de lui qu'il soit en mesure de proposer de manière autonome : • sa compréhension d'un texte inconnu d'environ trente lignes ou d'un document associant image et énoncé écrit, en s'appuyant sur des éléments d'analyse précis et en mobilisant ses connaissances linguistiques et culturelles ; • un compte rendu de ce qu'il retient de la lecture d'une œuvre et la mise en évidence de l'essentiel d'un texte long.	Ces compétences peuvent être évaluées à travers tout ce qui en classe ou dans les travaux des élèves relève de la restitution de : • la lecture, la compréhension et l'interprétation des textes littéraires, en fondant l'interprétation sur quelques outils d'analyse simples ; • la situation des textes dans leur contexte historique et culturel ; • la lecture autonome de textes variés, d'images et de documents composites, sur différents supports, et donc à travers les activités et exercices suivants : - réponse à un questionnement ouvert sur les textes ; - explication de texte ; - toute restitution écrite ou orale d'une lecture, sous forme de carnet de lecture, de journal du lecteur, de productions de textes d'invention rendant compte d'une compréhension et d'une appropriation personnelle des textes rencontrés (article critique, compte rendu, exposé, lettre ouverte, etc.). Dans les autres disciplines que le français, les textes à lire sont en lien avec le programme ; les situations de lecture où la compréhension est évaluée sont celles auxquelles les élèves ont été entraînés.

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTES ET / OU SITUATIONS POSSIBLES D'ÉVALUATION *Le français est la principale discipline de référence pour l'évaluation des compétences de ce sous-domaine, même si toutes les disciplines contribuent à leur construction.*
Arts plastiques Éducation musicale Éducation physique et sportive Français Histoire-géographie-enseignement moral et civique Mathématiques Physique-chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Écrire**	Sans exiger d'un élève, en fin de cycle, une maîtrise parfaite de l'écrit, on attend de lui : • qu'il soit capable de réponses écrites développées et argumentées à des questions de compréhension et d'analyse d'un texte et/ou d'une image ; • qu'il sache écrire un texte pouvant aller jusqu'à 2000 à 3000 signes dans une langue globalement correcte, en cohérence avec les attendus en étude de la langue, et suffisamment riche pour lui permettre de produire un texte d'invention, intéressant et conforme à l'énoncé de l'exercice, ou d'exprimer sa pensée de manière argumentée et nuancée ; • que le texte produit soit rédigé dans une langue suffisamment maîtrisée pour que son intelligibilité ne soit pas compromise ; • que le vocabulaire spécialisé soit réinvesti à bon escient.	Ces compétences peuvent être évaluées à travers tout ce qui en classe ou dans les travaux des élèves relève de : • l'expression et la communication par écrit et sur des supports variés (papier, numérique) d'une histoire, d'une description, d'un sentiment, d'un point de vue, d'un jugement argumenté, de l'analyse d'une œuvre d'art (visuelle, musicale, scénique, etc.) en tenant compte du destinataire et en respectant les principales normes de la langue écrite ; • la planification et la révision d'un texte, par retour sur sa propre production écrite ou sur celle d'un camarade ; • la pratique de l'écriture collaborative ; • la formulation par écrit de sa réception d'une œuvre littéraire ou artistique ; • la production, en réponse à une consigne, d'un écrit d'invention ou d'argumentation s'inscrivant dans un genre littéraire du programme, en s'assurant de sa cohérence et en respectant les principales normes de la langue écrite ; • l'utilisation de l'écrit pour imaginer, inventer, réfléchir, se créer des outils de travail. Dans les autres disciplines que le français, les compétences d'écriture sont évaluées dans les activités de rédaction auxquelles les élèves sont régulièrement confrontés.
	Exploiter les ressources de la langue **Réfléchir sur le système linguistique**	On attend d'un élève : • qu'il mobilise les connaissances et procédures orthographiques et syntaxiques étudiées pour produire un texte pouvant aller jusqu'à 2000 à 3000 signes dans une langue globalement correcte ; • qu'il puisse réviser un énoncé produit par lui-même ou un autre scripteur à partir d'indications orientant cette révision ; • qu'il sache analyser en contexte des unités lexicales en les mettant en relation et en se fondant sur l'analyse de leur forme ; • qu'il sache analyser les propriétés d'un ou de plusieurs éléments linguistiques en les référant au système de la langue et en les comparant éventuellement au système d'une autre langue.	Ces compétences peuvent être évaluées à travers tout ce qui dans les activités de classe ou dans les travaux des élèves relève de : • la mobilisation des connaissances syntaxiques et lexicales définies par le programme en production orale ; • la mobilisation de ces mêmes connaissances et des connaissances orthographiques en rédaction de texte dans des contextes variés ; • la révision de ses écrits avec utilisation des outils appropriés ; • l'appréciation du degré d'acceptabilité d'un énoncé ; • l'analyse des propriétés d'un élément linguistique ; • l'analyse en contexte de l'emploi d'unités lexicales, l'identification d'un réseau lexical dans un texte et la perception de ses effets ; • la mobilisation en réception et en production de textes des connaissances linguistiques du programme qui permettent de construire le sens d'un texte, son rapport à un genre littéraire ou à un genre de discours.

Comprendre, s'exprimer en utilisant une langue étrangère et, le cas échéant, une langue régionale (composante 2 du domaine 1)

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTES ET / OU SITUATIONS POSSIBLES D'ÉVALUATION
Langues vivantes (étrangères ou régionales) Toute discipline intégrant un enseignement en langue vivante étrangère (ou régionale)	**Lire et comprendre l'écrit**	**Niveau A1** Peut comprendre des textes très courts et très simples, phrase par phrase, en relevant des noms, des mots familiers et des expressions très élémentaires et en relisant si nécessaire. **Niveau A2** Peut comprendre de courts textes simples sur des sujets concrets courants avec une fréquence élevée de langue quotidienne. **Niveau B1** Peut lire des textes factuels directs sur des sujets relatifs à son domaine et à ses intérêts avec un niveau satisfaisant de compréhension.	**Niveau A1** Repérer des indices textuels élémentaires. Suivre des consignes brèves et simples. Isoler des informations simples dans un court texte narratif, par exemple une carte postale. Comprendre un récit court et simple, éventuellement avec l'aide d'illustrations, sur un sujet familier ou déjà connu (relevant des thèmes culturels au programme). Se faire une idée du contenu d'un texte informatif simple, surtout s'il est accompagné d'un document visuel (affiches, annonces, court article de presse, etc.). **Niveau A2** Comprendre des consignes écrites (pour réaliser une tâche). Comprendre les signes et les panneaux courants dans les lieux publics, à l'école, pour l'orientation, les instructions, la sécurité. Trouver un renseignement spécifique dans des documents informatifs simples (prospectus, menus, annonces, horaires). Identifier l'information pertinente sur la plupart des écrits descriptifs simples. Comprendre une lettre personnelle simple et brève. Saisir la trame narrative d'un récit portant sur un sujet familier ou déjà connu (relevant des thèmes culturels du programme) si celui-ci est clairement structuré. **Niveau B1** Comprendre un texte factuel, repérer la structure. Comprendre un récit portant sur un sujet en lien avec le programme ou renvoyant à une situation familière et connue. Comprendre l'expression de sentiments et de souhaits dans une correspondance avec un pair.

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTES ET / OU SITUATIONS POSSIBLES D'ÉVALUATION
Langues vivantes (étrangères ou régionales) Toute discipline intégrant un enseignement en langue vivante étrangère (ou régionale)	**Écrire et réagir à l'écrit**	**Niveau A1** Peut écrire des expressions et phrases simples isolées. **Niveau A2** Peut écrire une série d'expressions et de phrases simples reliées par des connecteurs simples tels que « et », « mais » et « parce que ». **Niveau B1** Peut écrire un énoncé simple et bref sur des sujets familiers ou déjà connus.	**Niveau A1** Copier, écrire sous la dictée. Indiquer quelques renseignements personnels en répondant à un questionnaire simple. Produire de façon autonome quelques phrases juxtaposées. Écrire un message simple, rédiger un texte guidé sur soi-même ou sur des personnages imaginaires, savoir indiquer où ils vivent, ce qu'ils font. **Niveau A2** Remplir une fiche de renseignements. Écrire de brèves notes simples en rapport avec des besoins immédiats. Écrire une courte description d'un événement, d'activités passées et d'expériences personnelles. Écrire un court récit, des biographies imaginaires et des poèmes simples. **Niveau B1** Résumer l'idée essentielle d'un texte, savoir reformuler selon des consignes précises. Prendre des notes de lecture, savoir les organiser et s'en servir pour rédiger un texte. Savoir extraire et transmettre l'essentiel d'un message. Écrire des lettres personnelles pour demander ou transmettre des informations. Écrire un récit construit. Rédiger un texte court sur un thème culturel au programme, une situation familière ou d'actualité (avis, point de vue, réaction, résumé, compte rendu, etc.).

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTES ET / OU SITUATIONS POSSIBLES D'ÉVALUATION
Langues vivantes (étrangères ou régionales) Toute discipline intégrant un enseignement en langue vivante étrangère (ou régionale)	**Écouter et comprendre**	**Niveau A1** Peut comprendre des mots familiers et des expressions courantes sur lui-même, sa famille et son environnement. **Niveau A2** Peut comprendre une intervention brève si elle est claire et simple. **Niveau B1** Peut comprendre une information factuelle sur des sujets simples en distinguant l'idée générale et les points de détail, à condition que l'articulation soit claire et l'accent courant.	**Niveau A1** Repérer des indices sonores simples. Comprendre les consignes et les rituels de la classe. Isoler des informations simples dans un message. Comprendre un message oral pour pouvoir répondre à des besoins concrets ou réaliser une tâche. Comprendre quelques références habituelles, simples, reconnaissables, appartenant au pays de la langue concernée, en référence aux thèmes culturels du programme ou à des situations familières. **Niveau A2** Identifier le sujet d'une conversation simple et en comprendre les grandes lignes. Comprendre des expressions familières de la vie quotidienne pour répondre à des besoins. Comprendre un message oral pour enrichir son point de vue et réaliser une tâche. Comprendre les points essentiels d'un document oral sur un sujet familier ou déjà connu (en lien avec les thèmes culturels du programme). **Niveau B1** Comprendre un message oral en continu sur un point d'intérêt personnel ou sur un sujet déjà connu (en lien avec les thèmes culturels du programme). Suivre les points principaux d'une discussion d'une certaine longueur sur un sujet familier ou d'actualité. Comprendre les grandes lignes d'un débat contradictoire. Suivre le plan général d'exposés courts sur des sujets familiers ou déjà connus (en lien avec les thèmes culturels du programme).

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTES ET / OU SITUATIONS POSSIBLES D'ÉVALUATION
Langues vivantes (étrangères ou régionales) Toute discipline intégrant un enseignement en langue vivante étrangère (ou régionale)	**S'exprimer à l'oral en continu et en interaction**	**Réagir et dialoguer** **Niveau A1** Peut interagir brièvement dans des situations déjà connues en utilisant des mots et expressions simples et avec un débit lent. **Niveau A2** Peut interagir avec une aisance raisonnable dans des situations bien structurées et de courtes conversations à condition que le locuteur apporte de l'aide le cas échéant. **Niveau B1** Peut exprimer un avis, manifester un sentiment et donner quelques éléments simples de contexte sur un sujet abstrait ou culturel. **Parler en continu** **Niveau A1** Peut produire des expressions simples, isolées, sur les gens et les choses. **Niveau A2** Peut décrire ou présenter simplement des gens, des conditions de vie, des activités quotidiennes, ce qu'on aime ou pas, par de courtes séries d'expressions ou de phrases.	**Niveau A1** Être capable d'épeler des mots familiers. Établir un contact social. Demander et donner des informations sur soi et son environnement, sur des sujets familiers ou déjà connus (en lien avec les thèmes culturels du programme). **Niveau A2** Être capable de gérer de courts échanges. Réagir à des propositions, à des situations, aux consignes de classe. Demander et fournir des renseignements. Dialoguer, échanger sur des sujets familiers, des situations courantes ou des sujets déjà connus (en lien avec les thèmes culturels programme). **Niveau B1** Etre capable d'échanger des informations. Reformuler un élément d'une conversation pour quelqu'un qui n'a pas compris. Présenter les informations essentielles d'un document. Savoir faire face dans une langue simple à la plupart des situations susceptibles de se produire au cours d'un voyage. Prendre part à une conversation simple avec des locuteurs natifs. Exprimer ses sentiments et réagir à des sentiments exprimés. Défendre un point de vue sur un sujet d'actualité ou déjà connu (en lien avec les thèmes culturels du programme). **Niveau A1** Reproduire un modèle oral court. Lire à haute voix et de manière expressive un texte bref après répétition (court texte dialogué, bref discours de bienvenue, court texte fictif, informatif). Présenter ou décrire : se présenter et se décrire, décrire des personnes ou des personnages, des objets ou des animaux, décrire ses activités préférées. Raconter : juxtaposer des phrases simples pour raconter une histoire courte en s'aidant d'images ou de références déjà connues (en lien avec le programme). Savoir prononcer de manière reconnaissable un répertoire limité d'expressions et de mots mémorisés. **Niveau A2** Faire une description ou une présentation d'un sujet d'actualité ou déjà connu (en lien avec les thèmes culturels du programme). Savoir ordonner un récit. Expliquer une situation simple, une notion connue (en lien avec les thèmes culturels du programme). S'exprimer d'une manière suffisamment claire pour être compréhensible, au besoin en se reprenant.

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTES ET / OU SITUATIONS POSSIBLES D'ÉVALUATION
Langues vivantes (étrangères ou régionales) Toute discipline intégrant un enseignement en langue vivante étrangère (ou régionale)	**S'exprimer à l'oral en continu et en interaction**	**Niveau B1** Peut raconter un événement, une expérience ou un rêve, décrire un espoir ou un but et exposer brièvement des raisons ou explications pour un projet ou une idée.	**Niveau B1** Présenter, décrire des événements, des activités passées et des expériences personnelles. Formuler des hypothèses et analyser une situation simple. Exprimer une opinion personnelle, une réaction, défendre un point du vue à propos d'un thème culturel du programme ou d'un sujet d'actualité. Présenter un projet. S'exprimer dans une langue clairement intelligible même s'il reste des erreurs de prononciation.

Comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques, scientifiques et informatiques (composante 3 du domaine 1)

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTES ET / OU SITUATIONS POSSIBLES D'ÉVALUATION
Mathématiques Physique - Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Utiliser les nombres**	• Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombre premier. • Effectuer (mentalement, à la main, à la calculatrice, à l'aide d'un tableur) des calculs engageant les quatre opérations et des comparaisons sur des nombres rationnels positifs ou négatifs. • Effectuer des calculs numériques impliquant des puissances. • Passer d'une écriture d'un nombre à une autre (écritures décimale et fractionnaire, notation scientifique, pourcentages). • Comprendre et utiliser la notion de racine carrée. • Repérer un nombre sur une droite graduée. • Reconnaître et résoudre une situation de proportionnalité.	La bonne compréhension et la bonne utilisation du langage des nombres peuvent être évaluées à travers des situations et dans des contextes variés : • des séries de questions brèves relevant du calcul mental proposées de manière régulière et fréquente ; • des exercices relevant du calcul écrit (posé ou effectué en ligne) sans recours à la calculatrice ; concernant le calcul fractionnaire, la mise au même dénominateur, lorsqu'elle est nécessaire, doit alors pouvoir se faire mentalement ; • la résolution d'un problème simple interne aux mathématiques ou issu d'une autre discipline mettant en jeu des nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire. La résolution d'un tel problème peut faire appel à l'usage d'une calculatrice ou d'un tableur. L'évaluation de la production prend en compte la justesse des calculs, mais aussi toute mise en œuvre d'idées pertinentes, ainsi que les essais et démarches engagées, même non aboutis.
Mathématiques Physique - Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Utiliser le calcul littéral**	• Développer et factoriser des expressions littérales dans des cas très simples. • Citer et utiliser une expression littérale, notamment pour exprimer une grandeur en fonction d'autres grandeurs. • Produire une expression littérale. • Dans une expression littérale, substituer une lettre par une valeur numérique, en utilisant si nécessaire les unités adaptées. • Mettre un problème simple en équation. • Résoudre des équations ou des inéquations du premier degré.	La maîtrise des règles de calcul et de simplification d'expressions littérales simples peut être évaluée à travers des séries de questions brèves relevant du calcul mental. Dans la mesure du possible, ces séries de questions sont proposées de manière régulière et fréquente. L'utilisation d'expressions littérales peut être évaluée à travers l'exploitation et la production de formules ou la traduction de programmes de calcul. Les situations peuvent relever des différents thèmes du programme de mathématiques (arithmétique, géométrie) ou d'autres disciplines.

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTES ET / OU SITUATIONS POSSIBLES D'ÉVALUATION
Mathématiques Physique - Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie			Au titre d'exemples : • prouver que tout nombre qui est la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3 ; • exprimer le nombre de sommets, le nombre d'arêtes ou le nombre de faces d'un prisme droit en fonction du nombre de sommets du polygone de base ; • exploiter les expressions littérales figurant au programme de physique-chimie. Plusieurs situations permettent d'évaluer la compréhension des différents statuts de la lettre dans une expression littérale : • la traduction algébrique d'un énoncé général formulé en langage courant et vice versa ; • les tests d'égalités en substituant aux lettres des valeurs numériques ; • la mise en équation d'un problème simple ; • l'utilisation d'un tableur pour résoudre une équation du premier degré. Dans ce cadre, l'équation peut être du type $ax + b = cx + d$, avec a, b, c, d décimaux. Selon les valeurs de ces paramètres, on pourra chercher la solution exacte ou seulement une solution décimale approchée ; • la résolution algébrique d'une équation du type $ax + b = cx + d$ où a, b, c, d peuvent être exprimés sous forme décimale ou fractionnaire. L'évaluation de la production prend en compte la justesse des calculs, mais aussi toute mise en œuvre d'idées pertinentes, ainsi que les essais et démarches engagées, même non aboutis.
Éducation physique et sportive Histoire-géographie-enseignement moral et civique Mathématiques Physique-Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Exprimer une grandeur mesurée ou calculée dans une unité adaptée**	• Accompagner de son unité toute valeur numérique d'une grandeur physique mesurée, calculée ou fournie. • Utiliser, dans les calculs numériques, un système d'unités cohérent.	L'évaluation de cette compétence peut concerner plusieurs disciplines, y compris non scientifiques, et relever d'activités de différentes natures, par exemple : • calcul d'une densité de population, de consommation d'énergie, lors d'activités de géographie ; • détermination de longueurs ou d'aires à l'aide d'un système d'information géographique ; • mesure ou calcul de distances, de vitesses, de fréquences cardiaques lors d'activités d'EPS ; • mesure de grandeurs physiques lors d'activités expérimentales, calcul de grandeurs à partir de formules littérales, expression de la valeur numérique d'une grandeur à partir d'une représentation graphique en mathématiques, physique-chimie, SVT et technologie.
Français Histoire-géographie-enseignement moral et civique Mathématiques Physique - Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Passer d'un langage à un autre**	• Passer du langage courant à un langage scientifique ou technique et vice versa. • Passer d'un registre de représentation à un autre (tableau, graphique, croquis, symbole, schéma, etc.). • Exploiter, dans des situations simples, les différences (complémentarité, redondance, complexité, etc.) entre différents registres de représentation.	Les situations dans lesquelles les élèves sont évalués les amènent à : • commenter des tableaux de valeurs ou des courbes de tendance fournis par le professeur ou obtenus par l'expérience ; • commenter une expression littérale ; • transposer une description énoncée en français dans un mode de représentation scientifique (tableau, courbe, schéma, dessin, etc.) et réciproquement.

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTES ET / OU SITUATIONS POSSIBLES D'ÉVALUATION
Mathématiques Sciences de la vie et de la Terre	**Utiliser le langage des probabilités**	• Utiliser le vocabulaire lié aux notions élémentaires de probabilités : - calculer des probabilités dans un contexte simple ; - faire le lien entre fréquence et probabilité ; - simuler une expérience aléatoire.	Parmi les situations permettant d'évaluer la bonne compréhension et la bonne utilisation du langage et du calcul des probabilités, on peut citer : • l'évaluation des chances de gain dans un jeu ; • le choix d'une stratégie gagnante. La simulation d'une expérience aléatoire à une ou deux épreuves fait appel à l'utilisation du tableur. Une interprétation probabiliste peut être demandée dans un contexte biologique (génétique) ou géologique (risques).
Histoire-géographie-enseignement moral et civique Mathématiques Physique - Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Utiliser et produire des représentations d'objets**	• Utiliser et produire des figures géométriques. • Lire des plans et des cartes. • Se repérer sur des cartes à différentes échelles. • Utiliser le langage cartographique pour réaliser une production graphique. • Comprendre l'effet de quelques transformations (déplacements, agrandissements-réductions) sur des grandeurs géométriques. • Se repérer sur une droite graduée, dans le plan muni d'un repère orthogonal, dans un parallélépipède rectangle, sur une sphère. • Utiliser et produire des représentations de solides. • Lire, interpréter et produire des tableaux, des graphiques, des diagrammes. • Utiliser des indicateurs statistiques.	L'évaluation des compétences de repérage et de représentation dans le plan peut s'effectuer à travers : • l'écriture ou la mise en œuvre d'un protocole de construction géométrique ; • l'utilisation de représentations géométriques, de croquis, de schémas et/ou de la notion d'échelle pour repérer une position sur une figure, sur une carte (géographique, géologique, météorologique), sur un plan ; • l'usage des systèmes d'information géographique (SIG) et des outils de géolocalisation ; • la conception et la réalisation (à la main ou à l'aide d'un outil informatique) de croquis géographiques, de cartes simples, de plans de sorties ; • la description du mouvement d'un objet et de la propagation de la lumière ; • l'utilisation des configurations et/ou des transformations géométriques au programme de mathématiques pour modéliser une situation simple ; • l'écriture ou l'interprétation d'un programme informatique utilisant des instructions de déplacement. Plusieurs contextes sont possibles : tracés réalisés à la main ou à l'aide d'un logiciel (de programmation ou de géométrie dynamique). L'évaluation des compétences de représentation de l'espace peut s'effectuer à travers : • la fabrication de solides concrets (maquettes, patrons) ; • l'utilisation d'un logiciel de représentation 3D ; • la conception d'un solide à l'aide d'une imprimante 3D ; • la représentation de dispositifs expérimentaux, d'observations de structures et de phénomènes naturels. L'organisation, la représentation et le traitement de données peuvent être évalués à travers l'utilisation d'un tableur-grapheur. Les données peuvent être issues de mesures expérimentales réalisées dans d'autres disciplines ou provenir de sources réelles d'origine scientifique, économique, sociale ou politique.

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTES ET / OU SITUATIONS POSSIBLES D'ÉVALUATION
Mathématiques Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Utiliser l'algorithmique et la programmation pour créer des applications simples**	• Expliquer le déroulement et le résultat produit par un algorithme simple. • Écrire un algorithme ou un programme qui permet une interaction avec l'utilisateur ou entre les objets qu'il utilise, en réponse à un problème donné. • Mettre au point un programme pour corriger une erreur ou apporter une amélioration. • Implanter et tester un programme dans un système réel pour imposer un comportement.	Une situation d'évaluation peut-être : • l'écriture d'un algorithme ou d'un programme ; • un exercice testant la compréhension d'un algorithme donné ; • un exercice consistant à transformer un algorithme ou un programme pour obtenir un résultat différent ; • les tests et la validation d'un programme dans un système. Le contexte dépend : • des instruments et supports mis à disposition (utilisation d'un ordinateur ou travail sur papier) ; • de la complexité de l'algorithme support de l'évaluation (gestion ou non d'événements, nombre de scripts à écrire, nombre d'objets sur lesquels ils opèrent).

Comprendre, s'exprimer en utilisant les langages des arts et du corps (composante 4 du domaine 1)

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTE ET RÈGLES CONSTITUTIVES DES SITUATIONS D'ÉVALUATION
Arts plastiques Éducation musicale Éducation physique et sportive	**Pratiquer des activités physiques sportives et artistiques**	• Concevoir et réaliser un projet de performance optimale. - Gérer son effort, faire des choix pour réaliser la meilleure performance dans au moins deux familles athlétiques et/ou au moins de deux styles de nages. - S'engager dans un programme de préparation individuel ou collectif. - Planifier et réaliser une épreuve combinée. - S'échauffer avant un effort. • Concevoir et conduire un déplacement dans un milieu inhabituel. - Réussir un déplacement planifié dans un milieu naturel aménagé ou artificiellement recréé plus ou moins connu. - Gérer ses ressources pour réaliser en totalité un parcours sécurisé. - Assurer la sécurité de son camarade.	Le contexte d'évaluation peut être : une course longue (au moins 12 minutes) fractionnée ou non, une épreuve combinée en athlétisme, la natation longue ou de vitesse. Les élèves sont évalués dans deux contextes de pratique parmi ces trois. Les élèves formulent un projet de performance au regard de leurs propres ressources (puissance maximale aérobie et/ou anaérobie, acquis techniques, etc.) de manière à les exploiter de manière optimale pour performer. L'évaluation prend en compte à la fois la performance brute, la performance maîtrisée (rapportée au projet annoncé de l'élève) et la performance relative (rapportée aux ressources de l'élève). Les projets peuvent être individuels ou collectifs. Le contexte d'évaluation peut être : l'escalade, la course d'orientation, une activité nautique, le sauvetage aquatique. Le milieu peut être un milieu naturel aménagé, ou artificiel. Les situations d'évaluation sollicitent la « lecture » du milieu, le choix d'un itinéraire de déplacement et/ou une adaptation de la motricité. L'évaluation prend en compte la pertinence du projet de déplacement, l'efficacité motrice et la gestion de la sécurité (pour soi-même et autrui).

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTE ET RÈGLES CONSTITUTIVES DES SITUATIONS D'ÉVALUATION
Arts plastiques Éducation musicale Éducation physique et sportive	**Pratiquer des activités physiques sportives et artistiques**	• Concevoir, présenter et apprécier une prestation corporelle gymnique et/ou artistique. - Mobiliser les capacités expressives du corps pour imaginer, composer et interpréter une séquence artistique ou acrobatique. - Participer activement, au sein d'un groupe, à l'élaboration et à la formalisation d'un projet artistique. - Apprécier des prestations en utilisant différents supports d'observation et d'analyse. • S'inscrire dans un projet de jeu pour rechercher le gain du match. - Réaliser des actions décisives en situation favorable afin de faire basculer le rapport de force en sa faveur ou en faveur de son équipe. - Adapter son engagement moteur en fonction de son état physique et du rapport de force. - Être solidaire de ses partenaires et respectueux de son (ses) adversaire(s) et de l'arbitre. - Observer et co-arbitrer. - Accepter le résultat de la rencontre et savoir l'analyser avec objectivité.	Le contexte d'évaluation peut être une activité gymnique ou artistique. Les élèves construisent une prestation (individuelle ou collective) en combinant divers mouvements (codifiés ou non). L'évaluation prend en compte à la fois la qualité du projet et de l'exécution ou de l'interprétation (enchaînement des éléments ou expressivité de la prestation), et l'efficacité dans différents rôles (juge, chorégraphe, spectateur…). Le contexte d'évaluation peut être tous les sports collectifs, les sports de raquette ou de combat (en situation de match). La situation de match peut être aménagée, les règles essentielles de la pratique culturelle de référence sont conservées. Dans la mesure du possible, le rapport de force entre les équipes (sports collectifs) ou entre les élèves (raquette ou combat) est équilibré de manière à assurer l'égalité des chances de victoire des élèves. En sports collectifs (ou doubles en sports de raquettes), une homogénéité au sein de l'équipe est recherchée de manière à permettre à chaque élève d'exploiter au mieux son potentiel. En sports collectifs, l'évaluation prend en compte l'efficacité collective et l'efficacité individuelle. En sports de raquette et de combat, l'évaluation prend en compte la pertinence du projet tactique, et l'efficacité des actions motrices. La capacité à tenir différents rôles sociaux (arbitre, coach) peut être évaluée lors des séquences d'apprentissage.
Arts plastiques Éducation musicale Éducation physique et sportive Français	**Pratiquer les arts en mobilisant divers langages artistiques et leurs ressources expressives** **Prendre du recul sur la pratique artistique individuelle et collective**	• Mobiliser des techniques vocales et corporelles au service d'un projet d'interprétation ou de création musicale. • Oraliser un texte littéraire en mobilisant les techniques appropriées. • Mobiliser des moyens divers (matériaux, instruments, techniques, gestes…) dans différents champs de la pratique plastique pour servir un projet artistique singulier. • Concevoir, créer, réaliser et réfléchir des productions plastiques dans une visée artistique personnelle, en prenant du recul sur les questions qu'elles posent, en établissant des liens avec des œuvres et des démarches de référence. • Concevoir, créer, réaliser et réfléchir des pièces musicales en référence à des styles, des œuvres, des contraintes d'interprétation ou de diffusion.	La réalisation d'un projet musical peut permettre de mener l'évaluation correspondante dès lors que des choix d'interprétation ont été arrêtés et que les techniques nécessaires ont été identifiées et travaillées. L'évaluation apprécie alors le respect des choix effectués et la qualité de la mobilisation des techniques nécessaires. Cette compétence est sous-tendue par la dynamique de projet en arts plastiques, son évaluation est intrinsèque aux séquences. Il s'agit pour une part d'apprécier la qualité de savoirs plasticiens choisis pour soutenir une expression artistique personnelle, d'autre part de prendre progressivement la mesure des capacités des élèves à passer des choix aux intentions, à tirer parti des intuitions, pour cultiver une singularité. La verbalisation est le vecteur principal de l'évaluation de cette compétence en arts plastiques. Articulant les questions posées par la pratique et l'analyse critique, c'est une évaluation active et formative. Elle procède de la mise à distance de la production, du partage des regards et de la parole pour faire repérer et dire aux élèves le travail intérieur conduit pendant la pratique, pour permettre le passage de l'implicite des savoirs mobilisés à l'explicite des connaissances (pratiques, théoriques, culturelles). Les travaux de création musicale, qu'ils mobilisent ou non des outils numériques, sont la base de l'évaluation de cette compétence. Pour que l'évaluation puisse porter sur le respect et donc la compréhension des notions sous-jacentes au travail mené, il est nécessaire, d'une part que les références du travail de création soient clairement identifiées (œuvres, techniques, matériaux, etc.), d'autre part que les contraintes à respecter soient clairement posées et comprises. En français : travail collectif, écriture collaborative, écritures longues, capacité à corriger et à améliorer sa production, etc.

Domaine 2 – cycle 4 : Les méthodes et outils pour apprendre

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTE ET SITUATIONS D'ÉVALUATION POSSIBLE *Chaque compétence doit être validée dans au moins deux disciplines différentes ; certaines compétences peuvent être validées dans le cadre d'un EPI.*
Arts plastiques Éducation musicale Éducation physique et sportive Français Histoire-géographie-enseignement moral et civique Langues vivantes (étrangères ou régionales) Mathématiques Physique-Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Organiser son travail personnel**	• Choisir et utiliser différents outils et techniques pour garder la trace de ses activités et/ou recherches et permettre un entraînement au travers d'un travail personnel.	Lors d'une activité de classe se déroulant sur plusieurs séances (mise en œuvre d'un protocole expérimental, réalisation d'un projet artistique ou sportif, construction d'un exposé, préparation d'un débat, etc.), il peut être demandé à l'élève de tenir un « carnet de bord » dans lequel il retranscrit les différentes activités qu'il réalise et les informations recueillies (exemples : description des hypothèses, expérimentations menées, résultats obtenus, lors d'un protocole expérimental ; archivage et mise en forme de différentes données relatives à ses performances motrices ; description des processus de création, des matériaux et techniques artistiques utilisés, etc.). L'évaluation peut s'appuyer sur divers éléments : • la capacité à utiliser différents outils et techniques d'archivage ; • la capacité à créer des documents permettant un entraînement personnel ; • la pertinence du contenu des documents ; • la variété des traces de l'activité (textes, schémas, dessins, cartes mentales, photos, vidéos) ; • la capacité à présenter oralement un carnet de bord, un journal de séquence ou tout autre document personnel ayant contribué à l'appropriation des connaissances ; • la capacité à rendre compte à partir de notes personnelles d'une conférence ou d'un projet dans un exposé oral d'environ 5 à 10 minutes.
		• Planifier les étapes et les tâches pour la réalisation d'une production.	L'évaluation peut être effectuée lors de la réalisation d'un projet dont le cadre a été fixé par l'enseignant (projet artistique ou sportif, construction d'un exposé, mise en œuvre d'un protocole expérimental, etc.). L'élève doit préciser la production visée, identifier et ordonner les différentes étapes essentielles de la réalisation, prévoir un échéancier, décrire les tâches associées aux différentes étapes, mentionner les effets attendus. L'évaluation prend en compte la cohérence entre la production visée, les étapes et les tâches définies.

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTE ET SITUATIONS D'ÉVALUATION POSSIBLE *Chaque compétence doit être validée dans au moins deux disciplines différentes ; certaines compétences peuvent être validées dans le cadre d'un EPI.*
Arts plastiques Éducation musicale Éducation physique et sportive Français Histoire-géographie-enseignement moral et civique Langues vivantes (étrangères ou régionales) Mathématiques Physique-Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Coopérer et réaliser des projets**	• Définir et respecter une organisation et un partage des tâches dans le cadre d'un travail de groupe.	L'évaluation peut être effectuée lors de la réalisation d'un projet collectif, depuis son élaboration jusqu'à sa présentation. Le cadre du projet a été préalablement fixé, expliqué et partagé par l'ensemble des élèves concernés. Bien que guidés par l'enseignant, les élèves ont une marge d'autonomie importante dans la réalisation du projet. L'évaluation peut se fonder sur une observation régulière du comportement de l'élève et prend en compte : • sa capacité à débattre de manière constructive au sein du groupe, à apporter des idées, à participer de manière efficace à la réalisation du projet, à aider ses camarades, etc ; • son niveau d'engagement au sein des tâches nécessaires à la réalisation du projet.
Arts plastiques Éducation musicale Éducation physique et sportive Français Histoire-géographie-enseignement moral et civique Langues vivantes (étrangères ou régionales) Mathématiques Physique-Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Rechercher et traiter l'information et s'initier aux langages des médias**	• Rechercher des informations dans différents médias (presse écrite, audiovisuelle, web) et ressources documentaires. • Apprécier la fiabilité des informations recueillies en croisant différentes sources.	L'évaluation peut être effectuée lors de la réalisation d'une production nécessitant une recherche documentaire (construction d'un exposé ; préparation d'un débat ; activité scientifique effectuée en groupe ou en autonomie ; analyse d'une œuvre ; préparation d'une visite, etc.). L'évaluation peut prendre en compte la capacité : • à rechercher des informations dans différents médias, ressources documentaires, bases de données, y compris dans une langue vivante étrangère ou régionale ; • à identifier des informations utiles au regard du projet, à les archiver et les ordonner ; • à restituer ces informations au sein de textes, images ou tout autre support à l'occasion d'une production écrite ou orale. L'évaluation peut être effectuée lors d'une recherche documentaire (textes, images, sons) sur une thématique donnée, y compris dans une langue vivante étrangère ou régionale. Il est demandé à l'élève de classer les informations recueillies en les hiérarchisant selon leur degré de fiabilité et en argumentant ce classement. L'évaluation peut prendre en compte : • la diversité et la richesse des informations recueillies au regard de la thématique en mentionnant les références ; • la capacité à apprécier l'authenticité et le degré de fiabilité des informations selon leurs sources ; • la pertinence de l'argumentation du classement.

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTE ET SITUATIONS D'ÉVALUATION POSSIBLE *Chaque compétence doit être validée dans au moins deux disciplines différentes ; certaines compétences peuvent être validées dans le cadre d'un EPI.*
Arts plastiques Éducation musicale Éducation physique et sportive Français Histoire-géographie-enseignement moral et civique Langues vivantes (étrangères ou régionales) Mathématiques Physique-Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Mobiliser des outils numériques pour apprendre, échanger, communiquer**	• Utiliser des outils numériques pour réaliser une production (scientifique, artistique, motrice, expérimentale, document multimédia…).	L'évaluation est effectuée lors de la réalisation d'une production pour laquelle il est nécessaire d'utiliser des outils numériques (pièce musicale, production plastique, image, production multimédia, création artistique numérique, réalisation et tenue d'un blog, maquette numérique, etc.). L'évaluation peut prendre en compte : • la capacité à exploiter les possibilités offertes par les outils numériques ; • la qualité de la production finale au regard des objectifs initialement fixés et des contraintes à respecter.
		• Utiliser des outils numériques pour analyser des données ou une production (orale, artistique, motrice, technologique, etc.).	L'évaluation est effectuée lors de l'analyse de données ou d'une production. Cette production peut prendre différentes formes et notamment être une production personnelle de l'élève. L'élève analyse cette production à l'aide d'outils numériques en choisissant parmi différents logiciels/applications numériques. L'évaluation peut prendre en compte : • la pertinence du choix des applications-logiciels au regard de l'analyse à effectuer ; • la capacité à exploiter les différentes fonctionnalités de l'outil et des applications ; • la pertinence de l'analyse réalisée.
		• Utiliser des outils et espaces numériques pour échanger, stocker, mutualiser des informations.	L'évaluation est effectuée lors de la réalisation d'un projet dans lequel les élèves doivent partager et mutualiser des informations dans un « espace numérique ». L'évaluation prend en compte la capacité à exploiter les différentes fonctionnalités offertes par l'espace numérique.

Domaine 3 – cycle 4 : La formation de la personne et du citoyen

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTES ET/OU SITUATIONS POSSIBLES D'ÉVALUATION *Quand elle se fait en langues vivantes étrangères et régionales, l'évaluation des compétences décrites dans ce domaine prend en compte le niveau de maîtrise linguistique attendu et indiqué dans les programmes pour chaque langue.*
L'évaluation est réalisée dans des situations diverses, dans le quotidien de la classe dans les enseignements et dans l'établissement ou lors d'activités et d'actions hors de l'établissement, dans le cadre du parcours citoyen. L'observation des élèves est privilégiée.			
Arts plastiques Éducation musicale Éducation physique et sportive Français Histoire-géographie-enseignement moral et civique Langues vivantes (étrangères ou régionales) Mathématiques Physique-Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Maîtriser l'expression de sa sensibilité et de ses opinions, respecter celles des autres**	• Expliciter les émotions ressenties. • Formuler une opinion, prendre de la distance avec celle-ci, la confronter à celle d'autrui et en discuter.	L'évaluation est réalisée lors de la présentation orale et/ou écrite d'une œuvre ou d'un texte engageant la sensibilité de l'élève. L'évaluation peut prendre en compte la précision du vocabulaire utilisé par l'élève pour exprimer ce qu'il perçoit et ressent, la capacité à expliciter ce qui lui plaît et déplaît, à justifier ce qu'il ressent, à tenir compte des réactions des interlocuteurs. L'évaluation est réalisée lors d'échanges (écrits et/ou oraux) entre élèves, sur une thématique (proposée par l'enseignant) mettant en jeu des questions morales ou sociales. Elle peut prendre en compte la capacité de l'élève à : • expliquer, argumenter pour défendre ses choix et ses prises de position ; • participer aux échanges de manière constructive, dans un langage correct, en restant dans le sujet et en respectant les codes de communication spécifiques à la langue utilisée ; • accueillir et prendre en compte les avis des autres élèves.
Arts plastiques Éducation musicale Éducation physique et sportive Français Histoire-géographie-enseignement moral et civique Langues vivantes (étrangères ou régionales) Mathématiques Physique-Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Connaître et comprendre la règle et le droit**	• S'approprier et respecter les règles de fonctionnement de son établissement et de collectifs plus restreints, et participer à leur élaboration. • Connaître, comprendre et analyser les principes, les valeurs et les symboles de la République française et des sociétés démocratiques.	L'évaluation peut être réalisée dans différentes situations scolaires dans lesquelles les élèves ont à respecter des règles collectives pour assurer la sécurité de chacun (activités de laboratoire, activités sportives à risque) et/ou permettre un fonctionnement collectif efficace (réalisation d'un projet collectif notamment artistique ; jeu sportif ; situations de classe quotidiennes). L'évaluation peut prendre en compte la capacité à respecter les règles collectives, à vérifier le respect de ces règles par autrui, à rappeler les règles à d'autres élèves, à les aider à les appliquer, à proposer des aménagements d'une règle si besoin en envisageant les conséquences sur le fonctionnement du collectif. L'évaluation peut être réalisée lors de l'étude de textes, de débats, d'études de cas ou de jeux de rôles qui mobilisent : • les grands principes, les valeurs de la République et des sociétés démocratiques ; • les grands principes du droit, de la justice et des règles du fonctionnement social. L'évaluation prend en compte la capacité de l'élève : • à identifier et respecter ces principes et ces valeurs ; • à expliciter leur raison d'être ; • à les mettre en lien avec le règlement intérieur, la vie de l'établissement, des situations réelles ou imaginaires (en particulier, récits et personnages mettant en jeu des valeurs morales), des faits d'actualité etc.

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTES ET/OU SITUATIONS POSSIBLES D'ÉVALUATION *Quand elle se fait en langues vivantes étrangères et régionales, l'évaluation des compétences décrites dans ce domaine prend en compte le niveau de maîtrise linguistique attendu et indiqué dans les programmes pour chaque langue.*
Arts plastiques Éducation musicale Éducation physique et sportive Français Histoire-géographie-enseignement moral et civique Langues vivantes (étrangères ou régionales) Mathématiques Physique-Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Exercer son esprit critique, faire preuve de réflexion et de discernement**	• Rendre compte des argumentaires développés par différents protagonistes relativement à une thématique.	L'évaluation est réalisée lors du visionnement de débats (débats télévisuels, débats entre élèves) ou de la lecture de textes présentant des points de vue différents sur une thématique. Il est demandé à l'élève de rendre compte de deux ou trois argumentaires développés (dans le débat ou le texte) relativement à la thématique. L'évaluation peut prendre en compte la précision et la justesse de la restitution des argumentaires développés, et la capacité à donner son propre point de vue par rapport à ces argumentaires et à la thématique.
		• Utiliser les médias et l'information de manière responsable et raisonnée.	L'évaluation peut prendre en compte : • la capacité à vérifier l'origine et la pertinence des sources d'information, en particulier sur le web, à repérer des points de vue, à hiérarchiser les informations ; • la capacité à repérer, dans une situation donnée, la différence entre faits, informations et commentaires, par exemple en étudiant différents articles de presse portant sur un même événement ; • l'usage fait par l'élève des réseaux sociaux en tant que producteur ou relais de l'information avec, notamment, la prise en compte des règles de droit.
		• Distinguer ce qui relève d'une croyance ou d'une opinion et ce qui constitue un savoir (ou un fait) scientifique. • Distinguer la perception subjective de l'analyse objective.	À partir d'activités relevant de toutes les disciplines (lecture de documents présentant différents points de vue, expérimentations, résolution de problèmes), l'évaluation peut prendre en compte la capacité de l'élève à : • distinguer des éléments de discours relevant de croyances de ceux s'appuyant sur des savoirs et des faits scientifiques avérés ; • identifier dans un discours ce qui relève de préjugés et de stéréotypes ; • déceler des implicites sous-tendant le discours ; • conduire une analyse objective fondée sur l'observation, l'expérimentation, le raisonnement. L'évaluation peut s'appuyer sur des œuvres artistiques, images, textes, ou tout autre document appelant l'expression d'une sensibilité personnelle, mais pouvant -devant- être analysés objectivement (par l'étude des matériaux, des techniques, de la langue, etc.).

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	CONTEXTES ET/OU SITUATIONS POSSIBLES D'ÉVALUATION *Quand elle se fait en langues vivantes étrangères et régionales, l'évaluation des compétences décrites dans ce domaine prend en compte le niveau de maîtrise linguistique attendu et indiqué dans les programmes pour chaque langue.*
Arts plastiques Éducation musicale Éducation physique et sportive Français Histoire-géographie-enseignement moral et civique Langues vivantes (étrangères ou régionales) Mathématiques Physique-Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Faire preuve de responsabilité, respecter les règles de la vie collective, s'engager et prendre des initiatives**	• Assumer des responsabilités et prendre des initiatives dans l'établissement et/ou dans la classe. • S'impliquer dans la mise en place d'un événement dans l'établissement.	*Il convient d'être vigilant sur le fait qu'un élève peut avoir une attitude responsable sans qu'elle soit marquée par un engagement visible, de se garder d'encourager l'activisme pour avoir matière à évaluation.* Cette compétence peut être validée par l'engagement et l'attitude responsable de l'élève au sein des activités de la classe et/ou de différentes instances de la vie scolaire (conseil de vie collégien, conseil de classe, site web, etc.) ou associatives (associations sportive, culturelle, citoyenne, etc.). L'évaluation peut être réalisée lors de la mise en place d'un événement ou d'un projet sportif, culturel, scientifique, artistique, éducatif, etc. Les enseignants et/ou les élèves définissent les tâches à assurer pour la réalisation du projet ou de l'événement. Les élèves se répartissent les tâches avec un échéancier. L'évaluation peut prendre en compte l'engagement actif de l'élève dans les tâches qu'il a à réaliser, son autonomie dans leur réalisation, la capacité à les mener à bien ou de solliciter de l'aide à bon escient, le respect des échéances temporelles, etc.

Domaine 4 – cycle 4 : Les systèmes naturels et les systèmes techniques

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	SITUATIONS ET / OU CONTEXTES D'ÉVALUATION POSSIBLES
Mathématiques Physique - Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Mener une démarche scientifique, résoudre un problème**	• Extraire, organiser les informations utiles et les transcrire dans un langage adapté. • Mettre en œuvre un raisonnement logique simple.	À partir d'un énoncé, de documents, d'une situation expérimentale et/ou d'une observation (directe ou filmée), l'élève peut être mis en situation de : • décrire des phénomènes ou des objets ; • reformuler en langage courant l'énoncé et les consignes du problème à résoudre ; • repérer les informations en lien avec ses connaissances. L'évaluation de la production prend en compte la justesse du raisonnement, mais aussi toute mise en œuvre de stratégies pertinentes, ainsi que les essais engagés, même non aboutis ou rédigés de façon imparfaite. En mathématiques, la compétence de raisonnement logique peut être évaluée à travers des situations variées : • l'élaboration d'une conjecture à partir d'observations, de mesures, de calculs, d'expérimentations ; • l'organisation logique d'un enchaînement de propositions fournies ; • la recherche de contre-exemples pour invalider une conjecture ; • la confrontation de plusieurs solutions d'un problème ; • la résolution d'un problème simple, notamment en géométrie plane, sans exiger la rédaction aboutie d'une démonstration. On veillera à ne pas astreindre la validité d'un raisonnement à la conformité de sa mise en forme à un modèle de rédaction attendu. En sciences et technologie, la compétence de raisonnement logique peut être évaluée à travers l'analyse d'un problème, d'une situation expérimentale ou du fonctionnement d'un objet qui conduit l'élève à : • s'interroger sur les causes d'un phénomène ; • distinguer une relation de cause à effet d'une relation de corrélation ; • élaborer des hypothèses ; • choisir un protocole expérimental ; • exploiter des résultats issus de mesures, d'observations, de calculs ; • valider ou invalider une hypothèse ; • argumenter de façon pertinente à partir d'informations triées et sélectionnées.

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	SITUATIONS ET / OU CONTEXTES D'ÉVALUATION POSSIBLES
Mathématiques Physique - Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Mener une démarche scientifique, résoudre un problème**	• Modéliser et représenter des phénomènes et des objets.	Les compétences de modélisation et de représentation peuvent être évaluées à travers : • l'utilisation de notions mathématiques (calcul littéral, fonctions, géométrie) pour représenter et traduire une situation réelle, pour résoudre un problème ; • l'utilisation de la proportionnalité pour modéliser certains phénomènes physiques, chimiques, biologiques, géologiques, technologiques, etc ; • l'utilisation de dessins, de croquis, de schémas, de figures géométriques, de symboles propres aux disciplines ; • en physique-chimie, l'utilisation des modèles particulaires adaptés pour décrire une transformation physique, chimique.
		• Mettre en œuvre un protocole expérimental, réaliser le prototype d'un objet.	Les situations d'évaluation proposées conduisent l'élève à : • utiliser des instruments d'observation ; • mesurer ; • réaliser ou utiliser un dispositif expérimental ou un objet technique ; • valider le fonctionnement d'un dispositif réalisé et en vérifier le bon fonctionnement ; • utiliser des techniques de préparation et de collecte ; • utiliser des logiciels dédiés (simulation, acquisition, tableur, géométrie dynamique, etc.).
		• Pratiquer le calcul numérique (exact et approché) et le calcul littéral.	L'évaluation des compétences de calcul peut se faire à travers des exercices dédiés, mais aussi à travers la résolution de problèmes internes aux mathématiques ou relevant d'autres disciplines. Le calcul peut être conduit mentalement, à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, tableur, logiciel). Cette évaluation prend en compte la justesse du résultat, mais aussi toute mise en œuvre de stratégies pertinentes pour effectuer le calcul (organisation, simplification du calcul ; ordres de grandeur).
		• Contrôler la vraisemblance d'un résultat.	L'élève est capable d'identifier un résultat aberrant en termes d'ordre de grandeur, de signe, etc.
		• Communiquer sur ses démarches, ses résultats et ses choix, en argumentant.	L'évaluation de la capacité à communiquer ses démarches et ses résultats pourra se faire à l'écrit ou à l'oral : • transcription totale ou partielle d'un raisonnement ou d'une démonstration ; • rédaction de tout ou partie d'un compte rendu d'activité à des fins d'utilisation personnelle (cahier de laboratoire, cahier de recherche) ou collective (affiche, poster, article de journal ou de blog) ; • présentation orale d'une activité menée seul ou en groupe. L'évaluation prend en compte de manière significative l'argumentation et la bonne utilisation de la langue française et des langages mathématique, scientifique et informatique.

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	SITUATIONS ET / OU CONTEXTES D'ÉVALUATION POSSIBLES
Mathématiques Physique - Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Concevoir des objets et systèmes techniques**	• Concevoir des objets simples, des éléments de programme informatique, des protocoles biotechnologiques en réponse à un besoin.	L'évaluation peut mettre l'élève en situation de : • relier ses savoirs à une réalisation technologique ; • concevoir, améliorer, mettre en œuvre un protocole de réalisation à partir d'un cahier des charges en identifiant et en prenant en compte les contraintes.
Éducation physique et sportive Physique - Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Identifier des règles et des principes de responsabilité individuelle et collective dans les domaines de la santé, de la sécurité, de l'environnement**	• Appliquer systématiquement et de manière autonome les règles de sécurité et de respect de l'environnement. • Expliquer une règle de sécurité ou de respect de l'environnement. • Expliquer l'impact de différentes activités humaines sur l'environnement. • Expliquer un comportement responsable dans le domaine de la santé, de la sécurité et de l'environnement.	L'évaluation peut prendre en compte les items suivants : • port, de manière raisonnée, des équipements de protection individuelle lors des activités expérimentales en laboratoire ; • application systématique des règles d'utilisation raisonnée des produits chimiques ; • application systématique des règles de tri des déchets, notamment chimiques et biologiques ; • application systématique des règles de sécurité dans les différents domaines scientifiques, notamment dans les domaines de l'optique, de l'électricité et de la chimie ; • respect du vivant et de l'environnement lors des sorties de terrain et des activités en laboratoire. L'élève est mis en situation d'argumenter pour relier un comportement à l'échelle locale à son incidence à l'échelle planétaire et un comportement individuel à son incidence à l'échelle collective.

Domaine 5 – cycle 4 : Les représentations du monde et l'activité humaine

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	SITUATIONS ET / OU CONTEXTES D'ÉVALUATION POSSIBLES
Arts plastiques Éducation musicale Éducation physique et sportive Français Histoire-géographie-enseignement moral et civique Langues vivantes (étrangères ou régionales) Mathématiques Physique-Chimie Sciences de la vie et de la Terre Technologie	**Situer et se situer dans le temps et l'espace**		*L'évaluation peut être réalisée dans des situations diverses, dans le quotidien de la classe ou lors d'activités complémentaires aux enseignements, de sorties ou de voyages scolaires (dont les activités réalisées dans le cadre du PEAC), à partir de supports variés : œuvres, textes, images, cartes, schémas, frises chronologiques… L'évaluation met les élèves en situation d'établir des relations, notamment des comparaisons, entre des objets d'étude différents, qu'ils relèvent d'une même discipline ou de disciplines différentes.* *L'évaluation prend en compte la capacité de l'élève à :*
		• Maîtriser de manière autonome des **repères dans le temps** : - connaître et localiser dans le temps de grandes périodes historiques, des phénomènes historiques, des faits et des événements, des mouvements intellectuels, artistiques et culturels; - situer et ordonner des faits dans le temps ; pratiquer de conscients allers-retours dans la chronologie, maîtriser la chronologie narrative, savoir ordonner un récit.	• mémoriser les repères historiques en comprenant leur sens ; • situer ou localiser dans le temps des périodes et des phénomènes historiques, des faits, des événements, des acteurs historiques, des mouvements artistiques et culturels, en utilisant le langage et les outils qui permettent de dire et de représenter le temps ; • ordonner des faits les uns par rapport aux autres ; • associer des périodes, des faits, des événements, des acteurs historiques ; • situer un fait dans une époque donnée (y compris géologique), identifier des continuités et des ruptures chronologiques.
		• Maîtriser de manière autonome des **repères dans l'espace** : - connaître et localiser des repères spatiaux aux différentes échelles et sur des projections cartographiques variées ; - se repérer et repérer des lieux dans l'espace en utilisant des plans, des cartes et des outils de géolocalisation ; - situer et mettre en relation des lieux et des espaces à partir de cartes d'échelles et de projection variées et d'images.	• lire une carte (titre, légende, échelle graphique) et en comprendre le sens général ; • situer des lieux et des espaces, des itinéraires ou des flux sur des cartes de projection et d'échelles différentes, analogiques ou numériques ; • Élaborer un projet de déplacement en mobilisant la notion de distance.
		• Contextualiser un document, un texte, une œuvre, un(e) artiste, un personnage, une découverte scientifique, un fait artistique ou une notion dans le temps et dans une ou plusieurs aires géographiques et culturelles.	• mobiliser des connaissances dans différentes disciplines pour situer dans un ou des contextes historique, géographique, artistique et culturel des œuvres, des documents, des idées, des inventions ; • mobiliser ses connaissances historiques, littéraires et artistiques pour commenter un texte ou une œuvre et caractériser ce qu'ils représentent ; • tenir compte de ces éléments de contextualisation dans l'appréciation d'un texte ou d'une œuvre et dans son interprétation ; • tenir compte de la profondeur historique et des différences culturelles pour caractériser une œuvre, une découverte scientifique ou technique, un phénomène socioculturel.

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	SITUATIONS ET / OU CONTEXTES D'ÉVALUATION POSSIBLES
Arts plastiques Éducation musicale Français Histoire-géographie-enseignement moral et civique Langues vivantes (étrangères ou régionales) Sciences de la vie et de la Terre	**Analyser et comprendre les organisations humaines et les représentations du monde**		*L'évaluation peut être réalisée dans différentes situations de classe (dont des sorties scolaires réalisées dans le cadre du PEAC), dans le champ des lettres, de l'histoire-géographie, des enseignements artistiques et des LVER. Elle prend en compte la capacité de l'élève à :*
		• Se référer de manière pertinente à des œuvres majeures et à des représentations du monde ; en apprécier et en caractériser la valeur et la portée.	• comprendre le sens général d'une œuvre ou d'un document ; • sélectionner des informations dans un texte, un document ou une œuvre, les classer et les interpréter ; • mobiliser le vocabulaire utile pour décrire un phénomène de façon ordonnée ou rendre compte du sens d'un texte, d'un document ou d'une œuvre ; • caractériser la nature et le type des documents et œuvres divers, comme le courant artistique et esthétique, le genre littéraire, ou le type de discours dont elles relèvent.
		• Mobiliser des connaissances pour analyser et comprendre des documents, des textes ou œuvres témoignant des principales organisations humaines du passé ou du présent.	• décrire et expliquer, dans le cadre des exemples de situations historiques ou géographiques qui lui sont soumis, l'organisation et l'action d'une société humaine.
		• Analyser quelques enjeux du développement durable dans le contexte des sociétés étudiées	• repérer et expliquer quelques enjeux du développement durable dans l'organisation et l'action des sociétés étudiées.
		• Comprendre et interpréter des textes ou des œuvres.	• présenter les éléments de cohérence d'un texte, les références culturelles principales des textes lus et étudiés ; • repérer et expliquer des choix d'écriture ou de composition dans un texte ou une image ou des œuvres appartenant à divers domaines artistiques ; • expliquer à l'aide d'un vocabulaire simple l'organisation d'une œuvre musicale, plastique, cinématographique, photographique, textuelle ou numérique et associant plusieurs langages ; rendre compte des effets de sens produits par son organisation et ses caractéristiques formelles ; • mener par un travail de création artistique (plastique, musicale), à la compréhension d'une œuvre ou d'un processus artistique en tirant parti des pratiques et techniques qui la caractérisent ; • entrer par un travail d'écriture (d'invention, d'imitation, de variation) dans la compréhension d'un texte ou d'une œuvre, en exploitant ses lectures et sa connaissance des caractéristiques des genres littéraires ; • présenter à l'écrit ou à l'oral, une œuvre contemporaine ou du patrimoine emblématique des évolutions de la création artistique, en décrire les grandes lignes, l'inscrire dans l'histoire des arts et dans la chronologie, formuler un jugement de goût nuancé et argumenté.
		• Exercer son regard critique sur divers œuvres et documents.	• analyser et comprendre des situations réelles ou des fictions en les différenciant et en mobilisant ses connaissances dans ce but ; • confronter des textes, des documents ou des œuvres et identifier le point de vue qu'ils expriment ; • comparer des œuvres (littéraires, plastiques et musicales) et identifier la façon dont elles se situent au regard d'une problématique particulière ; • prendre en compte dans son appréciation d'une œuvre ou d'un texte la diversité historique et culturelle des systèmes de représentation et de valeurs et savoir confronter des interprétations.
		• Analyser quelques enjeux du développement durable dans le contexte des sociétés étudiées.	• repérer et expliquer quelques enjeux du développement durable dans l'organisation et l'action des sociétés étudiées.

DISCIPLINE(S) ENSEIGNÉE(S) CONTRIBUANT À L'ÉVALUATION DES ACQUIS	ÉLÉMENTS SIGNIFIANTS	EN FIN DE CYCLE 4, L'ÉLÈVE QUI A UNE MAÎTRISE SATISFAISANTE (NIVEAU 3) PARVIENT NOTAMMENT À :	SITUATIONS ET / OU CONTEXTES D'ÉVALUATION POSSIBLES
Arts plastiques Éducation musicale Français Histoire-géographie-enseignement moral et civique Langues vivantes (étrangères ou régionales)	**Raisonner, imaginer, élaborer, produire**		*L'évaluation peut être réalisée à partir de différentes situations, qui amènent l'élève à :*
		• Décrire et raconter, expliquer une situation géographique ou historique, une situation ou un fait artistique ou culturel.	• élaborer un récit historique, raconter une histoire à l'écrit ou à l'oral, en respectant une consigne ; • mobiliser les langages artistiques de la création ou de l'interprétation pour construire un récit, témoigner d'un événement ou d'une situation ; • élaborer une description ; • articuler de manière pertinente dans un récit narration et description.
		• Élaborer un raisonnement et l'exprimer en utilisant des langages divers.	• formuler des hypothèses d'interprétation de textes et des situations qu'ils représentent ; • développer à l'écrit et à l'oral un raisonnement cohérent, capable de dépasser l'anecdotique et le factuel ; • pratiquer les différents genres de l'argumentation ; • formuler des hypothèses d'interprétation de situations historiques ou géographiques ; • élaborer une production écrite, textuelle, schématique ou graphique, un diaporama pour décrire, expliquer exprimer un raisonnement ; • élaborer un scenario prospectif concernant le futur d'un territoire et l'argumenter.
		• Analyser et interpréter des œuvres et formuler sur elles un jugement personnel argumenté.	• lire à haute voix, réciter des textes mémorisés, interpréter une scène de théâtre, utiliser les technologies numériques pour enregistrer la voix, associer sons, textes et images ; • formuler des réactions après une lecture, l'observation ou l'écoute d'une œuvre, présenter un point de vue dans un débat interprétatif, expliciter une démarche personnelle, élaborer des documents destinés à faciliter la présentation d'un exposé ; • prendre part à un débat d'idées, à des discussions mettant en jeu des questions morales, scientifiques, géographiques, historiques, littéraires, artistiques, culturelles ; • enrichir un travail de création artistique de références aux œuvres étudiées et interprétées.
		• Pratiquer diverses formes d'écriture d'invention et d'argumentation.	• pratiquer des exercices d'imitation, de transposition, de greffe, des suites narratives, des jeux poétiques ; • réécrire des textes issus de la littérature ou de la presse en vue de modifier leur orientation argumentative, produire des textes défendant une opinion en réponse à une argumentation contraire, traiter des sujets de rédaction à caractère argumentatif ; • élaborer un texte, un objet, une image qui rende compte d'une expérience, d'une perception ou d'une émotion, être en mesure d'expliciter les choix effectués pour les exprimer, de mettre en rapport l'intention et la forme.
		• Pratiquer divers langages artistiques en lien avec la connaissance des œuvres et les processus de création.	• réaliser des projets de création et d'interprétation artistiques, individuellement, collectivement ou en petits groupes, avec des langages et des moyens variés, adopter une distance critique, être en mesure d'expliciter des choix dans la démarche et la production ; • tirer parti des données matérielles, techniques, sémantiques de créations préexistantes dans un projet de création ou d'interprétation nouvelle, les manipuler, transformer, arranger, pasticher, détourner etc., en modifier le sens ou la nature dans une intention artistique ; • établir des liens entre son propre travail, les œuvres et les démarches artistiques rencontrées et étudiées, interroger ses créations ou interprétations du point de vue de la production ou de la réception, distinguer et situer les positions d'auteur, de spectateur ou d'auditeur.